Chapitre 2

Calculs trigonométriques

Résumé -

Il s'agit, pour commencer, de revoir les propriétés des fonctions trigonométriques. Nous choisissons une présentation constructive, selon le sens de l'histoire et de la formation du lycéen. Nous nous appuyons sur les formules de base : $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ *et* $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ *pour développer toute la trigonométrie.*
Avec l'exponentielle complexe (chapitre 7), les formules seront revues plus efficacement.
Pour résoudre $f(x) = y$*, il faut pouvoir écrire* $x = f^{-1}(y)$*, i.e. trouver la fonction* f^{-1} *réciproque de* f*. On s'intéresse donc à la trigonométrie réciproque (*$\arcsin$*,* $\arccos$ *et* $\arctan$*)*
Vidéos :

— *Kitoumath. Les mathématiques fantastiques - Les formules de trigo à apprendre sans peine. https ://www.youtube.com/watch?v=lKj1zQpToxA*
— *Micmath - La conjugaison complexe est un automorphisme de corps. https ://www.youtube.com/watch?v=AVDMpnwsztg*
— *Les maths en finesse - Racines nieme de l'unité. https ://www.youtube.com/watch?v=aZLGdnktO8k*

Sommaire

1. Problèmes **22**
2. Fonctions trigonométriques **22**
2.1. Construction historique 22
2.2. Fonctions sinus et cosinus 23
2.3. Fonction tangente 25
3. Formules trigonométriques **25**
3.1. Formules de Regiomontanus 25
3.2. Produit en somme et réciproquement 27
3.3. Angle moitié 28
4. Trigonométrie réciproque **29**
4.1. Arcsinus 29
4.2. Arccosinus 30
4.3. Arctangente 31
5. Bilan **32**

1. Problèmes

Pour aller plus loin - Triangles semblables
On dit que deux triangles sont semblables si deux (et donc trois) angles sont de mêmes mesures

? Problème 7 - Fonctions définies sur des angles nulles et droits. Et plus loin ?

Pour tout angle θ, les triangles rectangles dont l'un des côtés vaut θ sont tous semblables.
Il y a donc un coefficient de proportionnel entre les mesures des côtés de ces triangles, qui dépend uniquement de θ. Prenons un triangle rectangle de référence d'hypothènuse égale à 1.
On note $\cos\theta$ la mesure du côté adjacent et $\sin\theta$ le côté opposé.
Que se passe-t-il si l'angle dépasse 90ř ?

? Problème 8 - Unité de mesure d'angles

Au début du lycée, on vous a fait changer l'unité de mesure des angles : des degrés à des radians ?
Pourquoi ? Qu'est-ce qu'on y gagne, pour chaque unité ?

? Problème 9 - Relation entre les formules de trigonométrie

Quelles relations entre $\cos(a+b)$ et $\cos a$, $\cos b$. Et d'autres ?
De même peut-on linéariser $\cos(a)\sin(b)$ (c'est-à-dire, l'écrire sous forme d'une somme !).
Beaucoup de formules !
Une autre question, non négligeable : comment apprendre toutes ces formules ?

Histoire - Claude Ptolémé
Ptolémée (Ptolémaïs de Thébaïde (Haute-Égypte) vers 90 - Canope vers 168) est un astronome et astrologue grec qui vécut à Alexandrie (Égypte).

Il est connu pour ses apports en géographie et en mathématique (géométrie et trigonométrie).
Même s'il n'exploitait pas les fonctions cos et sin mais plutôt la fonction corde (cord), il donna le premier élan (après Hipparque ?) à la trigonométrique que nous connaissons. Ces travaux ont été repris par les mathématiques indiennes (III à VI siècle) puis les mathématiques arabes (VIII à XIII siècle)

? Problème 10 - Equation polynomiale et trigonométrie

Montrer que pour tout entier n, et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$\cos(n\theta)$ s'exprimer comme une fonction polynomiale en $\cos\theta$.
Ce polynôme s'appelle le polynôme de Tchebychev d'ordre n.

