Chapitre 5

Dérivabilité des fonctions

Résumé -

Ce chapitre se présente comme un large résumé du cours de première S avec ajouts de fonctions usuelles (vues en terminale ou en MPSI). On reprend tous les résultats en admettant la notion fine de limite, ils nous serviront d'outils pour des études plus poussés par la suite ou bien pour leur application dans d'autres domaines scientifiques. Le but est donc de raffiner notre technique (calculs)....
Il ne faut pas oublier que la notion de fonctions est une notion fine des mathématiques modernes, elle a mis plusieurs siècle à émerger : Leibniz, puis Euler, puis Cantor et Weierstrass... pour arriver jusqu'à nous. Et encore, le joyau n'est pas encore définitivement ciselé (distributions de Schwartz...). Sur internet :

— *OptimalSup-Spé - Cours Fonctions usuelles. https ://www.youtube.com/watch ?v=xTbtre9dgmQ*
— *Micmaths - Merveilleux logarithmes - https ://www.youtube.com/watch ?v=rWfl7Pw8YVE*
— *El Jj - Différences équations/fonctions (pas de questions stupides#01)*

Sommaire

1. Problèmes

? Problème 19 - Optimisation par FERMAT. Raisonnement pré-dérivatoire

Reprenons l'exemple de Fermat qui cherche à trouver la position E sur un segment $[AC]$ de manière à ce que $AE \times EC$ soit maximum.
Notons $a = AE$ et $b = EC$. On a donc $a + b = d(= AC)$ fixé. On cherche la valeur maximal de $AE \times EC = a(d-a) = ad - a^2$.
La méthode de Fermat consiste donc à ajouter une valeur e à AE, on a alors une nouvelle valeur qui vaut : $(a+e)d - (a+e)^2 = ad - a^2 + e(d - 2a) - e^2$.
Ajouter une valeur e à AE consiste donc à faire évaluer $AE \times EC$ d'une valeur $ad - a^2 + e(d-2a) - e^2 - ad + a^2 = e(d-2a) + e^2$.
Fermat dit qu'il faut « adégaler » les deux valeurs cela donne $e(d-2a) + e^2 = 0$. On peut simplifier par $e \neq 0$.
On trouve donc $d - 2a + e = 0$, et il prend $e = 0$ et donc $a = \frac{d}{2}$. E est au milieur de $[AC]$. Qu'en pensez-vous ?

? Problème 20 - Optimisation

On passe notre vie à optimiser nos actions, nos décisions (la plus efficace, la moins longue...).
Comment assurément trouver une stratégie qui permet à tous les coups d'optimiser (au moins localement) nos décisions.
Si elle se mesure sous la forme Résultat(Action), on doit trouver : Résultat(Action+δ)<Résultat(Action) et Résultat(Action-δ)<Résultat(Action) également...

? Problème 21 - Dérivation : concept local ou global ?

A priori l'optimisation précédente de la fonction Résultat donne des valeurs différentes selon la valeur Action où l'on se place. Ainsi, la notion de dérivation est un concept local.
Et donc, dans un second temps, une fois que pour tout x, $f'(x)$ est bien défini, on peut seulement réunir toutes ces valeurs en une seule fonction f.
D'où vient le miracle que dans la pratique, on peut directement agir de f à f' (de fonction à fonction) ?

? Problème 22 - Dérivations de fonctions usuelles et des opérations

Et ainsi, en particulier, quelles sont les transformations de dérivation pour les fonctions usuelles ? Et également, que deviennent les opérations classiques $(+, \times, \circ)$ pour la dérivation ?

? Problème 23 - Se concentrer sur un problème

D'une certaine façon, regarder la dérivation de f en x_0, c'est faire l'approximation affine (donc relativement simple) mais juste des valeurs $f(x)$ pour x proche de x_0.
Ces valeurs approchées peuvent se concentrer autour de 0. Et si l'on se

trouve autour d'un cas de limite problématique du type : $\frac{\to 0}{\to 0}$, ne peut-on pas exploiter les approximations affines (et donc les dérivées) pour obtenir une bonne évaluation de cette forme indéterminée ?

