Chapitre 3

Fonctions *à la Euler*

Résumé -

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux principales fonctions usuelles des mathématiques pré-eulerien (donc, jusqu'à la fonction Γ, exclue).
Nous reprenons les constructions historiques qui conduisent à ces fonctions, en espérant qu'ainsi, les propriétés caractéristiques de chacune seront mieux mémorisées.
Pour préparer le cours sur la dérivation des fonctions usuelles, nous donnerons une série d'inégalités localisées suffisantes pour calculer les dérivées.
Enfin, nous terminons ce chapitre en donnant une liste d'évaluations numériques des fonctions usuelles sous forme de somme infinies (convergentes). Nous en reparlerons (beaucoup) plus tard.

— *Kahn Académy - Qu'est-ce qu'une fonction exponentielle ?. https ://www.youtube.com/watch ?v=pBeGfLoId4I*
— *Micmath - Merveilleux logarithmes. https ://www.youtube.com/watch ?v=rWfl7Pw8YVE*

Sommaire

1. Problèmes

Histoire - Evolution de la notion de fonction

Pour Leibniz puis Euler, qui a été le premier à utiliser le mot de « fonction » et pour les mathématiciens du XVIII-ième siècle, l'idée de relation fonctionnelle était plus ou moins assimilée à l'existence d'une formule mathématique simple exprimant la nature exacte de cette relation. Cette conception s'est révélée trop étroite pour les exigences de la physique mathématique, et l'idée de fonction, ainsi que la notion de limite qui lui est associée, ont subi un long processus de clarification et de généralisation.

Par exemple : $x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ *n'est pas une fonction pour Euler; mais pour nous (et vous ?) c'est bien une fonction !*

? Problème 12 - Comment calculer π^e ?

Pour l'étude des fonctions usuelles, il est très important pour chacun d'être en mesure de savoir comment faire le calcul des valeurs, sans raccourci avec la calculatrice.
Il faudra néanmoins faire ces calculs pour les nombres rationnels (et pour les nombres réels, on verra plus loin...).
Les nombres π et e sont des nombres réels bien définis.
Comment faire ce calcul ? Les nombres réels sont approchés par des nombres rationnels.
On va donc commencer par essayer de calculer $\left(\frac{22}{7}\right)^{\frac{8}{3}}$, puis de manière générale de r^z où $r, z \in \mathbb{Q}$.
Deux temps d'analyse :

1. On fixe $z \in \mathbb{Q}$ et on étudie $t \mapsto t^z$, pour $t \in \mathbb{R}$. Ce sont les fonctions puissances.
2. On fixe $r \in \mathbb{Q}$ puis $r \in \mathbb{R}$ et on étudie $t \mapsto r^t$, pour $t \in \mathbb{R}$. Ce sont les fonctions exponentielles.

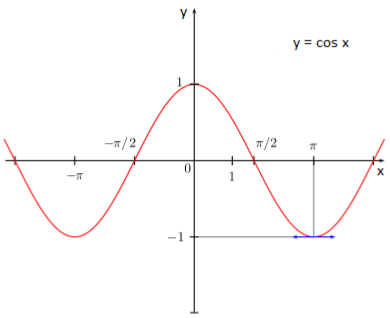
? Problème 13 - Interpolation de la suite géométrique

Existe-t-il une fonction simple (polynomiale) qui interpole la suite géométrique de raison r ($= 2$ par exemple) ?
Comment l'étudier ?

? Problème 14 - De la multiplication à l'addition

Additionner deux nombres de tailles n se fait en gros en $2n$ calculs. Pour les multiplier l'algorithme classique nécessite n^2 multiplications de chiffres, puis une addition de n nombres...
Peut-on trouver un moyen simple qui transmute les multiplications en additions ? Une fonction telle que : $f(a \times b) = f(a) + f(b)$?

Représentation - Fonction cosinus



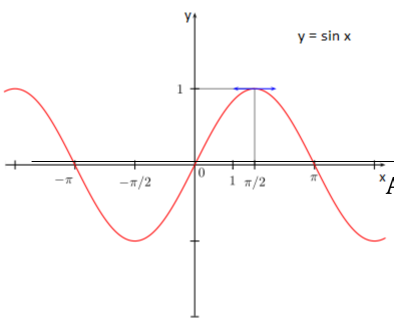
2. Fonctions trigonométriques

On reprend, de manière analytique (où le paramètre x devient une variable) les fonctions trigonométriques vues précédemment.

