Devoir semaine de la sortie
CORRECTION

Problème 55

Partie A

1. On démontre la propriété en trois temps (comme toujours) :
   — Pour tout A, $A = I_n^{-1} \times A \times I_n$, donc avec $P = I_n$, on a $A \sim A$.
   La relation est reflexive.
   — Soient A, B, tels que $A \sim B$.
   Donc il existe P telle que $A = P^{-1} \times B \times P$.
   En multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} : $B = PAP^{-1}$.
   Et donc avec $P' = P^{-1}$ et donc $P'^{-1} = P$, on a $B \sim A$.
   La relation est symétrique.
   — Soient A, B, C, tels que $A \sim B$ et $B \sim C$.
   Donc il existe P, Q telle que $A = P^{-1} \times B \times P$ et $B = Q^{-1} \times C \times Q$.
   Et ainsi : $A = P^{-1}Q^{-1} \times C \times QP$.
   Et comme $(QP)^{-1} = P^{-1}Q^{-1}$, on peut affirmer $A \sim C$.
   La relation est transitive.
   $\boxed{\sim \text{ est bien une relation d'équivalence}}$

2. Soients A et B, semblables. Alors
   $$\det(A) = \det(P^{-1}BP) = \det(P^{-1}) \det B \det P = (\det P)^{-1} \times \det P \times \det B = \det B$$
   Donc si deux matrices sont semblables, elles ont nécessairement le même déterminant.
   La contraposée affirme :
   $$\boxed{\text{si deux matrices n'ont pas le même déterminant alors elles ne peuvent être semblables}}$$

3. $w : \text{Ker } u^{i+j} \to E$, $x \mapsto u^j(x)$.
   (a) Soit $y \in \text{Im } w$, donc il existe $x \in \text{Ker } u^{i+j}$ tel que $y = u^j(x)$.
   Alors $u^i(y) = u^i(i^j(x)) = u^{i+j}(x) = 0$, car $x \in \text{Ker } u^{i+j}$.
   Donc $y \in \text{Ker } u^i$.
   $$\boxed{\text{Im } w \subset \text{Ker } u^i}$$
   (b) On applique alors le théorème du rang à w :
   $$\dim \text{Ker } u^{i+j} = \dim(\text{Im } w) + \dim(\text{Ker } w)$$
   Or $\text{Im } w \subset \text{Ker } u^i$, donc $\dim(\text{Im } w) \leqslant \dim(\text{Ker } u^i)$ Alors que
   $$x \in \text{Ker } w \Longleftrightarrow x \in \text{Ker } u^{i+j} \text{ et } u^j(x) = 0 \Longleftrightarrow x \in \text{Ker } u^j \cap \text{Ker } u^{i+j}$$
   Donc $\text{Ker } w = \text{Ker } u^j \cap \text{Ker } u^{i+j}$.
   Or si $x \in \text{Ker } u^j$, on a $u^j(x) = 0$, donc $u^{i+j}(x) = u^i(u^j(x)) = u^i(0) = 0$, donc $x \in \text{Ker } u^{i+j}$.
   donc $\text{Ker } u^j \subset \text{Ker } u^{i+j}$ et donc $\text{Ker } w = \text{Ker } u^j \cap \text{Ker } u^{i+j} = \text{Ker } u^j$ Donc
   $$\boxed{\dim(\text{Ker } u^{i+j}) \leqslant \dim(\text{Ker } u^i) + \dim(\text{Ker } u^j)}$$

4. $u^3 = 0$ et $\text{rg } u = 2$.
   (a) Avec $i = 2$ et $j = 1$:
   $$3 = \dim E = \dim \text{Ker } 0 = \dim(\text{Ker } u^3) = \dim(\text{Ker } u^{i+j})$$
   et
   $$\dim(\text{Ker } u^2) + \dim(\text{Ker } u^1) = \dim \text{Ker } u^2 + (3 - \text{rg } (u)) = \dim \text{Ker } u^2 + 1$$
   En appliquant 3(b) : $3 \leqslant \dim \text{Ker } u^2 + 1$, donc $\dim \text{Ker } u^2 \geqslant 2$.
   Avec $i = 1$ et $j = 1$
   $$\dim \text{Ker } u^2 \leqslant 2 \dim \text{Ker } u = 2(3 - \text{rg } (u)) = 2$$
   $$\boxed{\text{Par double inégalité : } \dim \text{Ker } u^2 = 2.}$$