? Problème 24 - Etude de fonctions complexes

Comment étudier des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ (comme $\theta \mapsto e^{i\theta}$) ?
Nous les avons définies lors du chapitre précédent ; comment les dériver maintenant ?
Mieux : comment étudier des fonctions de la variables complexes ? Peut-on les dériver, comment cela s'adapte ?

2. Dérivation

2.1. Approche historique

Heuristique - Infinitésimaux

Le calcul différentiel et le calcul intégral ont été finalisés indépendamment et associés par Leibniz (1684) et Newton (1671, publié en 1736).
Leurs raisonnement repose sur une notion floue d'infinitésimaux (ou de fluente), notion non convaincante à l'époque.
Johan Bernoulli (1692) popularise auprès de toute sa dynastie, du marquis de L'Hospital et surtout d'Euler, la découvert de Leibniz (« une énigme plutôt qu'un explication ») et pense que des explications trop abondantes au sujet de l'infiniment petit pourrait troubler l'entendement de ceux qui ne sont pas « accoutumés à de longues explications ».
En fait, il manque la notion claire de limite, dont d'Alembert (1754) s'approche le plus. La bonne notion de limite est définie par Bolzano (1817), Cauchy (1823) ou Weierstrass (1861) et donnent ainsi une définition bien formalisée et solide mathématiquement (permettant de démontrer des résultats), abandonnant la notion d'Infinitésimaux.
Ce chapitre s'appuie sur des mathématiques du XVII. Nous ferons les démonstrations après avoir défini la notion de limite.

Pour aller plus loin - Analyse non standard

En 1961, Abraham Robinson crée une nouvelle logique mathématique en s'appuyant sur les nombres hyperréels.
Edward NELSON*, en 1977, renouvelle l'analyse non standatd (IST) en donnant un nouveau sens aux infinitésimaux et définit un nouveau calcul...*

Remarque - Cours de physique

En physique, en MPSI, le cours est proche des idées de Leibniz et Newton, et c'est très bien ainsi.
La notation $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est celle de Leibniz. La notation $\dot{x}$ est due à Newton !
C'est Lagrange, après un détour par Euler, qui impose la notation f'.

Remarque - Limite

On va faire comme si on connaissait la notion de limite, application linéaire ($\lim \lambda f + g = \lambda \lim f + \lim g$)...

2.2. Dérivabilité

Définition - Nombre dérivée

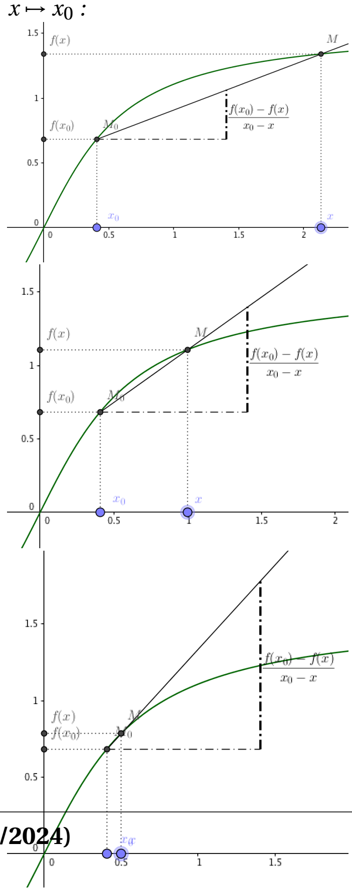
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I et x_0 un point de I.
f est dérivable en x_0 si la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, définie sur $I - \{x_0\}$, admet une limite finie en x_0.
On a alors

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.
$f'(x)$ s'appelle le nombre dérivé en x et la fonction qui à $x \in I$ associe $f'(x)$ s'appelle la (fonction) dérivée de f.

Représentation - Nombre dérivée

Il s'agit d'une notion « dynamique » (limite). Il faut le voir comme un film, en plusieurs temps $x \mapsto x_0$:



On retrouve ce type de schémas dans le cours de Leibniz ou de Joh. Bernoulli

2.3. Approximation linéaire

On donne parfois une définition équivalente de la dérivation de f en x_0.
Son avantage : elle cache la question de la limite dans l'hypothèse de continuité de ϵ en x_0. .

