Première partie

Techniques mathématiques,
à travers l'histoire

Chapitre 1

Calculs polynomiaux

Résumé -

Nous commençons l'année en revisitant l'histoire de la résolution des équations polynomiales. On donne/rapelle ainsi quelques bases essentielles pour la suite : existe-t-il un moyen pour résoudre toute équation polynomiale, on verra que l'important est de pouvoir factoriser; que nous dit la géométrie des équations polynomiales; que nous dit l'analyse pour une résolution (approchée) d'une équation polynomiale.
Ce sera l'occasion de mettre en place quelques définitions et de nombreux savoir-faire. Comme chaque chapitre, celui-ci commence par des problèmes ouverts.

Enfin, voici une liste de petites vidéo ou conférence visionnable sur internet et en lien avec le sujet. A visionner à loisir :
- *Mathieu Bautista - L'histoire du x. https ://www.youtube.com/watch ?v=AW7uNg9RLCs*
- *MicMath - Conique à la plage. https ://www.youtube.com/watch ?v=eFPhYYKCyFc*
- *El Jj - Différence équations et fonctions. https ://www.youtube.com/watch ?v=sJKjFgtIBKY*

Sommaire

1. Quelques problèmes

1.1. Problèmes

? Problème 1 - Kwarizmi

Résoudre, comme El Kwarizmi, l'équation $x^2+10x=39$ en n'exploitant que des méthodes géométriques (calcul d'aire, nombres positifs...).
On commence par considérer un carré de côté x et deux rectangles de côtés x et 5. On complète...
Adapter la méthode pour résoudre $x^2+21=10x$.
Que pensez-vous de la nature des nombres a, b ou c si l'on souhaite générer la méthode pour résoudre l'équation associée au trinôme du second degré : $ax^2+bx+c=0$

? Problème 2 - Mauvais vers italiens

« *Tartalea exposa sa solution en mauvais vers italiens* » (Lagrange, Oeuvres, 1795).
Il existe une méthode (Tartglia-Cardan) pour résoudre les équations de degré 3 (voir cours). Comment pouvait-on l'écrire alors qu'il n'existait ni le symbole =, ni les notations x^2...?

? Problème 3 - Tartaglia et Cardan

Trouver toutes les solutions de l'équation $x^3+6x=20$, avec la méthode de Tartaglia et Cardan, en posant $x=u-v$ et en exploitant les symétries du problème (on peut résoudre : $u^3-v^3=\dots$ et $u^3v^3=\dots$).
Et pour une équation de type $ax^3+px+q=0$?
De même donner les solutions de l'équations $x^4+px^2+1=0$.

? Problème 4 - Polynôme de degré 2 et représentation graphique

Représenter la courbe d'équation $y=ax^2+bx+c$.
On fera la différence entre $a>0$ et $a<0$. On notera en particulier les coordonnées du sommet

? Problème 5 - Chercher à côté...

Si on sait que $f(x_0)=0,001$, quelle stratégie mettre en place pour trouver une racine de f ? On peut chercher du côté de x_0, pas très loin...

? Problème 6 - Formule de Taylor et développement limité

Soit $f: x\mapsto a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$, une fonction polynomiale de degré n.
Pour tout $k\in\mathbb{N}$, exprimer $f^{(k)}(0)$ en fonction des nombres (a_i) qui définissent la fonction polynomiale.
$f^{(k)}(0)$ est la valeur en 0 de la k^e dérivée de la fonction f.

1.2. Vocabulaires et contextes

Principe : On appelle équation, une relation calculatoire avec des objets inconnues i.e. à expliciter, définies à partir de cette (ces) relation(s) calculatoire(s).

Définition - Résoudre une équation
Soit E un ensemble (souvent $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^p$..., mais pas uniquement).
Soit une application $f : E \to \mathbb{C}$ et $b \in F(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ ou autre).
On dit qu'on résout l'équation $f(x) = b$, d'inconnue $x \in E$, lorsqu'on trouve tous les « nombres » $x \in E$ tel que $f(x) = b$.

On parle d'antécédent de b par f

Remarque - Il n'existe qu'une méthode infaillible pour résoudre une équation : Faire l'essai.
Soit $x_0 \in E$. Alors (calcul) : $f(x_0) = \ldots$.
Si la réponse est b, on a trouvé une solution. Sinon, on essaye à nouveau.
Mais cela est souvent long, surtout si l'ensemble E est infini...
Autre question : pourquoi se concentrer (uniquement?) sur des équations polynomiales?