(b) On a donc, en appliquant le théorème du rang : rg $(u^2) = \dim E - \dim \operatorname{Ker} u^2 = 3 - 2 = 1$.
Donc il existe $a \in E$ tel que $u^2(a)$ est non nul (sinon Im $u^2 = \{0\}$ de dimension 0).
Soient λ, μ, ν tel que $\lambda u^2(a) + \mu u(a) + \nu a = 0$.
En composant par u^2 : $\lambda u^4(a) + \mu u^3(a) + \nu u^2(a) = u^2(0) = 0$.
Or $u^3 = 0$, donc $u^4(a) = u^3(a) = 0$ et donc $\nu u^2(a) = 0$.
Et comme $u^2(a) \neq 0$, nécessairement $\nu = 0$.
On a donc $\lambda u^2(a) + \mu u(a) = 0$. On compose maintenant par u : $\lambda u^3(a) + \mu u^2(a) = \mu u^2(a) = 0$, donc $\mu = 0$ (comme précédemment).
Il reste $\lambda u^2(a) = 0$, donc $\lambda = 0$.
Ainsi la famille $(u^2(a), u(a), a)$ est libre.
C'est une famille de 3 éléments, libre dans E de dimension 3, donc

$$\boxed{(u^2(a), u(a), a) \text{ est une base de } E}$$

(c) Comme $u(u^2(a)) = 0$, $u(u(a)) = u^2(a)$ et $u(a) = u(a)$;
et $(u^2 - u)(u^2(a)) = 0$, $(u^2 - u)(u(a)) = -u^2(a)$ et $(u^2 - u)(a) = u^2(a) - u(a)$;
on peut écrire

$$\boxed{\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u^2 - u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

5. $u^2 = 0$ et rg $u = 1$.

(a) On a donc rg $(u) = 1$.

$$\boxed{\text{Donc il existe } b \in E \text{ tel que } u(b) \text{ est non nul.}}$$

(sinon Im $u = \{0\}$ de dimension 0).

(b) $u^2(b) = 0$, donc $u(b) \in \operatorname{Ker} u$.
Mais Ker u est de dimension $3 - \text{rg}\,(u) = 2$. D'après le théorème de la base incomplète :

$$\boxed{\text{il existe } c \in \operatorname{Ker} u \text{ tel que } (u(b), c) \text{ libre.}}$$

Soient λ, μ, ν tel que $\lambda b + \mu u(b) + \nu c = 0$.
En composant par u : $\lambda u(b) + \mu u^2(b) + \nu u(c) = u(0) = 0$.
Or $u^2(b) = 0$ et $u(c) = 0$ $\lambda u(b) = 0$.
Et comme $u(b) \neq 0$, nécessairement $\lambda = 0$.
On a donc $\mu u(b) + \nu c = 0$.
Or, par construction de c, la famille $(u(b), c)$ est libre,
Donc $\mu = \nu = 0$, Ainsi la famille $(b, u(b), c)$ est libre.
C'est une famille de 3 éléments, libre dans E de dimension 3, donc

$$\boxed{(b, u(b), c) \text{ est une base de } E}$$

(c) Comme $u(b) = u(b)$, $u(u(b)) = u^2(b) = 0$, et $u(c) = 0$;
et $(u^2 - u)(b) = -u(b)$, $(u^2 - u)(u(b)) = 0$ et $(u^2 - u)(c) = 0$;
on peut écrire

$$\boxed{\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u^2 - u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Partie B

6. $\det(T) = 1$, car T est triangulaire supérieure, donc son déterminant est la produit des termes sur la diagonale.
Et comme T et A sont semblables, elles ont le même déterminant.