Pour aller plus loin - Continuité = limite
Nous verrons que la notion de continuité de f en un point x_0 est équivalente à la notion d'existence de limite de f en x_0.

Proposition - Définition de Weierstrass
Soit f définie sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$
f est dérivable en x_0 si et seulement si
il existe $A \in \mathbb{R}$, ϵ continue en x_0 avec $\epsilon(x_0) = 0$ tels que

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)(A + \epsilon(x))$$

On a alors $A = f'(x_0)$

Démonstration

Application - Pour quelques fonctions usuelles (connaissant les dérivées en 0

Pour aller plus loin - Linéarisation
Autre idée essentielle pour l'exploitation de la dérivation : transformer un problème paramétré par une fonction plus ou moins compliquée en un autre problème linéaire. Pour cela on remplace f par une droite, la plus proche c'est-à-dire la dérivée de f (en un x_0 bien choisi). C'est en particulier la méthode de Newton que nous reverrons en informatique. Il s'agit de resoudre $f(x) = 0$.

Définition - Équation de la tangente
Soit f définie sur I, dérivable en $x_0 \in I$.
La droite d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

s'appelle la tangente à la courbe représentative de f en $M(x_0, f(x_0))$

Truc & Astuce pour le calcul - A propos de la tangente
On notera :
- qu'il s'agit bien de l'équation d'une droite ($y = ax + b$)
- qu'elle passe bien par le point M : $f(x_0) + f'(x_0)(x_0 - x_0) = f(x_0)$.
- que sa pente vaut $f'(x_0)$.

2.4. Règles de dérivation

Les résultats suivants seront démontrées plus tard dans l'année (linéarité de la limite). Ils ont été énoncés pour la première fois par LEIBNIZ en 1684. Le but pour le moment est de se former pour le calcul!

Proposition - Résultats

Soient u et v dérivable en x_0

— $u+v, uv, u^n, \exp u$ sont dérivables en x_0 ;

— si, en outre, u ne s'annule pas sur un intervalle contenant x_0 et est dérivable en x_0 alors $\frac{1}{u}, \ln|u|$ sont dérivables en x_0 ;

— si, en outre, v ne s'annule pas sur un intervalle contenant x_0 et est dérivable en x_0 alors $\frac{u}{v}$ est dérivable en x_0 ;

— si, en outre, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et si u est strictement positive sur un intervalle contenant x_0, alors u^α est dérivable en x_0

Si $u\circ\phi$ est définie, si φ est dérivable en x_0 et u dérivable en $\varphi(x_0)$ alors $u\circ\varphi$ est dérivable en x_0 et $(u\circ\varphi)'(x_0) = \varphi'(x_0) \times u'(\varphi(x_0))$.

Résumé :

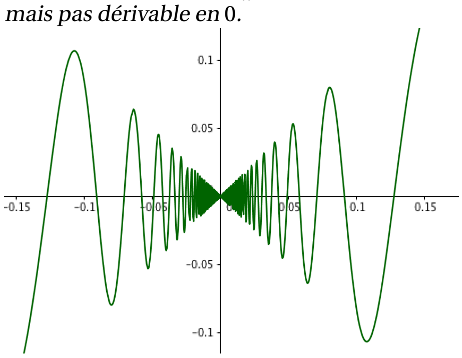
Proposition - Résumé des formules usuelles de dérivation

fonction f de la forme	fonction dérivée f'
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$u_1u_2\dots u_n$	$u_1'u_2\dots u_n + u_1u_2'u_3\dots u_n + \cdots + u_1u_2\dots u_{n-1}u_n'$
u^n où $n\in\mathbb{N}^*$	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{u}$	$\frac{-u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
$u\circ\phi$	$\phi'\times u'\circ\phi = u'\circ\phi\times\phi'$
$u_1\circ\cdots\circ u_n$	$(u_1'\circ u_2\circ\cdots\circ u_n)\times(u_2'\circ u_3\circ\cdots\circ u_n)\times\cdots\times u_n'$
$\exp u$	$u'\times\exp u$
$\ln\|u\|$	$\frac{u'}{u}$
u^α où $\alpha\in\mathbb{R}^*$	$\alpha u'u^{\alpha-1}$

Ces formules sont vraies, sous réserve, évidente, de dérivabilité des fonctions qui interviennent.