? Problème 11 - Fonction réciproque

Si souvent, nous aurons besoin d'inverser les relations $\sin\theta = x$ en $\theta = \sin^{-1}(x)$.
Mais, sin ou cos ne sont pas des fonctions bijectives. Comment faire ?

2. Fonctions trigonométriques

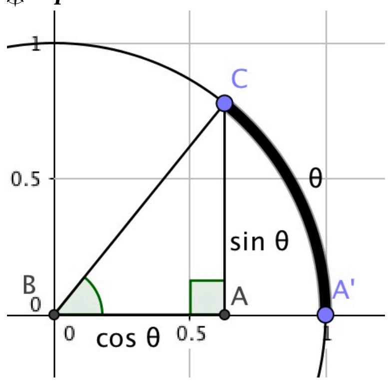
2.1. Construction historique

Analyse - Triangles rectangles semblables

Analyse - Simplification : hypoténuse égale à 1

Analyse - Mesure naturelle d'angle

Représentation - Radian



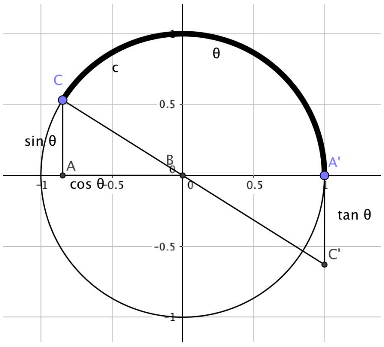
2.2. Fonctions sinus et cosinus

Représentation

D'après ce que l'on a vu, par construction, on retrouve $\cos\theta$ et $\sin\theta$ sur la figure comme indiqué en marge.
Par définition : $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\tan\theta}{1}$.
Donc, par théorème de Thalès, en plaçant la parallèle au sinus dans le triangle prolongé tel que $BA' = 1$, on retrouve le sinus en $A'C'$.

Reste une dernière étape : franchir les angles frontières de 0 et $\frac{\pi}{2}$ radians (ou 0° et 90°). Avec la dernière représentation, ce n'est pas compliqué : on continue la projection sur l'axe BA' et sur l'axe orthogonal.

Représentation - Cercle trigonométrique



Périodicité et symétrie

On a alors les résultats suivants, qu'il faut surtout savoir retrouver :

Exercice

Compléter les résultats suivants :

$\sin(-\theta) =$ $\cos(-\theta) =$ $\sin(\theta+\pi) =$ $\cos(\theta+\pi) =$

$\sin(\pi-\theta) =$ $\cos(\pi-\theta) =$ $\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) =$ $\cos(\frac{\pi}{2}-\theta) =$

Avec la définition suivante :

Définition - Congruence modulo α
Soient θ, θ' et α trois réels.
On dit que θ est congru à θ' modulo α
s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \theta' + k\alpha$:

$$\theta \equiv \theta'[\alpha] \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \,|\, \theta = \theta' + k\alpha$$

on a la proposition :

Proposition - Propriétés des congruences
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a pour tout $(\theta, \theta', \theta'') \in \mathbb{R}^3$:

- $\theta \equiv \theta[\alpha]$ (reflexivité)
- $\theta \equiv \theta'[\alpha] \Rightarrow \theta' \equiv \theta[\alpha]$ (symétrie)
- $(\theta \equiv \theta'[\alpha]$ et $\theta' \equiv \theta''[\alpha]) \Rightarrow \theta \equiv \theta''[\alpha]$ (transitivité)

On dit que la relation de congruence modulo α est une relation d'équivalence.

Démonstration

A savoir parfaitement retrouver :

Savoir faire - Cas d'égalité de sinus ou de cosinus
Pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\sin\theta = \sin\theta' \Longleftrightarrow$$

$$\cos\theta = \cos\theta' \Longleftrightarrow$$

Démonstration

2.3. Fonction tangente

Définition - Tangente d'un angle
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. On appelle tangente de θ le réel, noté $\tan\theta$, défini par :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

Remarque - fonction cotangente
On définit de même la fonction cotangente sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ par $\text{cotan}\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$.
Sur le cercle trigonométrique, on la trouve sur la tangente au cercle au point $(0,1)$.
Si $\theta \not\equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right]$ on a $\text{cotan}\theta = \frac{1}{\tan\theta}$.

