MPSI 3 - Fermat Le 10.01.23
2022-2023

Devoir à la maison n°5
CORRECTION

Exercice 1. Valeur prise par une fonction au voisinage de $+\infty$

On fixe dans tout l'exercice une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ quelconque. On considère l'ensemble :

$$X_f = \{y \in \mathbb{R} \mid \forall\, A \in \mathbb{R}, \exists\, x \geqslant A, f(x) = y\}$$

1. Pour tout $y \in f([0,T])$, $\exists\, x_0 \in [0,T]$ tel que $f(x) = y$.
   Puis, par parité, la suite $u_n = f(x_0 + nT)$ est constante ($u_{n+1} = u_n$),
   donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x_0 + nT) = f(x_0) = y$.
   Et donc pour tout $A \in \mathbb{R}$, $\exists\, n = \lfloor \frac{A}{T} \rfloor + 1$ tel que $x_0 + nT > A$ car $nT > A$ et $f(x_0 + nT) = y$.
   Donc $y \in X_f$. On a l'inclusion $f([0,T] \subset X_f$.
   Réciproquement, comme f est T-périodique, $f([0,T]) = f(\mathbb{R})$.
   Et donc si $y \notin f([0,T])$, $y \notin f(\mathbb{R})$ donc nécessairement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq y$ et $y \notin X_f$.

   $$\boxed{\text{Par double inclusion : } X_f = f([0,T])\big(= f(\mathbb{R})\big)}$$

2. Si X_f est non vide et que $y \in X_f$.
   Alors nécessairement il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$.
   Et en prenant $A > x$, il existe $x' > A$ tel que $y = f(x')$.
   Or f est injective, donc $f(x) = f(x')(= y)$ implique $x = x'$ et pour tout $x < A < x'$.
   On a donc une contradiction et donc

   $$\boxed{\text{l'ensemble } X_f \text{ est vide.}}$$

3. Soit $y \in \mathbb{R}$.
   Comme $f \to \infty$, on peut affirmer

   $$\forall\, M > 0, \exists\, A > 0 \text{ tel que } x > A \longrightarrow f(x) > M$$

   En prenant $M = y + 1$, à partir d'un rang $A > 0$, pour tout $x > A$, $f(x) > M$ donc $f(x) > y$.
   Ainsi $y \notin X_f$.

   $$\boxed{\forall\, y \in \mathbb{R}, y \notin X_f \text{ i.e. } X_f = \emptyset}$$

4. On suppose que la fonction f admet en $+\infty$ une limite réelle ℓ.
   (a) Soit $y \in X_f$.
   Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que pour $x \geqslant A$, $|f(x) - \ell| < \epsilon$.
   Or comme $y \in X_f$, il existe $x \geqslant A$ tel que $f(x) = y$.
   On a donc pour tout $\epsilon > 0$, $\exists\, A > 0$, $\exists\, x > A$ tel que $|f(x) - \ell| < \epsilon$ et $f(x) = y$.
   Ainsi pour tout $\epsilon > 0$, $\exists\, A > 0$, $\exists\, x > A$ tel que $|f(x) - \ell| < \epsilon$ et $|y - \ell| < \epsilon$.
   A et x ne servent plus :

   $$\forall\, \epsilon > 0, |f(x) - \ell| < \epsilon \Longrightarrow f(x) = \ell$$

   $$\boxed{X_f \subset \{\ell\}}$$

   Remarques !
   On n'a bien démontré qu'une inclusion et non une égalité !!

   (b) Premier cas $X_f = \emptyset$, donc $X_f \neq \{\ell\}$.
   Considérons $f : x \mapsto \frac{1}{x} + \ell$, alors $\lim_{+\infty} f = \ell$.
   Et pourtant $\ell \notin f(\mathbb{R})$, donc $\ell \notin X_f$. Second cas, $X_f = \{\ell\}$.
   Il suffit de considérer $f : x \mapsto \ell$, constante.