$$\boxed{\text{Donc } \det A \neq 0 \text{ et donc } A \text{ est inversible}}$$

7. $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Puis, comme I_3 commute avec N :

$$(I_3 + N)(I_3 - N + N^2) = I_3 + N - N + N^2 - N^2 - N^3 = I_3$$

Donc

$$\boxed{I_3 - N + N^2 = (I_3 + N)^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} = P^{-1}AP}$$

8. Si $N=0$, alors A et A^{-1} sont toutes deux semblables à I_3.
Or la relation de similitude est transitive (et symétrique), donc

$$\boxed{\text{si } N=0,\ A \text{ et } A^{-1} \text{ sont semblables}}$$

9. rg $(N)=2$ et $M=N^2-N$.
   (a) On considère u l'endomorphisme associée à N dans une base $\mathcal{B}$ de E.
   Alors rg $(u)=2$ et on note $v=u^2-u$, on a donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)=M$ (et $M_{\mathcal{B}}(u)=N$).
   Par ailleurs $N^3=0$, donc $u^3=0$, et donc u vérifie les condition de 4.
   Ainsi, il existe une base $\mathcal{B}'$, tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.
   D'après la remarque initiale (avec P changement de base), on a donc

$$\boxed{N \text{ semblable à } \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}$$

   Avec les mêmes matrices de passage (même changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$) :

$$\boxed{M \text{ semblable à } \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(v)=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}}$$

   (b) En exploitant la matrice semblable à M, on trouve

$$\boxed{M^3=0 \text{ et rg } (M)=2}$$

   (c) On peut alors appliquer à v le résultat de la question 4 et donc il existe $\mathcal{B}''$, une nouvelle base de E tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}''}(v)=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)$.

$$\boxed{\text{Donc } M \text{ et } N \text{ sont semblables}}$$

   (d) D'après la question précédente, il existe donc Q inversible telle que $N=Q^{-1}MQ$.
   Donc

$$A=P(I_3+N)P^{-1}=PP^{-1}+PNP^{-1}=I_3+PQ^{-1}MQP^{-1}=PQ^{-1}(I_3+M)QP^{-1}=PQ^{-1}A^{-1}(PQ^{-1})^{-1}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } A \text{ et } A^{-1} \text{ sont semblables.}}$$

10. Notons d'abord que si α et γ sont non nuls, alors rg $(N)=2$.
Comme ceci est faux, alors α ou γ est nul, donc $\alpha\times\gamma=0$ et donc $N^2=0$.
On applique le même raisonnement que précédemment :
— On considère u associée à N dans une base $\mathcal{B}$ de E, donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)=N$.
— On note $v=u^2-u$, donc $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(v)=N^2-N=M$
— On applique 5. à u (qui vérifie les même propriétés que N),
donc il existe $\mathcal{B}'$ tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)=U'$, semblable à N par construction.
— Dans ce cas $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(v)=V'$
— Et V' vérifie les même propriété que N : rg $(V')=1$, $V'^2=0$,
Donc il existe une base $\mathcal{B}''$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}''}(v)=U'=\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)$
— Enfin par transitivité : N est semblable à U' et M est semblable à V', semblable à U'.
Donc N est semblable à M.
— Enfin, on a encore :

$$A=P(I_3+N)P^{-1}=PP^{-1}+PNP^{-1}=I_3+PQ^{-1}MQP^{-1}=PQ^{-1}(I_3+M)QP^{-1}=PQ^{-1}A^{-1}(PQ^{-1})^{-1}$$

$$\boxed{\text{Ainsi } A \text{ et } A^{-1} \text{ sont semblables.}}$$

11. (a) $\mathcal{M}_{(a,b,c)}(u-\mathrm{id}_E)=A-I_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$ On a donc $(u-\mathrm{id}_E)(a)=0$, alors que $(u-\mathrm{id}_E)(b-c)=0$.
   Donc la famille libre $(a,b-c)$ est incluse dans Ker $(u-\mathrm{id}_E)$ et dim(Ker $(u-\mathrm{id}_E)) \geqslant 2$
   Par ailleurs, $A-I_3\neq 0$, donc rg $(u-\mathrm{id}_E)\neq 0$, donc rg $(u-\mathrm{id}_E)\geqslant 1$.
   Ce qui donne avec le théorème du rang : dim(Ker $(u-\mathrm{id}_E)) \leqslant 3-1=2$.