Proposition - (Im)parité et périodicité
Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \not\equiv \frac{\pi}{2}[\pi]$. On a

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \tan(\pi+\theta) = \tan\theta \qquad \tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$$

Démonstration

Exercice
Etudier et représenter la fonction tan

Proposition - Cas d'égalité de tangentes
Pour tout $(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$\tan\theta = \tan\theta' \Leftrightarrow \theta \equiv \theta'[\pi]$$

3. Formules trigonométriques

Nous démontrons la plupart des relations avec des angles inférieurs à $\frac{\pi}{2}$, puis nous étendons les résultats par périodicité/symétrie.

3.1. Formules de Regiomontanus

Très important! A connaître par coeur, absolument! Il peut être bon d'avoir un moyen mnémotechnique auprès de soi...

Proposition - Formules fondamentales

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \qquad 1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} \text{ où } \cos^2\theta = (\cos\theta)^2$$

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b \qquad \cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a\sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a \qquad \sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$$

Histoire - Trigonométrie : une vieille discipline
Ces formules apparaissent pour la première fois chez Ptolémée, 150 après J-C. On les retrouve chez Regiomontanus en 1464

Truc & Astuce pour le calcul - Exploiter les symétries du calcul

Une piste pour retrouver la formule $\cos(a+b)$.

Nous savons qu'il existe une relation, mais laquelle. Notons $\varphi(a,b) = \cos(a+b)$.

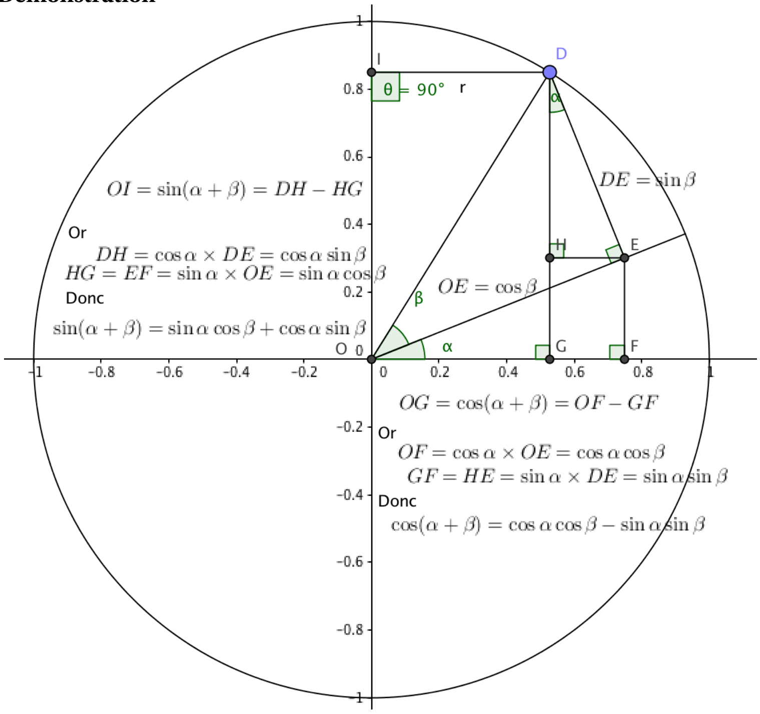
La relation doit vérifier :

— $\varphi(b,a) = \varphi(a,b)$, cela ne peut donc pas être $\varphi(a,b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

— $\varphi(-a,-b) = \varphi(a,b)$, cela ne peut donc pas être $\varphi(a,b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.