   $$\boxed{\text{L'inclusion réciproque peut être vraie ou fausse.}}$$

5. I est un intervalle de $\mathbb{R}$ si $\forall\ y_1 < y_2 \in I$, $[y_1, y_2] \subset I$.
Soient $y_1 < y_2 \in X_f$.
Soit $t \in [y_1, y_2]$.
Soit $A > 0$, il existe $x_1, x_2 \geqslant A$ tel que $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$.
f est continue, on applique le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\exists\ x \in [x_1, x_2] \text{ (ou } [x_2, x_1]) \mid t = f(x)$$

et nécessairement $x \geqslant A$.
Ainsi, $\forall\ t \in [y_1, y_2]$, $\forall\ A > 0$, $\exists\ x \geqslant A$ tel que $f(x) = t$
$\forall\ t \in [y_1, y_2]$, $t \in X_f$ $\quad [y_1, y_2] \subset X_f$.

$$\boxed{X_f \text{ est un intervalle de } \mathbb{R}}$$

Exercice 2

On cherche dans cet exercice à démontrer le théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.) avec le lemme de Cousin.

1. L'image de l'intervalle I (quelconque) par f continue est un intervalle.
De manière équivalente, si $a, b \in I$ et $f(b) \times f(a) \geqslant 0$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.
2. On suppose donc que f est continue sur I et que $f(a) \times f(b) \leqslant 0$ (où $a, b \in I$).
(a) f est continue en $t \in [a, b]$ si

$$\boxed{\forall\ \epsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \text{ tel que } \forall\ u \in [t-\delta, t+\delta], |f(u) - f(t)| \leqslant \epsilon}$$

(b) Soit $t \in [a, b]$ tel que $f(t) \neq 0$.
• Supposons $f(t) > 0$, prenons $\epsilon = \frac{f(t)}{2} > 0$.
Alors, il existe $\delta(t)$ (car δ dépend de t) tel que $\forall\ u \in [t - \delta(t), t + \delta(t)], |f(u) - f(t)| \leqslant \epsilon$
ce qui impose : $f(u) - f(t) \geqslant -\epsilon$, donc $f(u) \geqslant f(t) - \frac{1}{2}f(t) = \frac{1}{2}f(t) > 0$. Ainsi, tout nombre u du fermé $[t - \delta(t), t + \delta(t)]$ a le même signe que $f(t)$ (> 0). • Supposons $f(t) < 0$, prenons $\epsilon = -\frac{f(t)}{2} > 0$.
Alors, il existe $\delta(t)$ (car δ dépend de t) tel que $\forall\ u \in [t - \delta(t), t + \delta(t)], |f(u) - f(t)| \leqslant \epsilon$
ce qui impose : $f(u) - f(t) \leqslant +\epsilon$, donc $f(u) \leqslant f(t) - \frac{1}{2}f(t) = \frac{1}{2}f(t) < 0$. Ainsi, tout nombre u du fermé $[t - \delta(t), t + \delta(t)]$ a le même signe que $f(t)$ (< 0).

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Donc pour tout } t \in [a, b] \text{ tel que } f(t) \neq 0, \text{ il existe } \delta(t) > 0 \text{ tel que } \forall\ u \in [t - \delta(t), t + \delta(t)],\\ f(u) \leqslant \frac{1}{2}f(t) \text{ (si } f(t) < 0) \quad f(u) \geqslant \frac{1}{2}f(t) \text{ (si } f(t) > 0)\end{array}}$$

(c) On suppose maintenant les trois questions suivantes que le TVI est faux :
bien que $f(a)f(b) < 0$, il n'existe pas de $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = 0$, ou $\forall\ x \in [a, b]$, $f(x) \neq 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{D'après la question précédente,il existe jauge } \delta > 0 \text{ tel que}\\ \forall\ t \in [a, b], \forall\ u[t - \delta(t), t + \delta(t)], f(u) \times f(t) > 0 \text{ i.e. } f(u) \text{ a le même signe que } f(t).\end{array}}$$

(d) On applique alors le lemme de Cousin à partir de cette jauge.
Donc il existe $\sigma = \big(([x_0, x_1], t_1), \cdots ([x_{n-1}, x_n], t_n)\big)$ une subdivision de $[a, b]$ δ-fine.
Soit $k \in \mathbb{N}_n$, comme x_{k-1} et $x_k \in [t - \frac{1}{2}\delta(t), t + \frac{1}{2}\delta(t)]$, alors $f(x_{k-1})$, $f(x_k)$ (et $f(t_k)$) ont même signe.
Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $f(a) = f(x_0)$, $f(x_1)$,$\ldots f(x_k)$,$\ldots f(x_n) = f(b)$ ont même signe,

$$\boxed{\text{Ainsi } f(a)f(b) > 0.}$$

(e) C'est contraire à l'hypothèse, donc

$$\boxed{\exists\ x \in [a, b] \text{ tel que } f(x) = 0}$$

Problème. Etude d'une fonction

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\ x \neq 0, f(x) = \frac{1}{x^2} \times \exp(-\frac{1}{x})$$