$$\boxed{\text{Ansi, dim(Ker } (u-\mathrm{id}_E))=2 \text{ et } (a,b-c) \text{ est une base de Ker } (u-\mathrm{id}_E))}$$

(b) $\lambda a + \mu(b-c) + \nu c = 0 \Rightarrow \lambda a + \mu b + (\nu - \mu)c = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = \mu - \nu = 0$ car (a,b,c) libre.
Et donc $\lambda = 0 = \mu = \nu$, donc $(a, b-c, c)$ est une famille libre de E, donc une base ($\dim E = 3$).
On a alors $u(a) = a$, $u(b-c) = u(b) - u(c) = c + b - 2c = b - c$ et $u(c) = -b + 2c = -(b-c) + c$

$$\boxed{\mathcal{M}_{(a,b-c,c)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

(c) On se trouve alors dans la situation de la question 10, avec $\alpha = \beta = 0$ et $\gamma = -1$.
On peut donc appliquer la conclusion

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ sont semblables}}$$

12. Non. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = I_3$, donc $A = A^{-1}$.
Ainsi, clairement, A et A^{-1} sont semblables.
Puis $\det(A) = -1$ alors que $\det(T) = 1$, donc A et T ne sont pas semblables.

$$\boxed{\text{Une matrice semblable à son inverse n'est pas nécessairement semblable à } T}$$

Problème - Le problème des surjections

A. Observations

Nous essayons de faire ce dénombrement à partir d'ensembles simples.

1. Les définition du cours sont les suivantes :
Soient E et F deux ensembles.
On dit que f est une

$$\boxed{\text{application de } E \text{ dans } F}$$

si f fait correspondre à tout élément de E un unique élément de F.
On dit que f est une

$$\boxed{\text{application surjective de } E \text{ dans } F}$$

si pour tout y de F, il existe x dans E tel que $f(x) = y$.

2. Nous savons que si f est une surjection de E dans F, alors nécessairement $\text{card} F \leqslant \text{card} E$.
Donc

$$\boxed{\text{si } n < p, \text{ il ne peut y avoir de surjection de } E \text{ sur } F \text{ donc } S(n,p) = 0}$$

3. Nous définissons directement ici les fonctions f surjective de $E = \{x_, x_2, x_3\}$ sur $F = \{y_1, y_2\}$.

$$f_1 : \begin{cases} x_1 & \mapsto & y_1 \\ x_1 & \mapsto & y_1 \\ x_3 & \mapsto & y_2 \end{cases}, \quad f_2 : \begin{cases} x_1 & \mapsto & y_1 \\ x_1 & \mapsto & y_2 \\ x_3 & \mapsto & y_1 \end{cases}, \quad f_3 : \begin{cases} x_1 & \mapsto & y_2 \\ x_1 & \mapsto & y_1 \\ x_3 & \mapsto & y_1 \end{cases},$$

$$f_4 : \begin{cases} x_1 & \mapsto & y_2 \\ x_1 & \mapsto & y_2 \\ x_3 & \mapsto & y_1 \end{cases}, \quad f_5 : \begin{cases} x_1 & \mapsto & y_2 \\ x_1 & \mapsto & y_1 \\ x_3 & \mapsto & y_2 \end{cases}, \quad f_6 : \begin{cases} x_1 & \mapsto & y_1 \\ x_1 & \mapsto & y_2 \\ x_3 & \mapsto & y_2 \end{cases}$$