— $\varphi(a,-a) = \cos(0) = 1$, cela ne peut donc pas être $\varphi(a,b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, dans ce cas $\varphi(a,-a) = \cos^2 a - \sin^2 a \neq 1$ (pour la plupart des a)

Démonstration



Exercice

On peut aussi exploiter les équations différentielles.

On note $f : x \mapsto \cos(a+x)$. Montrer que f est solution du problème de Cauchy :
$$\begin{cases} y'' + y &= 0 \\ y(0) &= \cos a \\ y'(0) &= -\sin(a) \end{cases}.$$
En déduire une expression de f.

De cet exercice, on déduit un nouveau moyen mnemotechnique pour retenir les formules de Regiomontanus.

Truc & Astuce pour le calcul - Combinaison linéaire en $\cos x$ et $\sin x$

$x \mapsto \cos(a+x)$ est une fonction, combinaison linéaire de $\cos x$ et $\sin x$.

Il existe A, B **indépendant de** x tel que $\cos(a+x) = A\cos x + B\sin x$.

En particulier pour $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$: $\cos a = A\times 1 + B\times 0$ et $\cos(a+\frac{\pi}{2}) = -\sin a = A\times 0 + B\times 1$.

Donc pour tout $a, x \in \mathbb{R}$: $\cos(a+x) = \cos a\cos x - \sin a\sin x$.

$x \mapsto \sin(a+x)$ est une fonction, combinaison linéaire de $\cos x$ et $\sin x$.

Il existe C, D **indépendant de** x tel que $\sin(a+x) = C\cos x + D\sin x$.

En particulier pour $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$: $\sin a = C\times 1 + D\times 0$ et $\sin(a+\frac{\pi}{2}) = +\cos a = C\times 0 + D\times 1$.

Donc pour tout $a, x \in \mathbb{R}$: $\sin(a+x) = \sin a\cos x + \cos a\sin x$.

Savoir les déduire ou les retrouver.

Proposition - Formules fondamentales (bis)

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1-\tan a\tan b} \qquad \tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1+\tan a\tan b}$$

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a \qquad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2} \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

Exercice

Démontrer ces formules

3.2. Produit en somme et réciproquement

Savoir les déduire ou les retrouver.

Proposition - Transformation de produit en somme

$$\cos a\cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a+b) + \cos(a-b)\big)$$

$$\sin a\sin b = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$$

$$\sin a\cos b = \frac{1}{2}\big(\sin(a+b) + \sin(a-b)\big)$$

Exercice

Comment exploiter les symétries du calcul pour « deviner » les égalités

Exercice

Démontrer ces formules

Exercice

Comment exploiter les symétries du calcul pour « deviner » les égalités

Remarque - Notation exponentielle

Avec les notations exponentielles, le résultats sera plus immédiat (on pourra le trouver dans le sens direct).

Pour aller plus loin - Trisection de l'angle

Un problème antique consistait à trouver comment couper un angle en trois parts égales.

La réponse de Viète (1593 - incomplète car elle ne donne pas de construction), consiste à remarquer que $\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$.

Si on connait 3α et donc $\sin 3\alpha = S$. Il s'agit de résoudre : $4x^3 - 3x + S = 0$.

Or la formule d'Al-Khwarismi donne pour solution à cette équation :

$$x = \sqrt[3]{-\frac{S}{8} + \sqrt{-\frac{S^2}{64} - \frac{1}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{S}{8} - \sqrt{-\frac{S^2}{64} - \frac{1}{4}}}$$

Proposition - Transformation de somme en produit

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Exercice

Démontrer ces formules

Attention - Remarque

Il n'y a pas de formule générale pour transformer $\cos p \pm \sin q$.
Sauf à exploiter $\sin q = \cos(\frac{\pi}{2} - q)\dots$

Exemple - Calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos kt$

3.3. Angle moitié

Proposition - Utilisation de la tangente de l'angle moitié

On note $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$. Alors :