1. Représentation de la fonction f.
   (a) Par croissance comparée : $\lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t} = 0$, donc en composant avec $x = \frac{1}{t}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
   et $\lim_{t\to-\infty} t^2 e^{-t} = +\infty$, donc en composant avec $x = \frac{1}{t}$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$.

$$\boxed{f \text{ n'est pas continue en } 0 \text{ (elle est au moins continue à droite)}}$$

   On a donc évidemment $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ qui n'admet pas de limite pour $x \to 0^-$.
   en revanche, comme $\lim_{t\to+\infty} t^3 e^{-t} = 0$, avec $x = \frac{1}{t}$:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{1}{x^3} \exp(-\frac{1}{x}) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{f \text{ est dérivable à droite en } 0, \text{ avec } f'(0^+) = 0 \text{ - mais non dérivable à gauche}}$$

   (b) f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (fonctions de référence) et pour tout $x \neq 0$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right) \exp(-\frac{1}{x}) = \frac{1 - 2x}{x^4} \exp(-\frac{1}{x})$$

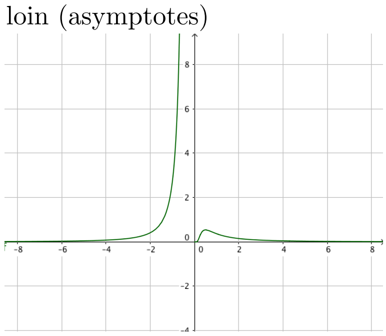
$$f'(x) \geqslant 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \leqslant \frac{1}{2}$$

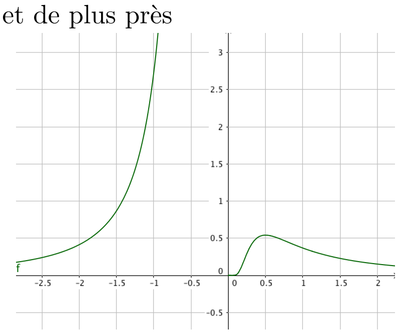
x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow +\infty$	$\|\|$	$0 \nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

   car $f(\frac{1}{2}) = 4e^{-2} \approx 0,54$ $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = 0$ (aucune forme indéterminée).
   Par ailleurs, pour u au voisinage de 0, $e^u \underset{u\to 0}{\sim} 1$.
   donc par composition, pour $x \to \pm\infty$, $\frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \underset{x\to\mathcal{A}\infty}{\sim} \frac{1}{x^2} > 0$ ainsi en $\pm\infty$, $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ et $\mathcal{C}_f$ est situé « au dessus ».

Remarques !
Le tableau de variations donne déjà ces informations, le calcul de l'équivalent n'est pas nécessaire

   (c) Vu de loin (asymptotes) et de plus près





2. Dérivées successives de la fonction f et polynômes associés.
   (a) f est le produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$,

$$\boxed{\text{donc } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur }]0, +\infty[.}$$

   (b) On va démontrer ce résultat par récurrence, mais considérons d'abord la suite (P_n) de polynômes définie par récurrence par $P_0 = 1$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = X^2 P_n' + [1 - 2(n+1)X]P_n$.
   Il s'agit bien d'une suite de polynômes : P_0 est un polynôme et si P_n est un polynôme, il en est de même de P_{n+1}.
   Puis notons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $\forall\ x > 0$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n+2}} \times e^{-\frac{1}{x}}$ ».

