Chapitre 6

Fonctions primitives et équations différentielles

Résumé -

Dans ce chapitre, le point de vue adopté est celui de Newton et Leibniz puis Euler, qui font de l'intégration l'opération inverse de la dérivation, c'est-à-dire que si f est une fonction définie sur I intervalle de $\mathbb{R}$ contenant a et b, admettant une primitive F, on définit l'intégrale de a à b de f par $\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a) = \Big[F(t)\Big]_a^b$.
Par propriétés de la dérivation (linéarité et primitivation d'inégalités), on obtient la linéarité et la croissance de l'intégrale ainsi définie. On s'exercera aussi techniquement pour maitriser ce calcul intégral, le fameux calculus.
Hypothèse forte : on admet toujours qu'une fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I. La démonstration aura lieu plus tard.
Dans la très grande famille des équations différentielles, nous nous concentrons uniquement sur les équations différentielles linéaires d'ordre 1 et les équations différentielles d'ordre 2 à coefficients constants. Cela réduit largement les équations différentielles rencontrées, mais la raison est bonne : ce sont celles que l'on rencontre le plus souvent (à cause de la linéarisation des problèmes physiques) et ce sont celles que l'on sait résoudre (la fonction exponentielle a été crée pour cela).
Quelques liens youtube :

- *Hedacademy - Les primitives. https ://www.youtube.com/watch?v=05ikcAFcPZ0*
- *Exo7 - Equation différentielle - https ://www.youtube.com/watch?v=dkjXofPNMDo*
- *5min Lebesgue - forme idéale - https ://www.youtube.com/watch?v=9x91d0UnBTw*

Sommaire

1. Problèmes

? Problème 25 - Lien primitve/intégrale

Calculer l'aire d'une surface est un « vieux » problème. Par exemple : quelle est l'aire d'une ellipse, d'une lunule ?
Optimiser, trouver un maximum ou un minimum est un autre « vieux » problème des mathématicien.
Existe-t-il un lien (profond, donc) entre les deux ?

? Problème 26 - Problèmes historiques

Galilée affirme en 1638 que la forme d'une chaîne suspendue entre deux clous est presqu'une parabole. Huygens, démontre 20 ans plus tard que ceci est faux. La solution, appelée caténaire (ou chainette) est donnée une vingtaine d'année plus tard par Leibniz et Johann Bernoulli.
Lors du séjour de Leibniz à Paris (1672-1673) durant lequel il suit des cours d'Huygens, Claude Perrault lui pose le problème suivant : *quelle est la courbe qui a la propriété qu'en chacun de ses points P, le segment de la tangente entre P et l'axe x et de longueur constante a ?* Pour concrétiser cette question, Perrault tire de son gousset une “hotlogio portabili suae thecae argenteae" et la fait glisser sur la table. Il précise qu'aucun mathématicien parisien ni toulousain (Fermat) n'a été capable d'en trouver l'équation.

? Problème 27 - Primitivisation des opérations algébriques

Pour le calcul de dérivation, le cours est grossièrement constitué d'un tableau de dérivation usuelle et de trois savoir-faire : comment dériver une addition, comment dériver une multiplication, comment dériver une composition ?
Avec ça, on arrive à tout (ou presque)...
Qu'en est-il de la primitivisation (opération inverse de la dérivation) ? Un tableau semble tout à fait possible, la règle de l'addition semble également bien s'inverser. Mais pour la multiplication ? Et la composition ?
Quelle est la primitive de $f \times g$? Quelle est la primitive de $f \circ g$?

? Problème 28 - Fraction rationnelle

Il est facile d'intégrer (ici, trouver la primitive) de toutes fonctions polynomiales.
Est-il possible d'intégrer toute division de polynôme, c'est-à-dire toute fraction rationnelle ?
Dans le cas d'une forme factorisée, cela donne :
Quelle est une primitive de $x \mapsto \dfrac{P(x)}{(x-a)(x-b)^n(x^2+cx+d)^m}$ avec $c^2-4d<0$?

? Problème 29 - Implication

Si une fonction est dérivable, alors elle est continue. La réciproque est bien entendu fausse.
Existe-t-il un lien entre « admettre une primitive » et « être continue » ?
Comment gère-t-on une fonction non continue ?
Par exemple, existe-t-il une primitive à tan ? Existe-t-il une primitive

continue à tan ?

