Devoir à la maison n°6

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Exercice. Suite de polynômes

On considère la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes à coefficients réels définis par :

$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = 2XP_n - \frac{1}{n+1}(1+X^2)P_n'$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est de degré $\leqslant n$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $P_n = a_n X^n + Q_n$ avec $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré $\leqslant n-1$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{n+2}{n+1} a_n$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = n+1$ puis préciser le degré de P_n.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$, puis préciser la parité du polynôme P_n en fonction de n.
4. Valeur en 0 du polynôme P_n pour $n \in \mathbb{N}$ et une expression intégrale.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1}' = (n+2)P_n$.
   (b) Montrer, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{2n+1}(0) = 0$ et $P_{2n}(0) = (-1)^n$.
   (c) Déduire de ce qui précède que :
   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad P_{n+1}(x) = P_{n+1}(0) + (n+2)\int_0^x P_n(t)\mathrm{d}t$$
5. Expression des polynômes P_n.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} - 2XP_{n+1} + (1+X^2)P_n = 0$
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = P_n(x)$.
      i. Préciser u_0 et vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2xu_{n+1} - (1+x^2)u_n$.
      ii. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer le terme général u_n de la suite numérique (u_n) en fonction de n et du réel x.
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \dfrac{1}{2i}\left((X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}\right)$
6. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est scindé sur $\mathbb{R}$ et en préciser les racines.

Problème - Espace vectoriel engendré par les matrices nilpotentes

I. Similitude de matrices de rang 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. On désigne par f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ canoniquement associé à A, i.e. $f : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $M \mapsto A \times M$.

1. Montrer que le noyau de f, noté $\operatorname{Ker} f$ est de dimension $n-1$.
2. Soit $e_n \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \operatorname{Ker} f$ et soit $(e_1, e_2, \ldots, e_{n-1})$ une base de $\operatorname{Ker} f$.
   (a) Montrer que la famille $(e_1, \ldots, e_{n-1}, e_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
   (b) Ecrire la matrice B de f dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$ et en déduire qu'il existe des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ tel que
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \alpha_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \operatorname{tr}(A) \end{pmatrix}$$
3. On suppose ici que $\operatorname{tr}(A) \neq 0$.
   (a) On note $e'_n = e_n + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{\operatorname{tr}(A)} e_i$. Exprimer $f(e'_n)$ en fonction de e'_n
   (b) En déduire que A est semblable à une matrice nulle, excepté le coefficient en ligne n et colonne n qui vaut $\operatorname{tr}(A)$.
4. On suppose ici que $\operatorname{tr}(A) = 0$. On garde les notations de la question 2.
   (a) Montrer que $f(e_n) \in \operatorname{Ker} f$
   (b) On pose alors $e'_{n-1} = f(e_n)$. Montrer qu'on peut compléter le vecteur $e'_{n-1})$ en une base $(e'_1, \ldots, e'_{n-1})$ de $\operatorname{Ker} f$. Puis, justifier que $(e'_1, \ldots, e'_{n-1}, e_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
   (c) Montrer que la matrice B' de f dans la base $(e'_1, \ldots, e'_{n-1}, e_n)$ est $B' = E_{n-1,n}$ Puis justifier que A est semblable à B'
   (d) Calculer ${B'}^2$. En déduire que A est nilpotente.
5. Montrer que deux matrices de rang 1 sont semblables dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ si et seulement si elles ont la même trace.

II. Sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes

On note $\mathcal{V}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ engendré par les matrices nilpotentes.

1. Linéarité et noyau de la trace.
   (a) Vérifier que l'application tr est une forme linéaire non nulle. En déduire son rang.
   (b) En déduire que l'ensemble $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{tr}(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $n^2 - 1$
2. On considère les matrices $F_1, \ldots, F_{n-1}$ définies par $F_k = (a_{i,j}^{(k)})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ avec pour $k \in \mathbb{N}_{n-1}$,
$$a_{i,j}^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in \{k, k+1\} \text{ et } j = k; \\ -1 & \text{si } i \in \{k, k+1\} \text{ et } j = k+1; \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}.$$
   Autrement dit :
$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \ldots, F_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
   Pour tout $k \in \mathbb{N}_{n-1}$, préciser le rang et la trace de la matrice F_k, puis en déduire que F_k est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Pour tout couple (i, j) d'éléments de $\mathbb{N}_n$ avec $i \neq j$, on note $F_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la i-ème ligne et la j-ème colonne valant 1 ; on pose enfin $F_{i,i} = F_i$ pour $i \in \mathbb{N}_{n-1}$.
   Vérifier que pour tout $i \neq j$, $F_{i,j}$ est nilpotente et montrer que $(F_1, \ldots, F_{n-1}, F_{1,2}, \ldots F_{1,n}, \ldots\ldots, F_{n,1}, \ldots F_{n,n-1})$ est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathcal{V}$.
4. (*) Montrer que si M est nilpotente, alors nécessairement, $\operatorname{tr}(M) = 0$.
   On pourra chercher une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dans laquelle la matrice de $f : X \mapsto NX$ est triangulaire supérieure avec que des 0 sur la diagonale.
5. En déduire que $\mathcal{V} = \operatorname{Ker} \operatorname{tr}$.
6. Existe-t-il des matrices de trace nulle, et non nilpotentes ? (Si oui, donner un exemple).