On a donc

$$\boxed{S(3,2) = 6}$$

4. Soit f est une surjection de E sur F avec $\text{card}(E) = \text{card}(F) = n$.
Alors si x_1 et x_2 sont deux éléments de E différents Si $f(x_1) = f(x_2)$,
sinon $\text{card}\big(f(E)\big) < \text{card}(E)$ et comme f est surjective : $f(E) = F$ donc $\text{card}F < \text{card}E$.
nous avons une contradiction donc $f(x_1) \neq f(x_2)$ Donc $\forall\ x_1, x_2 \in E$, $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ donc f est injective et donc bijective.
Ainsi, dans le cas $\text{card}(E) = \text{card}(F) = n$, si f est une surjection de E dans F, c'est une bijection.
Réciproquement, si f est bijective, alors elle est nécessairement surjective.
Par conséquent, dans le cas $\text{card}(E) = \text{card}(F) = n$, l'ensemble des applications surjective est exactement l'ensemble des applications bijectives.
Or nous savons qu'il y a $n!$ bijections de E sur F (comme les permutations). Bilan :

$$\boxed{S(n,n) = n!}$$

Dans le cas où $\text{card}(F) = 1$, il n'existe qu'une application : celle qui à tout élément de E associe l'élément de F. Par ailleurs cette application est surjective. Donc

$$\boxed{S(n,1) = 1}$$

Dans le cas où $\text{card}(F) = 2$, on peut supposer $F = \{y_1, y_2\}$.
Une surjection de E dans F sera parfaitement déterminer par le sous ensemble $f^{-1}(y_1)$ des antécédents de y_1 par F.
Ainsi pour tout sous-ensemble H de E, f sera l'application définie par $f : x \mapsto \begin{cases} y_1 & \text{si } x \in H \\ y_2 & \text{si } x \notin H \end{cases}$.
Cette application sera une surjection si et seulement si $H \neq \emptyset$ (ainsi y_1 a au moins un antécédent) et $H \neq E$ (ainsi y_2 a au moins un antécédent).
Il y a dans ce, autant de surjection de E sur F, que de sous ensemble de E non vide et non E entier.
Or E possède 2^n sous ensemble. Il y a donc

$$\boxed{S(n,2) = 2^n - 2 \text{ surjections de } E \text{ sur } F \text{ si } \text{card}(F) = 2}$$

B. Principe d'inclusion-exclusion

1. A_i est l'ensemble des applications pour lesquelles y_i n'a pas d'antécédent.
   f est surjective $\iff \forall\, i \in \mathbb{N}_p,\ y_i$ admet un antécédent par f.
   $\iff \forall\, i \in \mathbb{N}_p,\ f \notin A_i \iff \forall\, i \in \mathbb{N}_p,\ f \in \overline{A_i}$.
   $\iff f \in \cap_{i=1}^{p} \overline{A_i} \iff f \in \overline{\cup_{i=1}^{p} A_i}$.
   Comment nous avons une équivalence, nous pouvons affirmer que :

   $$\boxed{\text{l'ensemble des applications surjectives de } E \text{ dans } F \text{ est } \overline{\cup_{i=1}^{p} A_i}.}$$

2. Il s'agit d'une formule du cours :

   $$\boxed{\text{il y a } (p-q)^n \text{ applications de } E \text{ dans un ensemble } G \text{ de cardinal } p-q}$$

3. Soit $\{i_1, i_2 \dots i_q\} \in \binom{\mathbb{N}_p}{q}$,
   $A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_q}$ est l'ensemble des applications de E dans $G = \big\{y_j \in F \mid j \notin \{i_1, i_2 \dots i_q\}\big\}$, puisque dans ce cas $y_{i_1},\ y_{i_2}, \dots y_{i_q}$ n'admettent pas d'antécédent par f.
   G est un fait le complémentaire de $\{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots y_{i_q}\}$ donc le cardinal recherché est égal au nombre d'applications de E dans ce G, avec $\text{card}(G) = p - q$.
   Ainsi,

   $$\boxed{\text{pour tout } \{i_1, i_2 \dots i_q\} \in \binom{\mathbb{N}_p}{q},\ \text{card}\big(A_{i_1} \cap A_{i_2} \dots \cap A_{i_q}\big) = (p-q)^n}$$

4. $(A_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ est une famille de sous ensembles de $\mathcal{A}(E,F)$, fini.
   Donc, on peut appliquer le crible de Poincaré, il vient :

   $$\boxed{\text{card}\Big(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\Big) = \sum_{h=1}^{p} (-1)^{h-1} \Big(\sum_{\{i_1, i_2 \dots i_h\} \in \binom{N_p}{h}} \text{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_h}) \Big)}$$