Pour aller plus loin - Toutes les fonctions sont dérivables ?

La fonction $x\mapsto x\cos\frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}$, mais pas dérivable en 0.



Mais pire, il existe des fonctions partout continues et nulle part dérivable. La construction est subtile. Par exemple :

$$x\mapsto\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(10^n\pi x)}{2^n}$$

2.5. Dérivation de fonctions usuelles

Fonctions exponentielles et logarithmes

Savoir faire - Encadrement pour le calcul de limite

Pour obtenir des résultats sur les limites (indéterminées), la meilleure stratégie est l'encadrement :

si $a(x)\leqslant b(x)\leqslant c(x)$ et que a et c admettent la même limite en x_0 égale à ℓ,

alors b admet également une limite en x_0, égale à ℓ.

Analyse - Exponentielle (naturelle) en 0

Proposition - Dérivation des fonctions exponentielles
exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.
Pour $a > 0$ et $a \neq 1$. Si $f : x \mapsto a^x$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \ln a \times a^x$.

Savoir faire - Transférer un problème exponentiel « en a », vers « en 0 »
Si on étudie exp au voisinage de a, donc des points de la forme $a+h$ avec h proche de 0,
on exploite $\exp(a+h) = \exp a \times \exp(h)$.
Donc on factorise (à l'extérieur) par $\exp a$ et on se concentre sur une étude en ϵ, ϵ proche de 0

On appliquera souvent cette méthode dans le calcul de développement limité.

Démonstration

Par addition et composition (démontrée plus loin)

Proposition - Fonction trigonométrique hyperbolique
Les fonctions ch, sh et th sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}'(x) = \mathrm{sh}\, x,\ \mathrm{sh}'(x) = \mathrm{ch}\, x \text{ et } \mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}^2(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}\, x}.$$

Démonstration

Remarque - $\frac{\partial}{\partial x} e^{-x}$?
On peut noter que $e^{-x} = \left(e^{-1}\right)^x$, c'est une fonction exponentielle de base e^{-1}.
Donc de dérivée : $\ln(e^{-1}) \times (e^{-1})^x = -e^{-x}$.

Analyse - Logarithme (naturel) en 1

Proposition - Dérivation des fonctions logarithmes

ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
Si $g : x \mapsto \ln_a(x)$, alors g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g'(x) = \frac{1}{(\ln a) \times x}$.

Savoir faire - Transférer un problème logarithme « en a », vers « en 1 »

Si on étudie ln au voisinage de a, donc des points de la forme $a+h$ avec h proche de 0,
on factorise (à l'intérieur) par a : $a+h = a(1+\frac{h}{a})$ et exploite $\ln(a+h) = \ln a + \ln(1+\frac{h}{a})$.
Et on se concentre sur une étude en $1+\epsilon$, ϵ proche de 0

On appliquera souvent cette méthode dans le calcul de développement limité.

Démonstration

Fonctions puissances

Proposition - Fonctions puissances

La fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ est dérivable sur son ensemble de définition (privé de 0, si besoin : $\alpha - 1 < 0$ alors que $\alpha > 0$), de dérivée : $x \mapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

Démonstration

Par sommation, on retrouve ce qu'on a déjà démontré :

Proposition - Fonctions polynomiales

Les fonctions polynomiales sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et précisément, si $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \sum_{k=0}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$.
On notera qu'il s'agit encore d'un polynôme, de degré $\deg f - 1$.

L'ensemble de définition des fonctions puissances entières étant $\mathbb{R}$ en entier, les résultats précédents ne sont pas suffisants. Il faut refaire une démonstration.
Il serait tout de même étonnant de trouver des résultats différents...

Fonctions circulaires

Proposition - Fonction trigonométrique
sin, cos et tan sont dérivables sur leur ensemble de définition. Précisément :
$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\sin'(x) = \cos x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\cos'(x) = -\sin x$. et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

On applique une méthode déjà connue.

Démonstration

Les résultats sur les dérivées des fonctions réciproques arcsin... seront vus loin lorsqu'on étudiera la dérivation de fonctions réciproques.