2.1. Fonctions circulaires

Proposition - Aspect analytique
Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.
sin est une fonction impaire alors que cos est une fonction paire.

Représentation - Fonction sinus



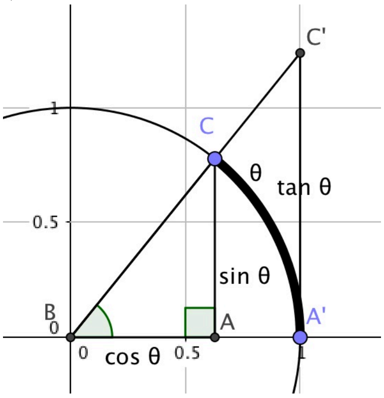
Savoir faire - Transférer un problème trigonométrique « en a », vers « en 0 »

Il faut exploiter les formules trigonométriques : $\sin(a+h) = \sin a \cos h + \cos a \sin h$ et $\cos(a+h) = \cos a \cos h - \sin a \sin h$, à connaître par coeur.

|

Analyse - Inégalité fondamentale

Représentation - Cercle trigonométrique



Proposition - Inégalité
On a pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$|\sin x| \leqslant |x| \leqslant |\tan x| = \frac{|\sin x|}{\cos x}$$

Et en particulier $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Démonstration

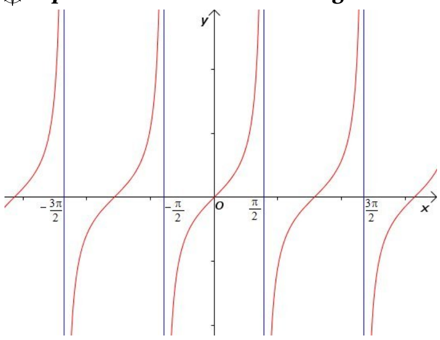
Exemple - Calculatrice. Calculer $\sin(0,01234)$

Exercice
En majorant le module de $e^{ix}-1$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin^2 x + (\cos x + 1)^2 \leqslant x^2$.

Proposition - Fonction tangente - Aspect analytique
La fonction tangente est ainsi définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ ($\mathbb{R}$ privé des points de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$).

tan est impaire, π-périodique

Représentation - Fonction tangente



Démonstration

Exercice
Etudier et représenter la fonction tan

2.2. Fonctions circulaires réciproques

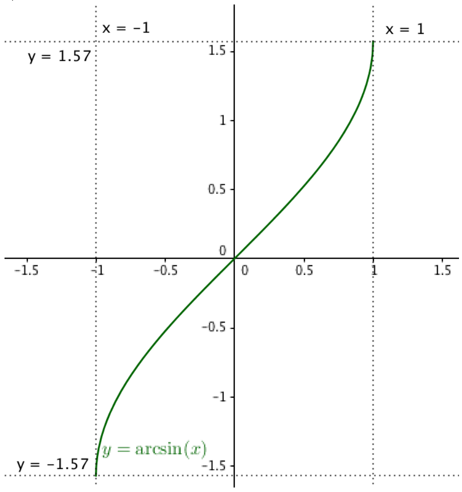
Fonction $\arcsin$

Définition - Arcsinus
La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$.
La bijection réciproque s'appelle arcsinus, $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Elle est impaire, strictement croissante. On a donc :

$$t = \arcsin x \Leftrightarrow \left(\sin t = x \text{ et } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right)$$

Proposition - Rappels
On a :
- $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\arcsin(\sin x) = x$
- $\forall x \in [-1, 1]$, $\sin(\arcsin x) = x$
- $\forall x \in [-1, 1]$, $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$
- $\forall x \in]-1, 1[$, $\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Représentation - Fonction $\arcsin$



Analyse - Questions

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Exercice
Comparer $\arcsin x$ et x, à partir de la double inégalité fondamentale du sinus.