— Pour tout $x > 0$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} = \dfrac{P_0}{x^{2\times 0+2}}e^{-\frac{1}{x}}$.
Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Pour tout $x > 0$, (en exploitant $\mathcal{P}_n$) :

$$f^{(n+1)}(x) = [f^{(n)}]'(x) = \left(\frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} \times \frac{1}{x^2} + \frac{x^{2n+2} \times P_n'(x) - (2n+2)x^{2n+1} \times P_n(x)}{x^{2(2n+2)}}\right) e^{-\frac{1}{x}}$$

$$= \left(\frac{P_n(x) + x^2 P_n'(x) - (2n+2)xP_n(x)}{x^{2n+4}}\right) e^{-\frac{1}{x}} = \frac{P_{n+1}(x)}{x^{2(n+1)+2}}e^{-\frac{1}{x}}$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ tout } x \in]0, +\infty[,\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n+2}} \times e^{-\frac{1}{x}} \\ \text{avec pour tout } n \in \mathbb{N},\ P_{n+1} = X^2P_n' + [1 - 2(n+1)X]P_n \text{ et } P_0 = 1.\end{array}}$$

(c) On a vu $P_0 = 1$.
Puis $P_1 = X^2P_0' + (1 - 2X)P_0 = 1 - 2X$
Puis $P_2 = X^2P_1' + (1 - 4X)P_1 = -2X^2 + 1 - 6X + 8X^2 - 2X^2 = 1 - 6X + 6X^2$
Puis $P_3 = X^2P_2' + (1 - 6X)P_2 = (-6X^2 + 12X^3) + (1 - 12X + 42X^2 - 36X^3)$
$= 1 - 12X + 36X^2 - 24X^3$.
Et enfin $P_4 = X^2P_3' + (1 - 8X)P_3$
$= (-12X^2 + 72X^3 - 72X^4) + (1 - 20X + 132X^2 - 312X^3 + 192X^4)$
$= 1 - 20X + 120X^2 - 240X^3 + 120X^4$

$$\boxed{\begin{array}{c}P_0 = 1, \quad P_1 = 1 - 2X, \quad P_2 = 1 - 6X + 6X^2 \\ P_3 = 1 - 12X + 36X^2 - 24X^3 \quad P_4 = 1 - 20X + 120X^2 - 240X^3 + 120X^4\end{array}}$$

(d) *On note $[T]_h$, le coefficient situé devant X^h dans le polynôme T.*
Les premiers exemples montre que $\deg(P_n) = n$, que $[P_n]_0 = 1$ et $[P_n]_n = (-1)^n(n+1)!$.
Montrons ce résultat par récurrence.
Notons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}_n$: « $\deg(P_n) = n$, $[P_n]_0 = 1$ et $[P_n]_n = (-1)^n(n+1)!$ ».

— $\mathcal{Q}_0$ est vraie (ainsi que $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$, $\mathcal{Q}_3$ et $\mathcal{Q}_4$).

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{Q}_n$ est vraie.
On peut donc affirmer que $P_n = 1 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + (-1)^n(n+1)!X^n$.
Alors

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= X^2P_n' + (1 - 2(n+1)X)P_n \\ &= X^2(a_1 + \cdots + (n-1)a_{n-1}X^{n-2} + (-1)^n(n+1)! \times nX^{n-1}) \\ &\quad +(1 + (a_1 - 2(n+1))X + \cdots + (a_{n-1} - 2(n+1)a_{n-2})X^{n-1} - 2(n+1)(-1)^n(n+1)!X^{n+1} \\ &= 1 + (a_1 - 2(n+1))X + \cdots + (a_{k+1} - 2(n+1)a_k + ka_k)X^{k+1} \\ &\quad + \cdots + (a_n - 2(n+1)a_{n-1} + (n-1)a_{n-1})X^n + (-2(n+1)(-1)^n(n+1)! + (-1)^n n(n+1)!)X^{n+1} \end{aligned}$$

On vérifie bien que P_{n+1} est de degré $n+1$, son coefficient constant est $[P_{n+1}] = 1$
et le coefficient de plus haut degré est

$$[P_{n+1}]_{n+1} = -2(n+1)(-1)^n(n+1)! + (-1)^n n(n+1)! = (-1)^n(-2n-2+n)(n+1)! = (-1)^{n+1}(n+2)!$$

Ainsi $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vérifiée

$$\boxed{\text{Bilan : } \forall\, n \in \mathbb{N},\ \deg(P_n) = n+1,\ [P_n]_0 = 1 \text{ et } [P_n]_{n+1} = (-1)^n n!}$$

Remarques !

On n'est pas obligé de calculer explicitement les coefficients de P_n et se contenter de voir que $\deg P_n = n$, *donc* $\deg P_n' = n - 1$ *donc* $\deg(X^2P_n') = n + 1$ *ainsi que* $\deg((1 - 2(n+1)X)P_n = n + 1$.