Pour aller plus loin - Des tortues à l'infini
Les mots application (ou fonction), $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$... *seront définis (légalisés) plus tard dans l'année ou plus loin dans le polycopié.*

2. Equation polynomiale. Algèbre et géométrie

La motivation historiquement première est la motivation ludique. La plupart des résultats ici a été obtenu dans le cadre de joutes mathématiques, de défis si l'on préfère.
Les révolutions successives qui marquent la mathématiques européennes consistent souvent en l'installation de nouvelles notations. Cela crée des ponts!

2.1. Révolution 1 : Viète

Algebra Nova

Heuristique - Généraliser avec des lettres
François Viète a l'idée fondamentale d'écrire des lettres $A, B, C, \ldots X$ pour les inconnues et les données d'un problème (ie. les connus!) et de faire les calculs algébriques. Dès lors, aucun problème des anciens Grecs ne semble résister au schéma :

$$\text{Problème géométrique} \xrightarrow{\text{mêmes lettres}} \text{Problème algèbrique} \xrightarrow{\text{calculs}} \text{Solution}$$

et Viète écrit en majuscules : *« NVLLVM NON PROBLEMA SOLVERE »*.

Histoire - Algèbre spécieuse
Montucla *dans* Histoire des mathématiques *:*
« Il est peu de mathématiciens à qui l'algèbre doive plus qu'à cet homme célèbre... On doit d'abord à M. Viète d'avoir établi l'usage des lettres pour désigner, non seulement les quantités inconnues, mais même celles qui sont connues, ce qui fit donne à son algèbre le nom de spécieuse, nom qu'elle a gardé longtemps, à cause que tout y est représenté par des symboles...
C'est nous osons le dire à ce changement que l'algèbre est redevable d'une grande partie de ces progrès. »
Comment énoncer aisément la règle du discriminant sans les lettres a, b et c ?

Saut historique et définition

Définition - Polynôme de plusieurs variables
On appelle fonction polynomiale de p variables (abrégé ici en « polynôme de p variables ») une fonction de la forme :

$$f_p : (x_1, x_2, \ldots x_p) \mapsto \sum_{(k_1,\ldots k_p) \in \mathbb{N}^p} a_{k_1,k_2,\ldots k_p} \prod_{i=1}^{p} x_i^{k_i}$$

la somme étant finie (nombre de termes est fini) où $\forall\ (k_1, \ldots k_p) \in \mathbb{N}^p$, $a_{k_1,k_2,\ldots k_p} \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) ;
Il s'agit d'une combinaison linéaire finie de puissances entières des inconnues réelles (ou complexes) $x_1, \ldots x_p$.
La somme et le produit de deux fonctions polynomiale est une fonction polynomiale.

On appelle degré de f_p, le nombre $\max\{k_1+k_2+\cdots+k_p \mid a_{k_1,k_2,\dots k_p}\neq 0\}$. Si f n'a qu'une variable, $\deg(f)=\max\{n\in\mathbb{N}, telquea_n\neq 0\}$.

Exemple - $f:(x,y,z)\mapsto 3x^2y-2xyz-xz^2$

Histoire - François Viète

François Viète (1540-1603), n'est pas un mathématicien professionnel, mais un avocat. Néanmoins, il sera le représentant français des joutes mathématiques (cryptanalyse) avec les italiens ou les anglais. Il est célèbre pour son algèbre nouvelle où il est le premier à exploiter les lettres pour décrire les nombres dans des équations. Ce point de vue est révolutionnaire !

2.2. Révolution 2 : Descartes

Heuristique - Algèbre et géométrie

La motivation est ici GEOMETRIQUE. Une nouvelle façon de concevoir le problème est de maintenant lui donné un sens géométrique et en particulier de donner à $\mathbb{R}$ le sens du continu (comme une droite) et à $f(\mathbb{R})$ une déformation continue de $\mathbb{R}$.

Représentation graphique

En mathématique, l'apport principal de Descartes a consisté à donner une vision géométrique à l'algèbre et une approche calculatoire à la géométrie (de l'ordre de la précision du langage). C'est une véritable révolution.
Ce qui suit reste vrai même si H n'est pas poiynomiale.