2.6. Dérivées seconde, troisième...

Définition - Dérivables
Soient I un intervalle et f une fonction définie sur I.
On dit que f est deux fois dérivable sur I si f est dérivable sur I et si f' est elle-même dérivable sur I, on note f'' la dérivée seconde de f (c'est-à-dire la dérivée de f').
Si f'' est encore dérivable sur I, on dit que f est trois fois dérivable sur I et on note $f''' = f^{(3)} = (f'')'$ sa dérivée troisième, et ainsi de suite.

Définition - Fonction de classe $\mathscr{C}^k$
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ ou continûment dérivable si elle est dérivable et que f' est continue, de classe $\mathscr{C}^2$ ou 2 fois continûment dérivable si elle est deux fois dérivable et que f'' est continue...

Comme les dérivées des fonctions usuelles vues plus haut sont de la forme de fonctions usuelles, par récurrence :

Proposition - Fonctions usuelles
Les fonctions usuelles vues précédemment sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition (sauf les fonctions puissances $x \mapsto x^\alpha$ qui peuvent perdre le 0 dans l'ensemble à la dérivée n-ième si $n > \alpha \ldots$).

2.7. Bijections et réciproques

Théorème - Dérivation de la bijection réciproque
Soient I, J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ bijective de I sur J. On suppose que f est dérivable en $x_0 \in I$.
Alors f^{-1} est dérivable en $f(x_0)$ **si et seulement si** $f'(x_0) \neq 0$
et on a alors

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

ou encore, avec $y_0 = f(x_0)$,

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(y_0)}$$

Remarque - Se souvenir
On peut retrouver la formule en dérivant l'égalité $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}$, mais attention à ne pas oublier la condition de dérivabilité de f^{-1} !

Proposition - Fonctions trigonométriques réciproques
Les fonctions arcsin et arccos sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$,
avec $\forall\ x \in]-1,1[$, $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.
La fonction arctan est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$,
avec $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Démonstration

Pour aller plus loin - Création de fonctions
Dans un autre sens, on peut considérer :

1. *f strictement monotone et continue de I sur J.*
2. *Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} de J sur I.*
3. *Notons Φ, une primitive de f^{-1}.*

Que peut-on dire de Φ ?
Montrer que la plupart des fonctions transcendantes rencontrées dans ce cours peuvent être obtenus de la sorte...

Corollaire -
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est :
- continue strictement monotone sur l'intervalle I,
- dérivable sur I et
- $\forall x \in I, f'(x) \neq 0$

alors f est bijective de I sur $J = f(I)$,

f^{-1} est dérivable sur J et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Savoir faire - Bilan : f $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme

Dans de nombreuses situations (mais pas toutes), on étudie f, si :
- f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (donc continue)
- f' ne s'annule pas (donc de signe constant)

alors f établit une bijection de I sur J.
Elle admet une application réciproque $f^{-1} : J \to I$, de classe $\mathscr{C}^1$ également sur J et $\forall\ t \in J$, $(f^{-1})'(t) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(t))}$.
Graphiquement : $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ est la symétrique de $\mathscr{C}_f$ par rapport à l'axe $y = x$.

Exercice
La fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. La bijection réciproque est notée argsh (argument sinus hyperbolique).
La fonction ch réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$. La bijection réciproque est notée argch (argument cosinus hyperbolique).
La fonction th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$. La bijection réciproque est notée argth (argument tangente hyperbolique).

1. Dérivées.
   (a) Montrer que les fonctions argsh, argch, argth sont dérivables respectivement sur $\mathbb{R}$, $]1, +\infty[$ et $]-1, 1[$.
   (b) Montrer que $(\operatorname{argsh})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $\mathbb{R}$
   (c) Montrer que $(\operatorname{argch})'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ sur $]1, +\infty[$
   (d) Montrer que $(\operatorname{argth})'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ sur $]-1, 1[$
2. Expressions logarithmiques.
   (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$
   (b) Montrer que $\forall x \in]1, +\infty[, \quad \operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$
   (c) Montrer que $\forall x \in]-1, 1[, \quad \operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$

3. Quelques utilisations de la dérivation

3.1. Variations

En utilisant les théorèmes suivants (qui seront démontrés ultérieurement), on peut étudier les variations d'une fonction que l'on résume **systématiquement** dans un tableau de variations, complété par les limites aux bornes (et non par des phrases !)