Donc $\deg(P_{n+1}) \leqslant n + 1$.

Puis on calcule $[P_{n+1}]_{n+1}$ pour s'assurer qu'il est non nul.

$[P_{n+1}]_{n+1} = n[P_n]_n - 2(n+1)[P_n]_n = -(n+2)[P_n]_n \ldots$

(e) Et donc on a l'équivalent :

$$f^{(n)}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x^{2n+2}} e^{-\frac{1}{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ f^{(n)} \text{ admet une limite à droite nulle en } 0}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le théorème de prolongement de la fonction qui la rend de classe $\mathcal{C}^1$, s'applique n fois.
Donc $f_{|[0,+\infty[}$ est de classe $\mathcal{C}^n$, ceci pour tout entier n.

$$\boxed{\text{la fonction } f_{|[0,+\infty[} \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty.}$$

3. Nouvelles relations entre les polynômes P_n.
On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x^2 f(x)$.

(a) Pour tout $x \neq 0$,

$$g'(x) = 2xf(x) + x^2 f'(x) = \left(\frac{2}{x} + \frac{1-2x}{x^2}\right) e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} = f(x)$$

Puis en dérivant n fois cette relation : pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \neq 0$, $g^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x)$. On se contente du résultat sur $\mathbb{R}_+$ (en prolongeant en 0) :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ g^{(n+1)}_{|\mathbb{R}_+} = f^{(n)}_{|\mathbb{R}_+}.}$$

(b) On applique la formule de Leibniz, car par produit, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$. On note $t_2 : x \mapsto x^2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$,

$$\begin{aligned}
g^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} t_2^{(k)}(x) f^{(n+1-k)}(x) \\
f^n(x) &= x^2 f^{(n+1)}(x) + 2(n+1)xf^{(n)}(x) + (n+1)nf^{(n-1)}(x) \\
\frac{P_n(x)}{x^{2n+2}} &= \frac{P_{n+1}(x) + 2(n+1)xP_n(x) + n(n+1)x^2 P_{n-1}(x)}{x^{2n+2}}
\end{aligned}$$

Par unicité d'écriture,

$$\boxed{\forall\ x \in]0,+\infty[, P_{n+1}(x) = [1-2(n+1)x]P_n(x) - n(n+1)x^2 P_{n-1}(x)}$$

(c) En liant les deux relations connues sur la famille de polynômes (P_n) :

$$P_{n+1} = X^2 P_n' + (1-2(n+1)X)P_n = [1-2(n+1)X]P_n(x) - n(n+1)X^2 P_{n-1}(X)$$

Remarques !
On peut ≪ identifier ≫x et X. x est normalement une variable réelle et X le formalisme de la multiplication.
En fait le polynôme en X possède une infinité de racines : tous les $x \in \mathbb{R}_+$, cela signifie donc que le polynôme est identiquement nul et que l'on peut écrire la relation au niveau du polynôme (en X).

$$\boxed{\forall\ x \in]0,+\infty[, P_n'(x) = -n(n+1)P_{n-1}(x) \text{ ou encore } P_n'(X) = -n(n+1)P_{n-1}(X)}$$

Remarques !
Cela permet de vérifier les calculs fait précédemment :
Ainsi $P_3 = 1 - 12X + 36X^2 - 24X^3$, *donc* $P_3'(X) = -12 + 72X - 72X^2 = -12(1-6X+6X^2) = -12P_2$
et $P_4 = 1 - 20X + 120X^2 - 240X^3 + 120X^4$ *donc* $P_4'(X) = -20 + 240X - 720X^2 + 480X^3 = -20P_3$

4. Etude des racines du polynôme P_n.
On notera $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction polynomiale associée au polynôme P_n.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$. Soit $x > 0$
Supposons que $p_n(x) = p_{n-1}(x) = 0$.
Comme $p_n(x) = [1 - 2nx]p_{n-1}(x) - n(n-1)x^2 p_{n-2}(x)$, et $x \neq 0$: $p_{n-2}(x) = 0$.
Et ainsi, par récurrence rétrograde (ou raisonnement par l'absurde...) $p_0(x) = 0$.
Or $p_0 = 1$. Ce qui est impossible.