Pour aller plus loin - Notations

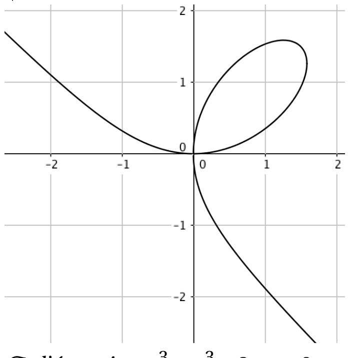
Les notations x^5... a été popularisé par Descartes (avant xxxxx).
Le symbole = a été popularisé par Leibniz (avant on écrit adeq).

Définition - Graphe dans $\mathbb{R}^2$
Soit $H:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.
On note $\Gamma_H=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid H(x,y)=0\}$, une sous-partie de $\mathbb{R}^2$.
On dit que $H(x,y)=0$ est une équation du graphe Γ.

Sans condition supplémentaire sur H, Γ peut être très variés.

Exemple - Folium de Descartes

Représentation - Folium



$\mathscr{F}$ d'équation $x^3+y^3-3xy=0$

Définition - Exemple. Graphe d'une fonction
Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, on appelle representation graphique de f (ou graphe de f), la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y=f(x)$

Dans ce cas $H:(x,y)\mapsto y-f(x)$. Une telle courbe ne peut « revenir en arrière ». En effet, cela signifierait qu'un nombre x_0 aurait deux images.

Représentation des fonctions polynomiales...

Heuristique - Réprésentation

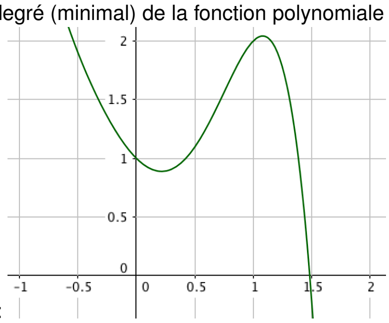
La représentation d'une fonction polynomiale $x\mapsto\sum_{k=0}^n a_kx^k$ est continue.
Cette fonction polynomiale est de degré n, donc admet au plus n racines (de l'équation polynomiale).
Par dérivation (que l'on expliquera plus loin), il y a également au plus n sens de variation différents...

Pour aller plus loin - Continuité

Nous reverrons plus loin la notion de continuité.
Vous pouvez déjà chercher à donner une définition formalisée...

Exercice
Donner l'exemple d'une fonction polynomiale de degré 4 n'ayant que deux sens de variations différentes

Exercice
Quel est le degré (minimal) de la fonction polynomiale dont la représentation graphique est donnée par :



Calculs algébriques et symétries géométriques

Proposition - Translation
La courbe Γ présente une invariance par translation de vecteur $\overrightarrow{u} = T\overrightarrow{i}$,
si et seulement si, on a l'équivalence : $H(x,y) = 0 \Longleftrightarrow H(x+2T,y) = 0$

Exemple - Graphe d'une fonction

Analyse - Symétrie axiale, centrale

Proposition - Symétrie axiale
La courbe Γ présente une symétrie axiale d'axe $x = x_0$,
si et seulement si, on a l'équivalence : $H(x,y) = 0 \Longleftrightarrow H(2x_0 - x, y) = 0$

Exemple - Graphe d'une fonction

Une symétrie centrale de centre $M_0(x_0, y_0)$ est la composition d'une symétrie d'axe $x = x_0$ et d'axe $y = y_0$.

Proposition - Symétrie centrale
La courbe Γ présente une symétrie centrale de centre $M(x_0, y_0)$,
si et seulement si, on a l'équivalence : $H(x,y) = 0 \Longleftrightarrow H(2x_0 - x, 2y_0 - y) = 0$

Exemple - Graphe d'une fonction

Une astuce pour le calcul

De manière générale, on ne démontre pas un résultat de calcul par une exploitation graphique, mais cela permet largement de vérifier une série de calculs.

Truc & Astuce pour le calcul - Transformer le résultat d'un calcul en une représentation visuelle

Depuis Descartes, l'algèbre et la géométrie sont totalement liés et il est possible de passer « du diable de l'algèbre à l'ange de la géométrie » (Hermann Weyl).
Il est donc important de savoir faire cette transformation : donner du sens géométrique à un calcul algébrique. On peut ainsi anticiper ou vérifier un résultat.

Exercice

Montrer que le système $\begin{cases} x^2+y^2+2x-2y &= 0 \\ x^2+y^2-4y+3 &= 0 \end{cases}$ admet exactement deux solutions.