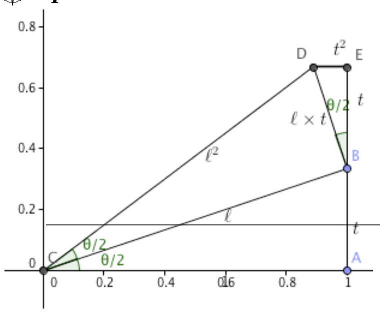
$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$$

Remarque - Calcul intégral

Ces résultats servent souvent dans le calcul d'intégrale avec des fonctions trigonométriques

Démonstration

Représentation - Formules d'addition



Remarque - Trucs pour ne pas écrire de bêtises...
On peut vérifier que si $\theta = 0$: $t = 0$, $\sin\theta = 0$,
mais aussi $\cos\theta = 1$ et $\sin^2 + \cos^2 = 1$,
ou encore, si $\theta = \frac{\pi}{2}$, $t = 1$ et $\tan\theta = \infty$..., donc le dénominateur de tan s'annule en 1 et -1.
ou toujours, $\tan = \frac{\sin}{\cos}$...

Exercice
Exemple d'emploi des notations exponentielles.
Notons α l'argument du complexe $z = 1 + it$.
Calculer z^2, quel est l'argument du complexe z^2 ? En déduire les relations recherchées ?
Sauriez-vous en déduire l'expression de $\cos\theta$ en fonction de $r = \tan\frac{\theta}{3}$?

Savoir faire - Méthode pour transformer $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t-\phi)$
On écrit

$$a\cos t + b\sin t = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\right)$$

Comme $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, il existe $\phi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\cos\phi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin\phi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

d'où en posant $A = \sqrt{a^2+b^2}$, on a

$$a\cos t + b\sin t = A\left(\cos\phi\cos t + \sin\phi\sin t\right) = A\cos(t-\phi).$$

La fonction $s : t \longmapsto a\cos t + b\sin t$ représente donc un signal sinusoïdal d'amplitude A de phase initiale $-\phi$(instant $t = 0$) .

Exercice
Factoriser $\sin\theta + \cos\theta$, $\sqrt{3}\cos x - \sin x$.

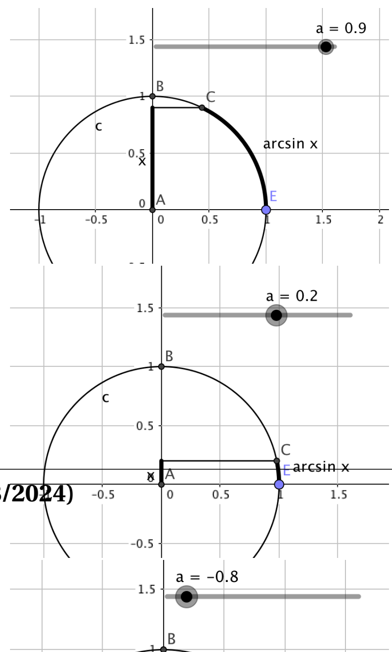
4. Trigonométrie réciproque

4.1. Arcsinus

Définition - Arcsinus
Pour tout $x \in [-1,1]$ il existe un unique $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ vérifiant $x = \sin\theta$. Ce réel θ est appelé arcsinus de x et noté $\arcsin x$ On a donc :

$$\theta = \arcsin x \Leftrightarrow \left(\sin\theta = x \text{ et } \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right)$$

***Représentation - Quelques valeurs de** $\arcsin x$*



Attention - Intervalle d'arrivée
De même qu'il a été choisi de prendre l'unique racine positive de a, lorsqu'on écrit $\sqrt{a}$ (et non $-\sqrt{a}$ qui vérifie également $(-\sqrt{a})^2 = a$) ; on choisit ici un résultat dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, il faut donc penser à ajouter un angle...

$$\sin\theta = x \Longleftrightarrow \theta \equiv \arcsin(x)[2\pi] \text{ ou } \theta \equiv \pi - \arcsin(x)[2\pi]$$

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$					

Exercice

Calculer $\arcsin(\sin\frac{2\pi}{3}), \arcsin(\sin\frac{23\pi}{6})$.