Fonction $\arccos$

Définition - Arccosinus
La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$ donc réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.
La bijection réciproque s'appelle arccosinus, $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$.
Elle est strictement décroissante et on a donc :

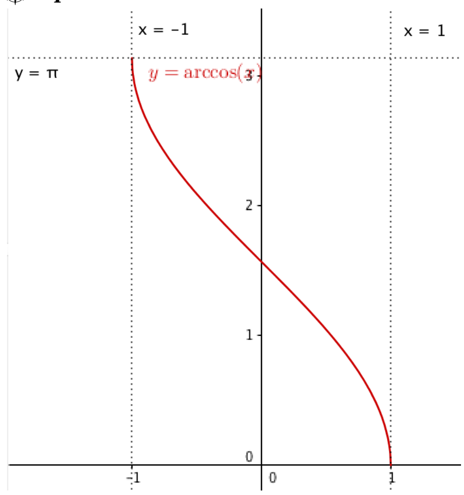
$$t = \arccos x \Leftrightarrow \left(\cos t = x \text{ et } t \in [0, \pi]\right)$$

Proposition - Rappels
On a :
- $\forall x \in [0, \pi]$, $\quad \arccos(\cos x) = x$
- $\forall x \in [-1, 1]$, $\quad \cos(\arccos x) = x$
- $\forall x \in [-1, 1]$, $\quad \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$
- $\forall x \in [-1, 1], x \neq 0$, $\quad \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
- $\forall x \in [-1, 1]$, $\quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arccos x$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{6}$	0

Représentation - Fonction $\arccos$



Fonction $\arctan$

Définition - Arctangente
La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.
La bijection réciproque s'appelle arctangente, $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Elle est impaire, strictement croissante et on a donc :

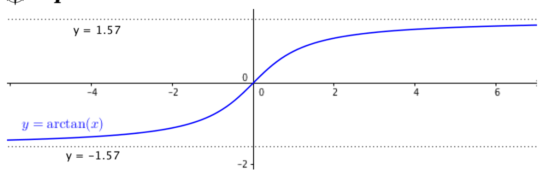
$$t = \arctan x \Leftrightarrow \left(\tan t = x \text{ et } t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right)$$

Proposition - Rappels
On a :
- $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $\quad \arctan(\tan x) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \tan(\arctan x) = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \cos(\arctan x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Il faut connaître les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$

Représentation - Fonction $\arctan$



3. Fonctions polynomiales et puissances rationnelles

On reprend, de manière analytique (où le paramètre x devient une variable) les fonctions puissances et polynomiales vues précédemment.

3.1. Fonction puissance entière relative

Définition - Puissance entière >0
Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on qualifie de fonction puissance entière l'application $x\mapsto x^n$, i.e. définie par récurrence par $x\mapsto x\times x^{n-1}$ et $x^0=1$.
Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$. C'est une fonction continue (nous le verrons plus tard).
Cette application est paire si n est pair, et impaire si n est impair.

Il faut savoir représenter ces fonctions.

Histoire - Notation des puissances et puissances négatives
Cette notation émerge petit à petit chez Bombelli (1572), Simon Stevin (1585), Descartes puis Newton.

Définition - Puissance entière <0
Soit $m\in\mathbb{Z}_-$, on qualifie de fonction puissance entière négative l'application $x\mapsto x^m=\dfrac{1}{x^{-m}}$, i.e. définie par récurrence par $x\mapsto \dfrac{1}{x}\times x^{m+1}$ et $x^0=1$.
Son ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$. C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
Cette application est paire si n est pair, et impaire si n est impair.

Il faut savoir représenter ces fonctions, en particulier l'hyperbole $\mathscr{C}$ associé à $x\mapsto\frac{1}{x}$ $(m=-1)$.

Proposition - Morphisme
On a pour tout $m,n\in\mathbb{Z}$ et $x\in\mathbb{R}^*$, $x^m\times x^n=x^{m+n}$.
Vrai également en $x=0$, si $n,m>0$.

Exercice
A démontrer

3.2. Fonctions polynomiales

Définition - Fonction polynomiale
On appelle fonction polynomiale une fonction de la forme :

$$f: x\mapsto a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$$

où $\forall\ k\in[\![0,n]\!]$, $a_k\in\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) ;
Il s'agit d'une combinaison linéaire finie de puissances entières de la variable x. On parle de polynôme simple ou de polynôme à une variable.
On dit que $f(x)=b$ est une équation polynomiale si f est une fonction polynomiale.

Remarque - Notations
On remarque que les lettres de fin d'alphabet sont en générale associées à des inconnues. Les lettres de début d'alphabet aux variables connues.
On comprend pour les inconnues : on ne peut pas faire autrement. Mais pourquoi associer des lettres à des nombres connus?
Par propriétés calculatoires sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

Proposition - Propriété de l'ensemble des fonctions polynomiales
Si f et g sont deux fonctions polynomiales, alors :
- $f+g$ est une fonction polynomiale
- $f\times g$ est une fonction polynomiale
- $f\circ g$ est une fonction polynomiale.