Le changement de registre ici est une force si on sait bien l'employer, mais aussi un gros problème pour les élèves bloqués dans leur registre.

Truc & Astuce pour le calcul - Avec des fonctions

Le calcul sur les fonctions est à l'intersection du calcul algébrique, du calcul graphique, du calcul différentiel et intégrale, du calcul de limites...
Les problèmes où interviennent ces fonctions sont aussi très variés, et il n'est pas rare de voir des changements de registre, d'un domaine à l'autre dans une même problème! Il faut avoir un esprit bien souple...
C'est tout particulièrement le cas de l'étude des polynômes (où l'on bascule facilement d'un domaine à l'autre).

Exercice

Démontrer que le polynôme x^3+3x-1 admet une unique racine sur $\mathbb{R}$

3. Opérer avec des polynômes

3.1. Développer

L'opération inverse de la factorisation s'appelle le développement. C'est a priori plus simple car c'est une opération *mécanique*.
Mais il existe plusieurs façons de développer un produit polynomial. Certaines sont plus intelligentes que d'autres...

Exercice

Développer $(a+b+c)^3$

Exercice

On admet que $(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.
En organisant convenablement votre calcul $(a+b)^5$, trouver comment passer des coefficients (1,4,6,4,1) de $(a+b)^4$ à ceux de $(a+b)^5$.
Cela vous rappelle-t-il quelque chose ? En déduire la formule générale qui donne une expression de $(a+b)^n$.

Truc & Astuce pour le calcul - Anticipation

Il s'agit de ne plus être à chaque instant derrière son calcul, mais bien en avant!. Il s'agit bien là aussi de voir quelque chose... Lorsque le calcul demandé est ouvert (on ne donne pas une forme fermée : montrer que $A = B$), il faut savoir vers où l'on va.
Par exemple, lorsqu'on dérive une fonction, ce qui nous intéresse souvent c'est de connaître son signe. Il faut donc donner une forme factorisée...

Exercice
On peut exprimer de 3 façons différentes $A = f(x) = (3x^2+8x-1)-(x^2+3x-4)$. Associer chacune de ces expressions à l'exploitation qu'on peut en faire.

$A = 2x^2+5x-3$	étude du minimum de f
$A = -6+3(x+1)+2(x+1)^2$	développement limité de f en -1
$A = 2\left(x+\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{49}{8}$	étude du signe de f
$A = (x+3)(2x-1)$	étude du polynôme f

Truc & Astuce pour le calcul - Reconnaissance de formes

En visualisant les formes dans les formules, il est plus aisé de garder en mémoire le calcul effectué (pour le retro-contrôle) et surtout, il est plus aisé de savoir dans quel ordre faire le calcul de manière à être efficace : ne pas se tromper et agir rapidement.

Exercice
Démontrer :
$4[(a^2-b^2)cd+(c^2-d^2)ab]^2+[(a^2-b^2)(c^2-d^2)-4abcd]^2 = (a^2+b^2)^2(c^2+d^2)^2$
On pourra y voir la forme $A = B^2 - C^2$...

Attention - Ne pas trop écrire

Pour apprendre à se projeter vers l'avant, il faut ne pas écrire trop de calculs intermédiaires. De nombreuses petites réécritures doivent être simplement pensées, sans être écrites.
Le prix à payer : une insécurité forte pour l'élève.
Le prix à gagner : une plus grande concentration et une meilleure vitesse d'exécution!
Deux ans avant les concours, il faut investir dans cette stratégie.

Truc & Astuce pour le calcul - Garder en mémoire « vive » le calcul

Si on garde en mémoire immédiate le calcul, il est possible de déceler les erreurs plusieurs lignes de calcul plus loin. On évite des erreurs bêtes, comme des signes + et − qui se mélangent, une page qui se tourne et qui conduit à des nombres qu'on oublie...
Pour apprendre à exploiter une mémoire globalisante du calcul, on peut essayer après chaque calcul à réécrire le résultat obtenu sur une page blanche. Evidemment, un tel résultat doit rester en mémoire immédiate, il n'est pas nécessaire de le placer en mémoire de travail plus profonde.

Exercice
Quel est le résultat obtenu lors du dernier calcul que vous avez effectué ?