Théorème - Monotonie et fonction dérivée
Soient I un **intervalle** de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I. Alors :
f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$;
f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$;
f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$.
Si $f' > 0$ (resp. $f' < 0$) sauf en un nombre fini de points de I, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

Attention - Intervalle!
Il est indispensable que I soit un intervalle. On peut en effet trouver f définie sur D, dérivable sur D et vérifiant $\forall x \in D,\ f'(x) < 0$ mais qui n'est pas décroissante sur D.

Exercice
Donner un tel contre-exemple

3.2. Inégalités

Savoir faire - Obtenir une inégalité
Pour démontrer une inégalité, une méthode est d'étudier la fonction formée par la différence des deux membres, d'établir son tableau de variations pour obtenir son signe.

Exercice
Montrer les inégalités :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1;$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x;$$
$$\forall x \in \mathbb{R}^-,\ x - \frac{x^3}{6} \geqslant \sin x \geqslant x.$$

Savoir faire - Obtenir un maximum (avec une dérivée)
Pour obtenir un extremum de f (dérivable deux fois) sur I, on résout $f'(x) = 0$.
On note x_0 la solution de cette équation (donc $f'(x_0) = 0$).
- si $f''(x_0) > 0$, alors f présente un minimum (local) en x_0.
- si $f''(x_0) < 0$, alors f présente un maximum (local) en x_0.
- si $f''(x_0) = 0$, alors on ne peut rien dire.

Remarque - Convexité
On rappelle que si pour tout $x \in I$, $f''(x) \geqslant 0$, on dit que f est convexe sur I.

3.3. Calculs de limites (lever les indéterminations)

On peut calculer certaines limites en reconnaissant le taux de variations d'une fonction dérivable connue.
Exercice
Rappeler les valeurs des limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x};\quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x};\quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x}.$$

En déduire

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$$

Proposition - Règle de L'Hospital (1696)
Soient f et g deux fonctions définies sur I, dérivables en $x_0 \in I$.
On suppose que $f(x_0) = g(x_0) = 0$ et que $\frac{f'}{g'}$ admet une limite en x_0.

Alors $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

On fait la démonstration dans le cas où $g'(x_0) \neq 0$. Sinon, on exploite l'inégalité des accroissements finis.

Démonstration

Pour aller plus loin - Généralisation en $+\infty$
Il existe une généralisation de la règle de L'Hôpital avec une indétermination du type $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$.
Si $\lim_a |f| = \lim_a |g| = +\infty$ *et si* $\lim_a \frac{f'}{g'} = \ell$, *alors* $\lim_a \frac{f}{g} = \ell$

Attention - Pas d'abus
La règle ne s'applique qu'en cas d'indetermination.

$$-4 = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1}{2x-3} \neq \lim_{x \to 1} \frac{6x}{2} = 3$$

Exercice
Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos 2x - 1}{x^3+5x^2}$.
Evidemment, on exploitera les résultats non encore démontrés sur les fonctions usuelles

Savoir faire - Lever une indétermination par la règle de L'Hospital
Si on se trouve en présence d'une forme indétermée du type $\frac{0}{0}$ pour $x \to a$ et que le numérateur et le dénominateur sont dérivables en a.
Alors on commence par calculer n' et d' et on calcule si $\frac{n'(x)}{d'(x)}$ admet une limite pour $x \to a$.
On peut alors appliquer la règle de L'Hospital.

4. Dérivation de fonctions réelles à valeurs complexes

4.1. Fonctions à valeurs complexes

Aparté. L'exponentielle complexe

Définition - Exponentielle complexe
Soit $z \in \mathbb{C}$. On définit l'exponentielle complexe de z par

$$\exp z = e^z = e^{\mathfrak{Re}(z)} e^{i\mathfrak{Im}(z)}.$$

Son module est $e^{\mathfrak{Re}(z)}$ et un argument est $\mathfrak{Im}(z)$.