Démonstration

Rappelons :

Théorème - Factorisation multiple
Soit f une fonction polynomiale de degré n. Soit $p \leqslant n$
Si $x_1, x_2, \dots x_p$, p solutions différentes de l'équation $f(x) = 0$ (racines de f).
Alors il existe g_p, fonction polynomiale de degré $n - p$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{K}, \qquad f(x) = (x - x_1)(x - x_2)\dots(x - x_p) \times g_p(x)$$

Corollaire - Nombre maximal de solution
Une équation polynomiale de degré n admet au plus n solutions différentes

3.3. Fonction puissance rationnelle

Analyse - Bijection de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$

Définition - Racine n-ième
On note $\sqrt[n]{\cdot}$ la bijection réciproque de $x \mapsto x^n$.
On a donc :

$$\begin{array}{lll} \text{si } n \text{ est pair} & \sqrt[n]{x} = \quad x^{1/n} & \text{pour } x \geqslant 0 \\ \text{si } n \text{ est impair} & \sqrt[n]{x} = \begin{cases} x^{1/n} & \text{pour } x \geqslant 0 \\ -|x|^{1/n} = -(-x)^{1/n} & \text{pour } x \leqslant 0 \end{cases} & \end{array}$$

Pour n impair on a donc $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$.

Définition - Puissance rationnelle
Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ (avec $q \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{Z}$), on qualifie de fonction puissance rationnelle l'application $x \mapsto x^r$ où x^r vérifie $(x^r)^q = x^p$.
Son ensemble de définition est $\mathbb{R}_+^*$. C'est une fonction croissante et continue (nous le verrons plus tard).

Exemple - $5^{2/3}$

3.4. Inégalités

Pour étudier les limites variées (à l'infini, ou calculer des dérivées), on a besoin d'encadrement.

Pour la croissance de $x \mapsto x^n$, on exploite le binôme de Newton. Par exemple :

Proposition - Binôme de Newton. Croissance
Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} x^k$.
Avec $a, x > 0$, on a donc $x < x' \Rightarrow x^n < x'^n$, soit la croissance de $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$.

Démonstration

Analyse - Image de $[0,1[$ **et image de** $]1,+\infty[$ **par** $x \mapsto x^r$

Proposition - Comparaison des fonctions puissances
Soient $r < r' \in \mathbb{Q}$.
Alors pour tout $x > 1$, $x^r < x^{r'}$. Et si $x < 1$, $x^r > x^{r'}$

Démonstration

Proposition - Inégalités de Bernoulli
Soit $x \in]-1,+\infty[$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.
Pour $x \in]-1, \frac{1}{n}[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \leqslant \dfrac{1}{1-nx}$

Démonstration

L'exercice suivant permet de montrer la continuité des fonctions puissances rationnelles.

Exercice

On fixe $n \in \mathbb{N}$.Montrer que $\lim_{x \to 0+} (1+x)^n = 1$, puis la continuité à droite de $t \mapsto t^n$ en 1 et en tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Exponentielles et logarithmes

Heuristique - Histoire

Nous avons d'abord rencontrer les fonctions logarithmiques (Stevin, Briggs, Neper) au XVIeme siècle.
Ils cherchaient un processus pour transformer multiplication (complexe) en addition (plus simple).
Il s'agissait d'interpoler la réciproque des suites géométriques : $n \mapsto a^n$, vérifiant $a^{n+m} = a^n \times a^m$.
Pour faciliter les démonstrations du cours, nous remonterons l'histoire (d'abord exponentielles avant logarithmes).

4.1. ExponentielleS

Heuristique - Equation fonctionnelle

Soit $a \in \mathbb{R}$, si $n, m \in \mathbb{N}$, $a^{n+m} = a^n \times a^m$.
Cette relation est centrale si l'on s'intéresse à $x \mapsto a^x$.
Considérons donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous nombres réels $x, y \in \mathbb{R}$: $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.
Est-ce qu'une telle relation est suffisante pour définir parfaitement aucune (non car $t \mapsto 2^t$ semble bien aller, au moins pour $t \in \mathbb{Q}$), une fonction f, ou plusieurs ? Et dans ce cas, que rajouter pour différencier ces différentes fonctions ?