3.2. Factoriser

Avec les petits Bernoullis

Analyse - $x^k - a^k$

Exercice

Comment rendre ce calcul rigoureux ?

Pour aller plus loin - Polynômes de Bernoulli

On appelle (ici en MPSI3) cette famille de polynômes, les « petits Bernoullis », pour ne pas les confondre.

Définition - Les petits Bernoullis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{K}$, on note $b_a^n : x \mapsto x^n + ax^{n-1} + \dots a^{n-1}x + a^n = \sum_{i=0}^{n} x^i a^{n-i}$.

On appelle cette famille de fonctions polynomiales $(b_a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, les petits Bernoullis.

On a alors :

$$\forall\, x \in \mathbb{K}, \qquad (x-a) \times b_a^n(x) = x^{n+1} - a^{n+1}$$

Il faut faire une démonstration. On exploite le résultat sur les sommes des termes consécutifs d'une suite géométrique, vu en terminale.

Démonstration

Exercice

En notant que $b_a^{n+1} = ab_a^n + x^{n+1}$ (à démontrer), montrer par récurrence la factorisation de Bernoulli

Grâce à une racine

On a les corollaires important suivant :

Proposition - Factorisation (1)

Soit f une fonction polynomiale de degré n.

Pour tout $a \in \mathbb{K}$, il existe g_a, fonction polynomiale de degré $n-1$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{K}, \qquad f(x) - f(a) = (x-a)g_a(x)$$

Démonstration

Corollaire - Factorisation (2)
Soit f une application polynomiale sur $\mathbb{K}$(=$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de degré n.
Soit $x_0 \in \mathbb{K}$ tel que $f(x_0) = 0$.
Alors il existe g, application polynomiale de degré $n-1$ telle que

$$\underbrace{\text{pour tout } x \in \mathbb{K},}_{\forall\, x\in\mathbb{K}} \qquad f(x) = (x - x_0) \times g(x)$$

Savoir que g existe est une excellente chose.
Mais savoir comment obtenir g connaissant x_0 et f est encore mieux (sans développer tous les petits Bernoullis) !
On peut donc décrire un algorithme pour obtenir g :

Savoir faire - Factoriser
Notons $f : x \mapsto x^3 + 2x^2 - x - 2$.
Alors $f(1) = 1 + 2 - 1 - 2 = 0$. Donc $f(x) = (x-1) \times g(x)$.
Pour appliquer l'algorithme, on prend l'habitude d'écrire le plus à gauche le terme sur lequel on agit en premier (comme pour une division euclidienne entière), on écrit donc les polynômes dans le sens des puissances décroissantes :

$$\begin{array}{cccc|l}
x^3 & +2x^2 & -x & -2 & x-1 \\
\hline
 & (2+1)x^2 & & & 1x^2+3x+2 \\
 & & (-1+3)x & & \\
 & & & -2+2 &
\end{array}$$

Donc $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)(x^2 + 3x + 2)$.
On oublie jamais de **vérifier le calcul réciproque** s'il est beaucoup plus simple !

Pour aller plus loin - Division euclidienne
En fait on obtient ici un algorithme de division euclidienne. Mais uniquement par un polynôme de degré 1.
On reprendra cela plus tard.

<u>**Trouver toutes les racines**</u>

La factorisation permet de décomposer un problème en plusieurs sous-problèmes.

Proposition - Factorisation
Soient f et g deux fonctions polynomiales à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $x \in \mathbb{K}$.
$f(x) \times g(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$

Pour aller plus loin - Anneaux intègres
Un ensemble d'élément neutre 0 *pour une première loi + et vérifiant :*

$$a \times b = 0 \Longrightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0$$

est appelé ensemble intègre.
$\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *sont intègres. Ce n'est pas le cas de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour ce genre de proposition, on fait un raisonnement en deux temps (double implication) :

Démonstration

Exercice
Trouver toutes les racines réelles de l'équation $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Théorème - Factorisation multiple
Soit f une fonction polynomiale de degré n. Soit $p \leqslant n$
Si $x_1, x_2, \dots x_p$, p solutions différentes de l'équation $f(x) = 0$ (racines de f).
Alors il existe g_p, fonction polynomiale de degré $n - p$ tel que

$$\forall\ x \in \mathbb{K}, \qquad f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_p) \times g_p(x)$$

Démonstration

On arrive à un résultat énoncé par Descartes, mais pas vraiment démontré...