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* \text{ et tout } x > 0,\ p_n(x) \neq 0 \text{ ou } p_{n-1}(x) \neq 0}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$ tel que $p_n(x) = 0$.
Alors $p_{n-1}(x) \neq 0$ d'après la question précédente. Puis $p_n'(x) = -n(n+1)p_{n-1}(x) \neq 0$.
On a donc au voisinage de x, l'équivalent :

$$p_n(x+h) \underset{h \to 0}{\sim} p_n'(x) \times h$$

Et donc $p_n(x+h)$ change de signe pour $h < 0$ ou $h > 0$.

$$\boxed{\text{Ainsi pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in]0, +\infty[, \text{ si } p_n(x) = 0, \text{ alors } p_n'(x) \neq 0 \text{ et } p_n \text{ change de signe en } x.}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction polynomiale p_n a au plus un nombre fini de points d'annulation sur $]0, +\infty[$.
Notons k ce nombre et plaçons-nous dans le cas où $k \geqslant 2$; notons $x_1 < ... < x_k$ ces points d'annulation.

i. $p_n(0) = 1$, donc comme p_n change de signe à chaque annulation (en notant $x_0 = 0$) :

$$\boxed{\forall\ i \in \mathbb{N}, p_n \text{ est du signe de } (-1)^i \text{ sur l'intervalle }]x_i, x_{i+1}[}$$

ii. La suite $(p_n'(x_i))_i$ change de signe pour chaque i. Il suffit donc de se contenter de l'etude en un point.
On se concentre en x_1. p_n est positive sur $[x_0, x_1[$, s'annule en x_1, donc est décroissante en x_1.
Par conséquent : $p_n'(x_1) < 0$, donc du signe de $(-1)^1$.

$$\boxed{p_n'(x_i) \text{ est du signe de } (-1)^i.}$$

iii. On a vu que $p_{n+1}(x) = [1 - 2(n+1)x]p_n(x) - n(n+1)x^2 p_{n-1}(x)$ et $p_n'(X) = -n(n+1)p_{n-1}(x)$.
donc $p_{n+1}(x_i) = 0 + x_i^2 p_n'(x_i)$ car $p_n(x_i) = 0$

$$\boxed{\text{En chacun des } x_i,\ p_{n+1} \text{ est du signe de } (-1)^i.}$$

iv. On a l'équivalent : $p_{n+1}(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} (-1)^{n+1}(n+2)!x^{n+1} \longrightarrow (-1)^{n+1}\infty$

$$\boxed{p_{n+1}(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} (-1)^{n+1}\infty}$$

v. Supposons ici $k = n$.
Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. Comme $p_{n+1}(x_i)$ et $p_{n+1}(x_{i+1})$ sont de signe contraire,
d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists\ y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $p_{n+1}(y_i) = 0$.
De même $p_{n+1}(0) = 1$ et $p_{n+1}(x_1)$ est du signe de $(-1)^1 = -1$.
On peut appliquer le TVI sur $]0, x_1[$, ce qui donne une nouvelle racine y_0.
Enfin, $p_{n+1}(x_n)$ est du signe de $(-1)^n$ alors que celui de $\lim\limits_{+\infty} p_{n+1}$ est celui de $(-1)^{n+1}$.
au voisinage de $+\infty$, il existe a tel que $p_{n+1}(a)$ est du signe de $(-1)^{n+1}$.
Donc, en appliquant le TVI, on trouve une nouvelle racine de p_{n+1} au dela de x_n.

$$\boxed{\text{On a donc trouvé (au moins) } n+1 \text{ points d'annulation de la fonction } p_{n+1}}$$

(d) P_0 admet 0 racine et $P_1 = 1 - 2X$ admet une racine dans $]0, +\infty[$ ($x_1 = \frac{1}{2}$).
Supposons que P_n admet au moins n racines dans $]0, +\infty[$.
On se trouve dans le cas précédent avec $k = n$ et donc : p_{n+1} admet $n+1$ racines.
On a ainsi démontré par récurrence :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ le polynôme } P_n \text{ possède au moins } n \text{ racines dans }]0, +\infty[.}$$

Un polynôme de degré n possède au plus n racines. On peut donc affirmer que

$$\boxed{P_n \text{ possède exactement } n \text{ racines dans }]0, +\infty[}$$