Proposition - Elargissement
On retrouve les propriétés classiques de l'exponentielle :
— L'exponentielle complexe coïncide bien avec l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ pour les réels ou avec l'exponentielle des imaginaires purs.
— Pour $(z,z')\in\mathbb{C}^2$, on a : $e^{z+z'}=e^ze^{z'}$ et $\frac{1}{e^z}=e^{-z}$.

Démonstration

Exercice
1. Résoudre $e^z=1$.
2. Résoudre $e^z=1-i\sqrt{3}$.
3. Résoudre plus généralement $e^z=z_0$
4. Déterminer l'image d'une droite d'équation $x=a$ par l'application $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$.
5. Déterminer l'image d'une droite d'équation $y=b$ par l'application $\exp:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*$.

Proposition - Résolution d'équation
— Pour $(z,z')\in\mathbb{C}^2$, $\exp z=\exp z'$ si et seulement si $z-z'\in 2i\pi\mathbb{Z}$.
— Tout complexe $z_0\neq 0$ peut s'écrire sous la forme $\exp z$.

Démonstration

Fonctions d'une variable réelle, à valeurs complexes

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition - Dérivation d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$
Soient $f_1:I\to\mathbb{R}$ et $f_2:I\to\mathbb{R}$. On pose : $\forall x\in I,\ f(x)=f_1(x)+i f_2(x)$.
$f:I\to\mathbb{C}$ est une fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ *(si I n'est pas précisé au départ, son domaine de définition est l'intersection de ceux de f_1 et f_2).*
On définit les fonctions $\mathfrak{Re}(f)$ (partie réelle de f) et $\mathfrak{Im}(f)$ (partie imaginaire de f) à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$\mathfrak{Re}(f)=f_1:\begin{array}{ll} I & \to\mathbb{R}\\ x & \mapsto \mathfrak{Re}(f(x))\end{array}\qquad \mathfrak{Im}(f)=f_2:\begin{array}{ll} I & \to\mathbb{R}\\ x & \mapsto \mathfrak{Im}(f(x))\end{array}$$

On dit que f est continue sur I si f_1 et f_2 sont continues sur I.

Attention - Croissance sur $\mathbb{C}$?
Parler de croissance (ou de décroissance) d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ n'a pas de sens.

Exemple - $t \mapsto e^{it}$

Analyse - Justifions que sa base est bien e^i

4.2. Dérivation d'une fonctions d'une variable réelle, à valeurs complexes

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition - Dérivation d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, une fonction à valeurs complexes.
Soient $f_1 : I \to \mathbb{R}$ et $f_2 : I \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I$, $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$.
On dit que f est dérivable, respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si f_1 et f_2 sont dérivables, respectivement de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Si f est dérivable sur I, on définit sa dérivée par :

$$\forall x \in I, \quad f'(x) = f_1'(x) + i f_2'(x).$$

On note $\mathscr{C}(I,\mathbb{C})$ (resp. $\mathscr{C}^1(I,\mathbb{C})$) l'ensemble des fonctions continues (resp. de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans $\mathbb{C}$).

Remarque - Commutativité de la dérivation complexe et de la partie réelle ou imaginaire
Si f à valeurs complexes est dérivable on a donc $(\mathfrak{Re}(f))' = \mathfrak{Re}(f')$ et $(\mathfrak{Im}(f))' = \mathfrak{Im}(f')$.

Proposition - Constance et dérivation
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur I. Alors f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.

Pour la démonstration, on admet ces résultats pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Démonstration

4.3. Propriétés

Attention - Croissance sur $\mathbb{C}$?
Parler de croissance (ou de décroissance) d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ n'a pas de sens.

Proposition - Opérations
Soient f et g deux fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Alors $f+g$, fg et αf sont dérivables sur I et

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad (f+g)'(x) &= f'(x) + g'(x) \\ (fg)'(x) &= f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \\ (\alpha f)' &= \alpha f' \end{aligned}$$

Si g ne s'annule pas, alors $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables sur I et

$$\begin{aligned} \forall x \in I, \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x) &= \frac{-g'(x)}{g(x)^2} \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \end{aligned}$$

Exercice
Faire les démonstration.
Il suffit d'exploiter la commutativité entre dérivation et partie réelle ou imaginaire.