On notera le pluriel :

Définition - Fonctions exponentielles
On qualifie de fonctions exponentielles les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, non nulles vérifiant :
$\forall x, y \in \mathbb{R} : f(x+y) = f(x) \times f(y)$.

Proposition - Exponentielle de rationnels
Si f est une fonction vérifiant : $f(x+y) = f(x) \times f(y)$, alors f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
Puis : ou bien $f : x \mapsto 0$, ou bien $f(0) = 1$.
Donc une fonction exponentielle est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $f(0) = 1$.

Démonstration

Proposition - Base
Si f est une fonction exponentielle non nulle, alors il existe un nombre $a \in \mathbb{R}_+$, tel que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = a^x$

Savoir faire - Etude d'une équation fonctionnelle de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{R}$
L'étude d'une équation fonctionnelle se fait souvent de la façon suivante :

1. Par récurrence, en étudiant $f(sn)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et s quelconque.
2. Par imparité/parité (ou autre symétrie), on étudie $f(sm)$ pour $m \in \mathbb{Z}$.
3. On retrouve ensuite le résultat pour $m \in \mathbb{Q}$.
4. Ensuite, on exploitera (plus tard) un argument de continuité ou bien un argument de croissance

Démonstration

Proposition - Variations
Soi f une fonction exponentielle est non nulle,
f est strictement croissante sur $\mathbb{Q}$ si $f(1)(=a) > 1$
et elle est décroissante sur $\mathbb{Q}$ si $f(1)(=a) < 1$

Démonstration

Analyse - Comment définir $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

Pour aller plus loin - Suite décimale
Prenons un exemple pour mieux comprendre ici.
Considérons le nombre π, on a alors $\pi = 3,1415\dots$.
Dans ce cas : $d_0 = 3$, $d_1 = 3,1$, $d_2 = 3,14$, $d_3 = 3,141\dots$

Exercice
On note $a = f(1)$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{Q}$, $f(rx) = f(x)^r$.
Quelle formule obtient concernant les puissances de a ?

Pour aller plus loin - Définition de a^x
Il faudrait démontrer que cette valeur ne dépend pas de la suite (d_n) choisie, convergente vers x.

On résume et admet les derniers résultats (il nous manque la continuité) :

Théorème - Fonctions exponentielles. Bilan
Les fonctions exponentielles non nulles sont continues.
Elles vérifient : $f(0) = 1$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ et $f(x \times y) = f(x)^y$.
Il existe $a(= f(1)) \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = a^x$ (par définition de a^x si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).
Si $a > 1$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{-\infty} f = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.
Si $a < 1$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

4.2. LA fonction exponentielle

Nous verrons que ces fonctions sont dérivables. L'une a la propriété essentielle de vérifier $f'(0) = 1$. C'est LA fonction exponentielle avec $a = e$ (LE « e »).
Prenons un autre définition.

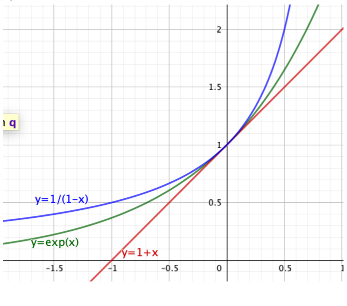
Définition - La fonction exponentielle naturelle
Soit $x \in \mathbb{R}$. La suite $(x_n) = ((1 + \frac{x}{n})^n)$ est majorée, croissante à partir d'un certain rang, donc convergente.
Notons $\exp(x)$ la limite de (x_n).

Pour aller plus loin - Critère de convergence pour une suite réelle
Nous verrons, sans cercle vicieux, que toute suite de nombres réelles, majorée et croissante (à partir d'un certain rang) est convergente.
C'est une propriété caractéristique de $\mathbb{R}$.

Il faut démontrer la convergence de la suite :

Démonstration

Représentation - Inégalités



Proposition - Inégalités

On a pour tout $x \in]-1,1[$, $1+x \leqslant \exp x \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

Remarque - Elargissement de l'intervalle

En fait, le résultat est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour la première inégalité et sur $]-\infty,1[$ pour la seconde.
Mais en réalité, elles nous serviront surtout pour x proche de 0, où les trois termes valent 1…

Démonstration

Théorème - exp **est une fonction exponentielle.**
La fonction $x \mapsto \exp x$ est une fonction exponentielle appellée LA fonction exponentielle.
On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(x) = e^x$ où $e = \exp(1) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
Elle vérifie donc : $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x+y) = e^{x+y} = e^x e^y = \exp(x)\times\exp(y)$ et $\exp(x\times y) = e^{xy} = (e^x)^y = (\exp(x))^y$.