Corollaire - Nombre maximal de solution
Une équation polynomiale de degré n admet au plus n solutions différentes

Démonstration

Identification

Il n'existe qu'une seule fonction polynomiale nulle :

Proposition - Une seule fonction polynomiale nulle
Si $f : x \mapsto \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ est une fonction polynomiale nulle
alors pour tout $i \in \mathbb{N}$, $a_i = 0$.

Démonstration

Avec la même démonstration améliorée et adaptée à $f - g$, on trouve :

Proposition - Identification des coefficients
Soient f et g deux fonctions polynomiales et $E \subset \mathbb{C}$ tel que $\forall\, x \in E$, $f(x) = g(x)$.
Si $\text{card}(E) > \deg(f - g)$, alors $f = g$.
Plus précisément : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $[f - g]_k = 0$ donc $[f]_k = [g]_k$

Remarque - Essentiel
On aura noté que :
— $[p]_k$ est le coefficient du polynôme p devant le monôme x^k. C'est une application linéaire.
— L'addition, la multiplication et la composition de deux polynômes donnent toujours un polynôme.

3.3. Expliciter formellement les racines

Avec les notations de Viète, il est facile de donner toutes les racines (complexes) d'un polynôme de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, à condition de savoir calculer la racine carrée d'un nombre complexe (cas où $\Delta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$).

Proposition - Discriminant
On considère l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On note $\Delta = b^2 - 4ac$.
Si δ vérifie $\delta^2 = \Delta$, alors les racines de cette équation sont $\dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $\dfrac{-b-\delta}{2a}$

On commence par une petite remarque :
Remarque - Théorème de Viète
Soient $(S, P) \in \mathbb{C}^2$. Les solutions du système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 \times z_2 = P \end{cases}$$

sont exactement (à permutation près) les solutions de $x^2 - Sx + P = 0$.
En effet :

$$(x - z_1)(x - z_2) = x^2 - (z_1 + z_2)x + z_1 z_2 = x^2 - Sx + P$$

Démonstration

Remarque - Autres idées de démonstration?
Avec la forme canonique.
En réfléchissant sur la symétrie et la moyenne des racines... On ne démontre pas ces résultats qui datent du XVI siècle :

Proposition - Formule de Tartaglia-Cardan (1545)
Les solutions complexes z_k ($k \in \{0,1,2\}$) de l'équation du troisième degré $x^3+px+q=0$ où p et $q \in \mathbb{R}$ sont donnés par

$$z_k = u_k + v_k$$

avec $u_k = j^k \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q+\sqrt{\frac{-\Delta}{27}})}$, $v_k = j^{-k} \sqrt[3]{\frac{1}{2}(-q-\sqrt{\frac{-\Delta}{27}})}$
et où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $\Delta = -(4p^3+27q^2)$ est le discriminant de l'équation.
On peut vérifier que $\Delta = (z_0-z_1)^2(z_1-z_2)^2(z_2-z_0)^2$ et $3u_kv_k = -p$

Exercice
Faire la démonstration

Exemple - Racines de l'équation $x^3-2x=4$

Remarque - Degré 4
Il existe également une formule pour l'équation de degré 4. Vous la trouverez sans problème sur internet.
Vous y trouverez également l'histoire de la découverte des ces formules. C'est assez intéressant Nous ne démontrons pas :

Théorème - Ruffini-Abel (1824)
Pour tout entier $n \geqslant 5$, il n'existe pas de formule générale exprimant « par radicaux » les racines d'un polynôme quelconque de degré n.
C'est-à-dire de formule n'utilisant que les coefficients, la valeur 1, les quatre opérations et l'extraction des racines n-ièmes

Histoire - Niels Henrik Abel

Niels Henrik ABEL *(1802-1829) est un mathématicien norvégien génial, mort très jeune. Une météorite dans le ciel septentrional.*

4. Equation polynomiale et analyse

4.1. La meilleure méthode : l'essai/erreur

Heuristique - La meilleure solution
Si l'on veut résoudre un problème, dont on ne sait rien excepté ses réalisations pour certains réalisations des variables. Alors la solution naturelle consiste à faire des essais/erreurs.
Concrètement, pour résoudre $f=0$, on prend une première valeur pour x. On essaye $f(x_1)$.

Est-il égal à 0 ?
Si non, on essaye une autre valeur...

Est-il possible d'apprendre de nos essais/erreurs ?