5. D'après la première question :
   $S(n,p) = \text{card}(\overline{\bigcup_{i=1}^{p} A_i}) = \text{card}\big(\mathcal{A}(E,F)\big) - \text{card}(\bigcup_{i=1}^{p} A_i)$.
   Or $\text{card}\big(\mathcal{A}(E,F)\big) = p^n$, formule du cours.
   Et d'après la question 4 : $\text{card}\Big(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\Big) = \sum_{h=1}^{p} (-1)^{h-1} \Big(\sum_{\{i_1, i_2 \dots i_h\} \in \binom{N_p}{h}} \text{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_h}) \Big)$.
   Or d'après 3 : si $\{i_1, i_2 \dots i_h\} \in \binom{N_p}{h}$, $\text{card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_h}) = (p-h)^n$.
   Donc $\text{card}\Big(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\Big) = \sum_{h=1}^{p} (-1)^{h-1} \Big(\sum_{\{i_1, i_2 \dots i_h\} \in \binom{N_p}{h}} (p-h)^n \Big)$,
   et $\displaystyle\sum_{\{i_1, \dots i_h\} \in \binom{N_p}{h}} (p-h)^n = (p-h)^n \sum_{\{i_1, i_2 \dots i_h\} \in \binom{N_p}{h}} 1 = (p-h)^n \times \text{card}(\binom{N_p}{h}) = (p-h)^n \binom{p}{h}$

Donc

$$\boxed{S(n,p) = p^n - \left(\sum_{h=1}^{p}(-1)^{h-1}\binom{p}{h}(p-h)^n\right) = p^n + \left(\sum_{h=1}^{p}(-1)^{h}\binom{p}{h}(p-h)^n\right).}$$

De plus, pour $h=0$: $(-1)^h\binom{p}{h}(p-h)^n = (-1)^0\binom{p}{0}(p-h)^n = p^h$,

on peut tout regrouper sous une même forme : $S(n,p) = \displaystyle\sum_{h=0}^{p}(-1)^h\binom{p}{h}(p-h)^n$.

Enfin, en faisant le changement de variable $k = p-h \Leftrightarrow h = p-k$, on a :

$$S(n,p) = \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{p-k}k^n = (-1)^p\sum_{k=0}^{p}(-1)^{-k}\binom{p}{k}k^n.$$

car $\binom{p}{p-k} = \binom{p}{k}$ et comme k et $-k$ ont même parité : $(-1)^{-k} = (-1)^k$.

Par conséquent,

$$\boxed{S(n,p) = (-1)^p\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n}$$

C. Formule d'inversion de Pascal

Nous allons obtenir la même formule par une autre méthode.

1. Soit $q \in \{0,1,\dots,p-1\}$.

$$\binom{p}{k}\binom{k}{q} = \frac{p!\,k!}{k!(p-k)!q!(k-q)!} = \frac{p!}{(p-k)!q!(k-q)!} = \frac{p!\,(p-q)!}{(p-q)!(p-k)!q!(k-q)!}$$

$$= \frac{p!}{q!(p-q)!}\times\frac{(p-q)!}{(k-q)!(p-k)!} = \binom{p}{q}\binom{p-q}{p-k} \text{ car } (p-q)-(k-q) = p-k.$$

Et $(-1)^q \times (-1)^{k-q} = (-1)^k$.

Donc

$$\boxed{(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q} = (-1)^q\binom{p}{q}\times\binom{p-q}{k-q}(-1)^{k-q}}$$

Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=q}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q} = \sum_{k=q}^{p}(-1)^q\binom{p}{q}\times\binom{p-q}{k-q}(-1)^{k-q} = (-1)^q\binom{p}{q}\times\sum_{k=q}^{p}\binom{p-q}{k-q}(-1)^{k-q}$

Faisons le changement de variables : $h = k-q \Leftrightarrow k = h-q$ dans la somme,

$\displaystyle\sum_{k=q}^{p}\binom{p-q}{k-q}(-1)^{k-q} = \sum_{h=0}^{p-q}\binom{p-q}{h}(-1)^h = (-1+1)^{p-q} = 0$ (formule du binôme de Newton).