Démonstration

Application - Evaluation approchée de $(1+\frac{1}{30})^{100}$

Analyse - Binôme de Newton pour $(1+\frac{1}{n})^n$ **et une approximation d'Euler**

Histoire - D'où vient la notation e ***?***
Leonard Euler *(1707-1783) est le mathématicien le plus prolixe de l'histoire (avec Cauchy ?).*
C'est un calculateur de génie, doté d'une mémoire prodigieuse (hypemnésique).

Proposition - Formules d'Euler (1746)

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}$$

Et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$e^x = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}$$

4.3. LogarithmeS

Les fonctions exponentielles non constante égale à 0 ou 1 sont continues et strictement monotone, elles admettent donc une fonction réciproque.

Définition - Fonctions logarithmes
On appelle fonctions logarithmes toute fonctions g réciproques de fonctions exponentielles f non constantes.
Si cette dernière est $x \mapsto a^x$ (avec $a \notin \{0,1\}$), alors la fonction logarithme est qualifiée « de base a ». On note souvent $g = \log_a$ ou $\ln_a$.
Elle est définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et vérifie alors
$\forall\ x, y \in \mathbb{R}_+,\ g(x\times y) = g(x) + g(y)$.

Exemple - Différents logarithmes bien connus

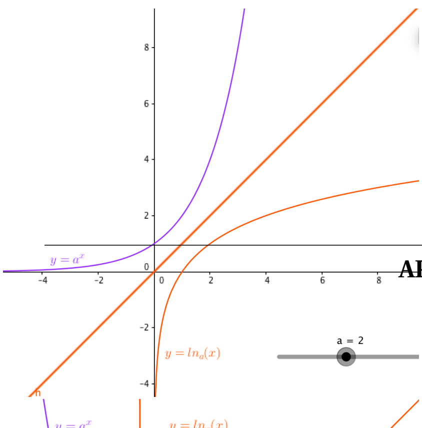
Histoire - Neper
L'écossais John Napier (1550-1617) (ou Neper) cherche au XV siècle une fonction qui faciliterait les calculs : elle transformerait le produit (compliqué car beaucoup de calculs) en addition (moins de calculs).
Il trouve le logarithme.
On a donc $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.
L'histoire peut être un moyen mnémotechnique.

Démonstration

Théorème - Fonctions logarithmes. Bilan
Les fonctions logaritmes sont continues, définies sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Elles vérifient : $g(1) = 0$ et pour tout $x, y, t \in \mathbb{R}_+$, $g(x\times y) = g(x)+g(y)$ et $g(x^t) = t\times g(x)$.
Il existe $a (= f(1)) \in \mathbb{R}$ tel que $g(a) = 1$.
Si $a > 1$, alors g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{0} g = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$.
Si $a < 1$, alors g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim\limits_{0} g = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.

Démonstration

Représentation - Exponentielles et logarithmes selon la valeur de a



Savoir faire - Calculer « à la main » le logarithme en base a de x?
On n'a pas d'autre solution (pour le moment) mais cela est suffisant (compte-tenu de la contrainte que l'on s'est donné) de procéder par dichotomie.
On regarde la suite (a^n) et l'on trouve $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n \leqslant x < a^{n+1}$.
Puis, on sélectionne $a_0 = n$ et $b_0 = n+1$. Puis on peut (par exemple), considérer $c = \frac{a_0+b_0}{2} \in \mathbb{Q}$, évaluer a^c.
Si $a^c < x$, on prend $a_1 = c$ et $b_1 = b_0$, sinon on prend $a_1 = a_0$ et $b_1 = c\dots$

On a deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) convergente vers y avec $a^y = x$, donc $y = \log_a(x)$.

Définition - Le logarithme naturel
La fonction logarithme réciproque de la fonction exponentielle, donc le logarithme en base $e = \exp 1$ est appelé logarithme naturel.
On le note ln.
ln est définie, continue et croissante sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Numériquement : $\ln(1) = 0$, $\ln e = 1$, $\lim_0 \ln = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$.
On a les propriétés algébrique : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$, $\ln(a^b) = b \ln a \ldots$
On a pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln u \leqslant u - 1$.