4.2. Retro-contrôle

Une méthode classique en ingénierie (mais aussi en biologie) est d'exploiter le retro-contrôle ou une retro-action positive.

Truc & Astuce pour le calcul - Exploiter le retro-contrôle

Pour du calcul raisonné, il s'agit d'abord de réinjecter les résultats obtenus dans la formule initiale pour voir si le résultat est juste.
Mais si le résultat n'est pas juste, alors tout n'est pas perdu : il ne faut pas repartir de 0. Avec le calcul de vérification, il est parfois possible de voir où est l'erreur (erreur de signe, oublie d'un puissance...).
Et le second résultat ne doit pas être trop éloigné du premier résultat (plus grand si la fonction est croissante...).
Principe : on crée une suite (x_n) qui converge vers x, la vraie valeur que l'on cherche.
A chaque étape, on prend $x_{n+1} = x_n + y_n$, meilleure approximation de x que x_n,
et donc y_n est une suite telle que :

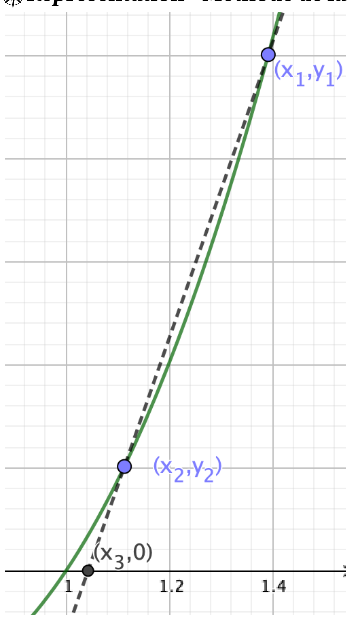
- y_n est beaucoup plus petit que x_n, donc négligeable face à x_n
- $(y_n) \to 0$
- pour $k \in N$, $k \geqslant 2$, y_n^k est toujours beaucoup plus petit que y_n, donc négligeable face à y_n^k.

Nous allons expliquer la méthode à partir d'un exercice. Exercice
On cherche à donner une valeur approchée de $\sqrt{8}$. Donner une valeur approchée (à deux chiffres), par rétro-contrôle

4.3. Méthode de la sécantes

Analyse - Principe

Représentation - Méthode de la sécante



Définition - Algorithme de la sécante
Considérons la fonction polynomiale $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
On considère deux nombres $a, b \in \mathbb{R}$, puis la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = a,\ u_1 = b\ \forall\ n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{u_{n+1} - u_n}{f(u_{n+1}) - f(u_n)} f(u_{n+1})$$

La suite ainsi définie suit l'algorithme de la sécante

Pour aller plus loin - Convergence
Nous verrons plus loin ce que signifie la convergence pour une suite.
Vous pouvez déjà chercher à donner une définition formalisée...

Sous certaines conditions, relativement robuste, la suite (u_n) converge vers une racine de f

4.4. Vers la dérivation. Méthode de la tangente

Analyse - Quand 0 s'invite

Heuristique - Toute forme indéterminée $\frac{0}{0}$...
... peut se voir comme un calcul de dérivée, avec la formule de L'HOSPITAL.

Rappelons ce qu'est un nombre dérivée :

Définition - Nombre dérivée
Soit f une fonction (polynomiale), on appelle dérivée de f en x_0, le nombre :

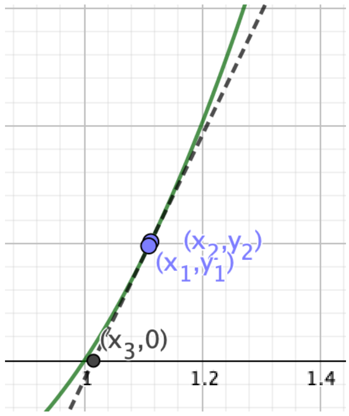
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

On note ce nombre $f'(x_0)$, selon la notation de Lagrange (1797).

Exemple - Monôme et polynôme. Dérivation

Analyse - Méthode de la tangente

Représentation - Méthode de la tangente (Newton)



On a l'aglorithme suivant qu'on associe à NEWTON, pour son utilisation en toute généralité :

Définition - Algorithme de la tangente
Considérons la fonction polynomiale $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.
On considère deux nombres $a \in \mathbb{R}$, puis la suite (u_n) définie par :

$$v_0 = a, : \forall\ n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n - \frac{1}{f'(v_n)} f(v_n)$$

La suite ainsi définie suit l'algorithme de la tangente

Sous certaines conditions, relativement robuste, la suite (v_n) converge vers une racine de f

Pour aller plus loin - Méthode de la Newton
En informatique, au second semestre, nous justifierons plus précisément l'algorithme de Newton. Nous donnerons des conditions de convergence.