Par conséquent :

$$\boxed{\sum_{k=q}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q} = (-1)^q\binom{p}{q}\times 0 = 0}$$

2. Nous allons calculer calculer de deux faÁons $\operatorname{card}\big(\mathcal{A}(E,F)\big)$

1. D'après une formule du cours : $\operatorname{card}\big(\mathcal{A}(E,F)\big) = \operatorname{card}(F)^{\operatorname{card}(E)} = p^n$.

2. Autre méthode : si $f \in \mathcal{A}(E,F)$, alors f est parfaitement déterminée par :

— $f(E)$, le sous ensemble de F

— puis par la surjection de E dans $f(E)$

Il y a donc autant d'applications de E dans F que de choix de H, sous ensemble de F puis pour chaque H (donc multiplié) de choix de surjections de E dans H.

De plus si $\operatorname{card}(H_1) = \operatorname{card}(H_2)$, il y a autant de surjections de E sur H_1 que de E sur H_2. On peut donc raisonner selon le cardinal de H noté q, qui varie entre 0 et $p(=\operatorname{card}(F))$.

Ainsi $\operatorname{card}\big(\mathcal{A}(E,F)\big) = \sum_{q=0}^{n}\binom{p}{q}S(n,q)$

Par conséquent,

$$\boxed{\operatorname{card}\big(\mathcal{A}(E,F)\big) = p^n = \sum_{q=0}^{p}\binom{p}{q}S(n,q).}$$

3. Calculons $S = (-1)^p\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n$ en remplaÁant k^n par la formule du 3..

$$S = (-1)^p\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}k^n = (-1)^p\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\sum_{q=0}^{k}\binom{k}{q}S(n,q) = (-1)^p\sum_{k=0}^{p}\sum_{q=0}^{k}(-1)^k\binom{p}{k}\binom{k}{q}S(n,q)$$

Or (sommation dans un triangle) : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\sum_{q=0}^{k} a(p,k,q) = \sum_{q=0}^{p}\sum_{k=q}^{p} a(p,k,q)$.

Donc $S = (-1)^p \displaystyle\sum_{q=0}^{p}\sum_{k=q}^{p}(-1)^k \binom{p}{k}\binom{k}{q} S(n,q) = (-1)^p \sum_{q=0}^{p} S(n,q) \sum_{k=q}^{p}(-1)^k \binom{p}{k}\binom{k}{q}$.

Or d'après la formule trouvée en 1. : $\displaystyle\sum_{k=q}^{p}(-1)^k \binom{p}{k}\binom{k}{q} = 0$ si $q \in \{0,1,\ldots,p-1\}$,

$$\text{et si } q=p,\ \sum_{k=q}^{p}(-1)^k \binom{p}{k}\binom{k}{q} = \sum_{k=p}^{p}(-1)^k \binom{p}{k}\binom{k}{p} = (-1)^p \binom{p}{p}\binom{p}{p} = (-1)^p,$$

donc $S = (-1)^p \Big(\displaystyle\sum_{q=0}^{p-1} (S(n,q)\times 0) + S(n,p)(-1)^p \Big) = \big((-1)^2\big)^p S(n,p) = S(n,p)$

Finalement :

$$\boxed{S = S(n,p) = (-1)^p \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \binom{p}{k} k^n}$$

D. Table du nombre de surjections

On suppose acquis le résultat suivant :

$$\forall\, n,p \in \mathbb{N}^*,\ p \leqslant n,\ S(n,p) = (-1)^p \sum_{k=0}^{p}(-1)^k \binom{p}{k} k^n$$

1. Soient $n, p \in \mathbb{N}$ tels que , $2 \leqslant p \leqslant n$.

   alors $T = S(n-1,p)+S(n-1,p-1) = (-1)^p \displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^k \binom{p}{k} k^{n-1} + (-1)^{p-1}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k \binom{p-1}{k} k^{n-1}$

   $$= (-1)^p \Big(\underbrace{(-1)^p \binom{p}{p} p^{n-1}}_{\text{cas } k=p} + \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k \binom{p}{k} k^{n-1} - \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k \binom{p-1}{k} k^{n-1} \Big)$$

   $$= (-1)^p \Big((-1)^p p^{n-1} + \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k k^{n-1} \Big[\binom{p}{k} - \binom{p-1}{k} \Big] \Big)$$