Histoire - Logarithme naturel
Il y a un abus historique ici.
On a démontré historiquement qu'il s'agit bien du logarithme naturel en le définissant comme primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ (primitive dont on a démontré qu'il s'agissait d'un logarithme (Fermat - 1636)). C'est le naturel car $\ln'(1) = 1$.
La définition donnée ici vient de Euler (un siècle plus tard)

Tout est immédiat, sauf l'inégalité qu'on démontre :

Démonstration

Proposition - Ecriture en fonction du logarithme naturel
Soit g la fonction logarithme de base a, réciproque de $f : x \mapsto a^x$.
Alors on a :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, f(x) = a^x = \exp(x \times \ln a) \qquad \forall\ x \in \mathbb{R}_+, g(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

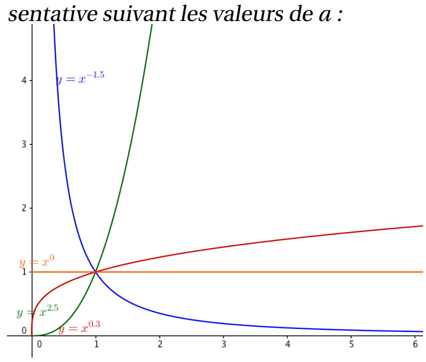
Démonstration

4.4. Retour sur les fonctions puissances, avec un exposant non rationnel

Définition - Fonction puissance réelle
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit sur $]0, +\infty[$ la fonction puissance α par :

$$g_\alpha : \begin{array}{ll}]0,+\infty[& \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto x^\alpha = \exp(\alpha \ln x) \end{array}$$

Représentation - Fonctions puissances réelles (différentes valeurs de a)
On en déduit les variations et la courbe représentative suivant les valeurs de a :



Proposition - Fonction puissance réelle
Elle vérifie les propriétés suivantes :
$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2$, $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$,
— $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$
— $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$
— $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$
— Si $\alpha = 0$, g_α est constante égale à 1.
— Si $\alpha > 0$, g_α est croissante et $\lim_{x \to 0^+} g_\alpha(x) = 0$
— Si $\alpha < 0$, g_α est décroissante et $\lim_{x \to 0^+} g_\alpha(x) = +\infty$
Pour $\alpha > 0$, on étudie l'existence d'une demi-tangente en 0 :

— Si $\alpha < 1$, la courbe $y = g_\alpha(x)$ admet une tangente verticale en 0.
— Si $\alpha = 1$, la courbe $y = g_\alpha(x)$ admet une tangente de pente 1 en 0.
— Si $\alpha > 1$, la courbe $y = g_\alpha(x)$ admet une tangente horizontale en 0.

4.5. Croissances comparées

Heuristique - Logarithme comme nombre de chiffres

Commençons par une remarque, avec $x = 10^n$, on a $\frac{\ln(x)}{x} = n10^{-n}\ln 10 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Notons que $\ln 10 \approx 2{,}302$, donc $\ln x = \ln(10) \times \log_{10}(x)$ et que $\log_{10}(x)$ est en première approximation le nombre de chiffres de x, alors pour x grand, $\ln x$ est le nombre de chiffres de x multiplié par un peu plus de 2.
Exemple : $\ln(123456789) \approx 2{,}3 \times \log(1{,}23 \times 10^9) = 2{,}3 \times (9 + \ln(1{,}23)) \approx 20$, ce qui est petit

Il s'agit, a priori, de formes indéterminées. Elles sont levées :

Théorème - Croissance comparée
Soient a et b deux réels strictement positifs. On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^b}{x^a} = 0; \quad \lim_{x\to 0^+} x^a |\ln x|^b = 0;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty; \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^b e^{ax} = 0.$$

Démonstration

Exercice

Fixons $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

Montrer que pour x grand : $e^{\frac{a}{b+1}x} \geqslant \frac{a}{b+1}x$, en déduire $\frac{e^{ax}}{x^b} \geqslant \left(\frac{a}{b+1}\right)^{b+1} x$.

Conclure sur la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^b}$.