5. Bilan

Synthèse

- En science, les problèmes se traduisent sous forme d'équations, souvent polynomiales. Ces fonctions polynomiales sont très présentes car elles sont stables par addition, multiplication et composition. La multiplication s'appelle développement. On développe avec intelligence !
- Le plus important pour résoudre une équation est de savoir factoriser. Le théorème de factorisation est très important : il permet de séparer les problèmes de résolution.
  Dans quelques rares cas (degré faible), il existe des formules explicites qui donnent les expressions des racines d'une fonction polynomiale.
- On peut aussi regarder les fonctions polynômiales comme des transformations géométriques de la droite réelle. Faire le lien : fonction polynomiale/représentation géométrique permet d'enrichir chacun des deux points de vue. On peut penser à l'exemple des coniques.
- Une autre idée est d'exploiter ce lien pour chercher les racines : localement une branche de courbe polynomiale ressemble à un segment de droite. Les algorithmes de la sécante ou de la tangente exploitent cette idée pour trouver une valeur approchée d'une racine d'une fonction polynomiale.

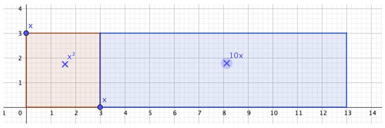
Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- Truc & Astuce pour le calcul - Anticipation
- Truc & Astuce pour le calcul - Reconnaissance de formes
- Truc & Astuce pour le calcul - Garder en mémoire « vive » le calcul
- Savoir-faire - Factoriser
- Truc & Astuce pour le calcul - Exploiter le retro-contrôle

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$b_a^n(x)$	Petit Bernoulli en a d'indice n	$\forall\, x \in \mathbb{K}\ b_a^n(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} x^i a^{n-i}$ (fonction polynomiale)	$x^{n+1} - a^{n+1} = (x-a) \times b_a^n(x)$

Retour sur les problèmes

1. 

2. Il faut transformer en phrase les opérations $\times$, $\sqrt{\cdot}\dots$
3. $x = u - v$, $x^3 = (u-v)^3 = u^3 - 3u^2 v + 3uv^2 - v^3$.
   On a donc : $x^3 + 6x - 20 = u^3 - v^3 - 3uv(u-v) + 6x - 20 = u^3 - v^3 + 3x(2 - uv) - 20$.
   Ajoutons la condition $uv = 2$, on a donc $u^3 - v^3 = 20$ et $u^3 v^3 = 8$.
   Ainsi, u^3 et $-v^3$ sont racines de $x^2 - Sx + P = x^2 - 20x - 8 = 0$.
   $\delta = 432$, puis $u^3 = 10 + \sqrt{108}$ et $v^3 = 10 - \sqrt{108}$.
   Et enfin, $x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} - \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$.
   Autre méthode : $x^3 + 6x = 20$? Par essai : $x = 2$ fonctionne.
   $$x^3 + 6x - 20 = (x-2)(x^2 + 2x + 10) = (x-2)(x+1-3i)(x+1+3i)$$
   Puis, on exploite la formule de Cardan et enfin on reconnait une bicarré :
   $$x^4 + px^2 + 1 = \left(x^2 - \frac{-p+\sqrt{p^2-4}}{2}\right)\left(x^2 - \frac{-p-\sqrt{p^2-4}}{2}\right)$$
   $$= \left(x - \sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2-4}}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{-p+\sqrt{p^2-4}}{2}}\right)\left(x - \sqrt{\frac{-p-\sqrt{p^2-4}}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\frac{-p-\sqrt{p^2-4}}{2}}\right)$$
4. Voir cours de terminale (ou de première)
5. C'est la méthode de la retro-action.
6. Par récurrence : $f^{(k)}(x) = \sum\limits_{i=k}^{n} i(i-1)\dots(i-k)a_i x^{i-k} = k! a_k + \frac{(k+1)!}{1!} a_{k+1} x + \cdots + \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}$.
   Et donc $f^{(k)}(0) = k! a_k$. Ainsi, $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$.