   Or $\displaystyle\binom{p}{k} - \binom{p-1}{k} = \binom{p-1}{k-1}$ car $\displaystyle\binom{p}{k} = \binom{p-1}{k-1} + \binom{p-1}{k}$.

   donc $T = (-1)^p \Big((-1)^p p^{n-1} + \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k k^{n-1} \binom{p-1}{k-1} \Big)$

   Puis $p \times T = (-1)^p \Big((-1)^p p^n + \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k k^{n-1} p \binom{p-1}{k-1} \Big)$.

   Et comme $p\displaystyle\binom{p-1}{k-1} = \frac{p\times(p-1)!}{(k-1)!(p-k)!} = k\frac{p!}{k!(p-k)!} = k\binom{p}{k}$ et $\displaystyle\binom{p}{p} = 1$, on a :

   $p \times T = (-1)^p \Big((-1)^p \displaystyle\binom{p}{p} p^n + \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k k^n \binom{p}{k} \Big) = (-1)^p \Big(\sum_{k=0}^{p}(-1)^k k^n \binom{p}{k} \Big) = S(n,p)$

   Ainsi :

   $$\boxed{\text{si } p,n \geqslant 2,\ S(n,p) = p\big(S(n-1,p) + S(n-1,p-1)\big)}$$

2. D'après la formule précédente : $S(p+1,p) = p\big(S(p,p) + S(p,p-1)\big) = p(p! + S(p,p-1))$. Le terme est définie par récurrence....

   Posons, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_p$:"$S(p+1,p) = p!\displaystyle\binom{p+1}{2}$".

   — $S(2,1) = 1$, d'après $A.4.$ et $1!\binom{2}{2} = 1$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

   — Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_p$ est vraie.

   Alors comme $S(p+2,p+1) = (p+1)\big((p+1)! + S(p+1,p)\big) = (p+1)\Big((p+1)! + p!\displaystyle\binom{p+1}{2}\Big)$.

   $S(p+2,p+1) = (p+1)p!\Big((p+1) + \dfrac{(p+1)p}{2}\Big) = (p+1)!(p+1)\Big(1+\dfrac{p}{2}\Big) = (p+1)!(p+1)\dfrac{p+2}{2}$

   donc $S(p+2,p+1) = (p+1)!\displaystyle\binom{p+2}{2}$ et donc $\mathcal{P}_{p+1}$ est vraie.

   La récurrence est démontrée et donc :

   $$\boxed{\forall\ p \geqslant 1,\ S(p+1,p) = p!\binom{p+1}{2}}$$

3. Nous écrirons deux nombres par case : celui obtenu par addition comme pour le triangle de Pascal (en petit), puis celui obtenu par la multiplication par p. C'est ce dernier qui est le nombre $S(n, p)$.

$n\backslash p$	1	2	3	4	5	6	7
1	^{1} 1						
2	^{1} 1	^{1} 2					
3	^{1} 1	^{3} 6	^{2} 6				
4	^{1} 1	^{7} 14	^{12} 36	^{6} 24			
5	^{1} 1	^{15} 30	^{50} 150	^{60} 240	^{24} 120		
6	^{1} 1	^{31} 62	^{180} 540	^{390} 1560	^{360} 1800	^{120} 720	
7	^{1} 1	^{63} 126	^{602} 1806	^{2100} 8400	^{3360} 16 800	^{2520} 15 120	^{720} 5040

On retrouve sur la deuxième colonne le résultat : $S(n, 2) = 2^n - 2$

4. Une distribution acceptable correspond exactement à une application surjective de l'ensemble des 7 pions sur l'ensemble des 4 cases, puisqu'aucune case ne doit être vide.

Il y a donc $S(7, 4) = 8400$ distributions différentes de ces 7 pions sur le damier, de manière à ce qu'aucune case ne soit vide (d'après le tableau).