Histoire - Série $\arcsin$

On trouve chez W*ALLIS et les mathématiciens anglais pré-newtonien :*

$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\times3}{2\times4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}\frac{x^7}{7} + \dots$

Proposition - Composition de fonctions trigonométriques et $\arcsin$

On a :

$$\forall\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}],\quad \arcsin(\sin\theta)=\theta$$

$$\forall x\in[-1,1],\quad \sin(\arcsin x)=x$$

$$\forall x\in[-1,1],\quad \cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$$

Démonstration

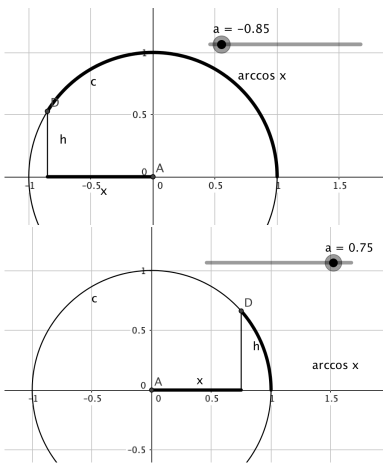
4.2. Arccosinus

Définition - Arccosinus

Pour tout $x\in[-1,1]$ il existe un unique $\theta\in[0,\pi]$ vérifiant $x=\cos\theta$. Ce réel θ est appelé arccosinus de x et noté $\arccos x$ On a donc :

$$\theta=\arccos x \Leftrightarrow \left(\cos\theta = x \text{ et } \theta\in[0,\pi]\right)$$

Représentation - Quelques valeurs de $\arccos x$



Attention - Intervalle d'arrivée

Comme précédemment :

$$\cos\theta = x \Longleftrightarrow \theta\equiv\arccos(x)[2\pi] \text{ ou } \theta\equiv-\arccos(x)[2\pi]$$

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$					

Exercice

Calculer $\arccos(\cos\frac{4\pi}{3}), \arccos(\cos\frac{25\pi}{6})$.

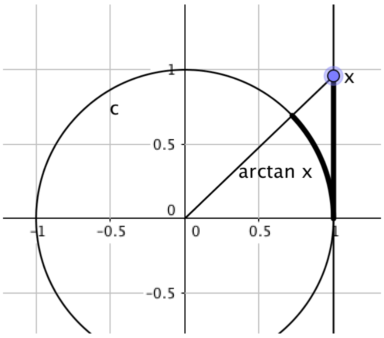
Proposition - Composition de fonctions trigonométriques et $\arccos$
On a :
$$\forall \theta \in [0,\pi], \quad \arccos(\cos\theta) = \theta$$
$$\forall x \in [-1,1], \quad \cos(\arccos x) = x$$
$$\forall x \in [-1,1], \quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

Exercice
Faire la démonstration

4.3. Arctangente

Définition - Arctangente
Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique $\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ vérifiant $x = \tan\theta$. Ce réel θ est appelé arctangente de x et noté $\arctan x$ On a donc :
$$\theta = \arctan x \Leftrightarrow \left(\tan\theta = x \text{ et } \theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\right)$$

Représentation - Quelques valeurs de $\arctan x$



Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$				

Proposition - Composition de fonctions trigonométriques et $\arctan$
On a :
$$\forall \theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, \quad \arctan(\tan\theta) = \theta$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \tan(\arctan x) = x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Histoire - Série $\arctan$
On trouve chez GREGORY *et les mathématiciens anglais pré-newtonien :*
$\arcsin(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$.
Puis, avec, une formule d'approximation de π *:*
$\pi = 16\arctan\frac{1}{5} - 4\arctan\frac{1}{239}$.