4.6. Fonctions hyperboliques directes

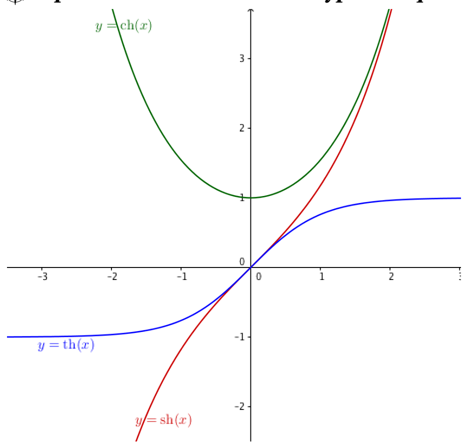
Définition - Fonctions hyperboliques
Les fonctions ch (cosinus hyperbolique), sh (sinus hyperbolique) et th (tangente hyperbolique) sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Proposition - Fonctions hyperboliques
La fonction ch est paire, les fonctions sh et th sont impaires.

$$\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x \qquad \operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$$
$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$
$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x \qquad \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$$
$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \qquad \operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b$$
$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$$

Représentation - Fonctions hyperboliques



Démonstration

5. Sommes numériques infinies

On commence par une extension de notation :

Définition - Extension du coefficient binomial
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, on note :

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

La section suivante donne des résultats connus pour l'essentiel depuis le XVIII siècle, au moins.
Mais les démonstrations satisfaisantes sont plus tardives (ABEL et successeurs du XIX).
Pour vous, elles auront officiellement lieu l'année prochaine lorsque vous verrez le cours sur les séries entières.

Proposition - Egalités sommatoires
On a les égalités suivantes :

$x\in$?	fonction	somme	Auteur (Année)
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$	NEWTON(1669), LEIBNIZ(1691)
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$	NEWTON(1669), LEIBNIZ(1691)
$\mathbb{R}$	$\tan(x)$	$=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{5}x^5+\frac{17}{315}x^7+\dots$	JAC. BERNOULLI(1702)
$[-1,1]$	$\arctan(x)$	$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}x^{2k+1}$	GREGORY(1671), LEIBNIZ(1674)
$[-1,1]$	$\arcsin(x)$	$=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\dots$	NEWTON(1669)
$\mathbb{R}$	$(1+x)^n$	$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$	PASCAL(1654)
$]-1,1[$	$(1+x)^\alpha$	$=\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$	NEWTON(1666)
$\mathbb{R}$	$\exp(x)$	$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}x^k$	EULER(1748)
$]-1,1[$	$\ln(1+x)$	$=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$	MERCATOR(1668)
$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh}(x)$	$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}$	EULER(1748)
$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch}(x)$	$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(2k)!}x^{2k}$	EULER(1748)

Exercice
Donner l'expression formalisée de $\arcsin(x)$.

Exercice
On rappelle la formule de MACHIN : $\frac{\pi}{4} = 4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239}$.
Combien de calcul pour obtenir 10 décimales de π satisfaisantes ? Faites les à la calculatrice

Pour aller plus loin - Produit infini
Euler démontre également (1748) :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \sin x = x\prod_{k=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)$$

6. Bilan

Synthèse

- On s'intéresse aux fonctions dont le domaine est dans $\mathbb{R}$. Beaucoup de définitions : images, restrictions, ou additions, multiplications et compositions de fonctions. Des adjectifs pour les fonction : périodiques, paires ou impaires, majorées, minorées, bornées, monotone, strictement croissante...

- ⇝ Plusieurs fonctions de référence sont à connaître : exponentielle(s) et logarithme(s) en toute base ; les fonctions puissances ; les fonctions circulaires (sin, arccos...) et hyperboliques directes. On doit savoir comment comparer ces fonctions lorsqu'elles sont en compétition au voisinage de point problématique.
- ⇝ Les fonctions complexes de la variables réelles s'étudient de la même façon (même si la représentation est plus complexe). En fait, ce qui compte, c'est la nature de la variable « de départ ».

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- Savoir-faire - Transférer un problème logarithme « en a », vers « en 1 »
- Savoir-faire - Transférer un problème trigonométrique « en a », vers « en 0 »
- Savoir-faire - Etude d'une équation fonctionnelle de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{R}$
- Savoir-faire - Calculer « à la main » le logarithme en base a de x ?

Retour sur les problèmes

12. C'est l'application $x \mapsto 2^x u_0 = u_0 e^{x \ln 2}$
13. Les seules applications de cette forme sont les applications $x \mapsto A\ln(x)$ (où A est constante).
    Elles sont définie sur $\mathbb{R}_+$. Peut-on les étendre sur $\mathbb{R}$ en entier ?
    Si $x > 0$, $\ln(-x) = \ln(e^{i\pi} x) = \ln x + i\pi[2\pi]\ldots$
14. On vient de terminer ce chapitre en répondant à cette question.