4.4. Composition avec l'exponentielle complexe

Théorème - Dérivée de l'exponentielle complexe
Soit $\phi : I \to \mathbb{C}$ dérivable sur I. Alors

$$\psi : \begin{array}{ll} I & \to \mathbb{C} \\ x & \mapsto e^{\phi(x)} \end{array}$$

est dérivable sur I et : $\forall x \in I, \quad \psi'(x) = \phi'(x)e^{\phi(x)}$

Démonstration

Attention - i joue un rôle comparable à celle d'un nombre réel
On fera bien attention à ne pas oublier le i dans la dérivation !

Exercice
Calculer la dérivée $f : x \mapsto (\arcsin(x))e^{2x+ix^2}$.

Application - Fonction polaire

5. Bilan

Synthèse

- ⇝ Au voisinage d'un point, on peut regarder comment la fonction évolue : c'est la valeur de la dérivée en ce point qui nous l'indique. On associe alors (si possible) f une nouvelle fonction : celle qui donne la valeur de dérivée en tout point. MIRACLE. Le passage $f \to f'$ se décrit très bien en terme d'algorithme (sans avoir à passer par le nombre dérivée). Il faut donc apprendre des tas de règles de calculs (à démontrer, par ailleurs...).

- $\rightsquigarrow$ Ainsi plusieurs fonctions de référence sont à connaître : exponentielle(s) et logarithme(s) en toute base; les fonctions puissances; les fonctions circulaires (sin, arccos...) et hyperboliques directes. On doit savoir comment comparer ces fonctions lorsqu'elles sont en compétition au voisinage de point problématique.
- $\rightsquigarrow$ Le théorème de la bijection est un résultat important. Il faut le connaître, même si pour l'heure la démonstration nous échappe sans une définition précise de la continuité (et donc de $\mathbb{R}$).
- $\rightsquigarrow$ En retour, la fonction dérivée permet de mieux comprendre localement la fonction. On peut alors étudier des variations, faire de l'optimisation (locale) ou lever des indéterminations (pour du calcul de limite).
- $\rightsquigarrow$ Les fonctions complexes de la variables réelles s'étudient de la même façon (même si la représentation est plus complexe). En fait, ce qui compte, c'est la nature de la variable « de départ ».

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- — Truc & Astuce pour le calcul - A propos de la tangente
- — Savoir-faire - Encadrement pour le calcul de limite
- — Savoir-faire - Transférer un problème exponentiel de « en a » vers « en 0 ».
- — Savoir-faire - Transférer un problème logarithme « en a » vers « en 1 ».
- — Savoir-faire - Transférer un problème trigonométrique « en a » vers « en 0 ».
- — Savoir-faire - Bilan : f $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme
- — Savoir-faire - Obtenir une inégalité
- — Savoir-faire - Obtenir un maximum (dérivation)
- — Savoir-faire - Lever une indétermination par la règle de L'Hospital
- — Savoir-faire - Etude des branches infinies (et définition)

Retour sur les problèmes

19. On a une fonction $A(a_0+e)$ qui donne l'aire en fonction de a_0+e. Elle est optimale en a_0 lorsque $A(a_0-\epsilon)<A(a_0)$ et $A(a_0+\epsilon)<A(a_0)$ avec $\epsilon>0$.
    Le calcul $A(a_0+e)$ donne exactement $A(a_0)+eA'(a_0)+\dots$. On trouve, avec la méthode de Fermat : $A'(a_0)=0$, ce qui donne bien l'optimal de A.
20. Il faut nécessairement que $\text{Résultat}'(\text{Action})=0$, ce qui conduit à une équation donc la valeur recherchée Action_0 est solution. Malheureusement, la condition bien que nécessaire n'est pas suffisante.
21. C'est un vrai miracle que cela soit aussi simple (et que le tableau ne soit pas plus compliqué...).
    A moins que cela soit l'inverse : c'est parce que $y'=y$ se rencontre partout que l'exponentielle est si importante...
22. Cours
23. C'est le but de la formule de L'Hospital.
24. On vient de terminer ce chapitre en répondant à cette question.