Démonstration

Proposition - Relation complexe
Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\arg(1+ix) = \arctan(x)$

Démonstration

Pour aller plus loin - Formule d'approximation de π ***: Formule de Machin (1706)***
$4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \cdots = \arg\left((1+\frac{i}{5})^4(1-\frac{i}{239})\right) = \arg(\frac{114244}{149375}(1+i)) = \frac{\pi}{4}$.
Comme $\arctan(x) \approx x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{8}x^5 + \ldots$, *on trouve une excellente approximation de* π.
Cette formule donna la meilleure approximation de π *connue durant tout le XVIII ième siècle.*

Remarque - Aspect analytique
On étudiera dans un prochain chapitre les aspects analytiques de ces fonctions (dérivées, développement limités...)

5. Bilan

Synthèse

- ⇝ En géométrie (et physique), nous pratiquons la projection orthogonale, cela consiste à multiplier par $\cos\theta$ (ou $\sin\theta$) la longueur de l'hypoténuse. Différents calculs se présentent à nous : $\cos(a+b)$, $\cos(a)\cos(b)$ ou $\cos a + \cos b$ (et tout ce que l'on peut imaginer de manière équivalente avec sin ou tan). Il existe alors de nombreuses relations calculatoires **à apprendre**!
- ⇝ Très souvent la question se pose de manière réciproque : étant donné une longueur de quel angle en est-elle le cos? Le problème, la fonction n'est pas injective : on peut avoir $\theta \neq \theta'$ et $\cos\theta = \cos\theta'$. On restreint donc l'intervalle image. On crée ainsi une fonction réciproque $\arccos$ à la fonction $\cos_{|[0,\pi]} : [0,\pi] \to [-1,1]$. De même pour les fonctions $\sin_{|[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ et $\tan_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$. Au passage, on trouve une méthode complémentaire (algébrique) dans le simple cas de la racine carrée d'un nombre complexe.

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- Savoir-faire - Cas d'égalité de sinus ou de cosinus
- Truc & Astuce pour le calcul - Exploiter les symétries du calcul
- Truc & Astuce pour le calcul - Combinaison linéaire en $\cos x$ et $\sin x$
- Savoir-faire - Méthode pour transformer $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t-\varphi)$

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
cos, sin, tan	Fonctions cosinus, sinus et tangentes.	Dans un triangle ABC rectangle en A, $\cos B = \frac{AB}{BC}$, $\sin B = \frac{AC}{BC}$ et $\tan B = \frac{AC}{AB} = \frac{\cos B}{\sin B}$	Tout un chapitre à connaître!
$\arccos$, $\arcsin$, $\arctan$	Fonctions réciproques de $\cos_{\mid[0,\pi]}$, $\sin_{\mid[-\pi/2,\pi/2]}$, $\tan_{\mid[-\pi/2,\pi/2]}$ respectivement.	$\cos(\arccos(x)) = x$ pour tout $x \in [-1,1]$	A savoir maîtriser

Retour sur les problèmes

7. Voir le cours
8. Les formules d'additions de cos et sin restent vraies si les angles sont en degré.
   Pourquoi changer d'unité au lycée?
   L'inégalité $\sin x \leqslant x \leqslant \tan x$ est vraie pour x en radian. Pour x en degré, on aurait plutôt : $\sin x \leqslant \frac{\pi}{180} x \leqslant \tan x$.
   On trouve alors, en radian : $\cos x \leqslant \dfrac{\sin x}{x} \leqslant 1$ en faisant $x \to 0$: on trouve $\sin'(x) = 1$, puis avec les formules d'addition : $\sin' = -\cos$.
   Si les angles sont en degré : il faut un coefficient multiplicatif. C'est donc une relation pénible.
   Bilan : si on passe en radian, c'est parce qu'on s'intéresse à propriétés analytiques des fonctions trigonométriques...
9. A apprendre. Mais l'apprendre, c'est toujours plus compliqué.
10. $\cos(n\theta) = \mathrm{Re}((e^{i\theta})^n) = \mathrm{Re}((\cos\theta + i\sin\theta)^n) = \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant \frac{n}{2}} \binom{n}{2k}(-1)^k \cos^{n-2k}\theta(1-\cos^2\theta)^k = T_n(\cos\theta)$
11. $\arcsin$ et $\arccos$...