? Problème 30 - Problème de M. Lagoute

Que dire de $y'' + y = 0$? Tout dire !
C'est le fameux oscillateur harmonique, vu et revu en cours de sciences physiques.

? Problème 31 - Existence. Unicité

Est-ce qu'une équation différentielle admet toujours une, une seule, solution ?
Ce n'est pas le cas de $y'' + y = 0$ qui admet au moins comme solution $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$. En admette-t-elle d'autres ? Peut-on lister toutes les solutions ?
Et alors, quel type de contraintes ajoutées pour obtenir une équation différentielle avec une et une seule solution ?
Et par ailleurs, existe-t-il des équations différentielles sans solution ?

? Problème 32 - Linéarisation

Dans ce cas, nous étudions que des équations différentielles linéaires.
Comment faire lorsque l'équation différentille n'est pas linéaire ? Peut-on revenir au cas précédent ? Par ailleurs, existe-t-il des moyens complémentaires (informatiques, par exemple) pour étudier des équations différentielles variées ?

2. Primitives

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

2.1. Définitions

Définition - Primitives
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. à valeurs dans $\mathbb{C}$). On appelle primitive de f sur I toute fonction F **dérivable** sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. à valeurs dans $\mathbb{C}$) telle que, sur I, $F' = f$.

Proposition - CNS de primitive sur $\mathbb{C}$
$F : I \to \mathbb{C}$ est une primitive de $f : I \to \mathbb{C}$
si et seulement si $\mathfrak{Re} F$ et $\mathfrak{Im} F$ sont des primitives de $\mathfrak{Re} f$ et $\mathfrak{Im} f$ (resp.).

Proposition - Définition à constante additive près
Deux primitives de f sur l'intervalle I diffèrent d'une constante.
C'est-à-dire que si F est une primitive de f sur I alors l'ensemble des primitives de f sur I est

$$\left\{x \mapsto F(x) + C ; C \in \mathbb{K}\right\}$$

où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$).

Démonstration

2.2. Primitives usuelles

En reprenant simplement le tableau de dérivations des fonctions usuelles, on trouve :

Pour aller plus loin - Tableau fini ?
Pour être utile, une table de primitives doit comporter plusieurs centaines de pages. Mentionnons ici celles de Gröbner et Hofreiter (1949) et de Gradshteyn et Ryzhik (1980). Aujourd'hui de nombreux logiciels de calcul symbolique contiennent de telles tables

Proposition - Tableau des primitives usuelles des fonctions à valeurs réelles (1)

fonction	**primitives (C est une constante réelle)**
x^α où $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
e^x	$e^x + C$
$e^{\beta x}$ où $\beta \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$	$\dfrac{e^{\beta x}}{\beta}+C$
$\operatorname{sh}\beta x$ où $\beta \neq 0$	$\dfrac{\operatorname{ch}\beta x}{\beta}+C$
$\operatorname{ch}\beta x$ où $\beta \neq 0$	$\dfrac{\operatorname{sh}\beta x}{\beta}+C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\sin\beta x$ où $\beta \neq 0$	$-\dfrac{\cos\beta x}{\beta}+C$
$\cos\beta x$ où $\beta \neq 0$	$\dfrac{\sin\beta x}{\beta}+C$
$1+\tan^2 x$	$\tan x + C$
$\ln x$	$x\ln x - x + C$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$ ou $-\arccos x + C'$

Proposition - Tableau des primitives usuelles des fonctions à valeurs réelles (2)

fonction f de la forme :	**primitive F**
$u'(x)u(x)^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$	$\dfrac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$
$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + C$
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + C$

Ces formules sont valables sur tout **intervalle** I où f (ou u) est continue.

Attention - Primitive sur deux intervalles

Si f admet des primitives sur la réunion de deux intervalles disjoints, on peut avoir des constantes différentes sur chacun des deux intervalles.
On rencontrera particulièrement cette situation dans le chapitre sur les équations différentielles.

2.3. Quelques cas particuliers

Exponentielles et trigonométrie

Savoir faire - $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $e^{\alpha x}\sin\beta x$

Pour $f(x) = e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $f(x) = e^{\alpha x}\sin\beta x$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$), il suffit de primitver $e^{(\alpha+i\beta)x}$ et récupérer partie réelle ou imaginaire.

Savoir faire - $\sin^n x \cos^m x$

Pour $f(x) = \sin^n x \cos^m x$, on peut linéariser.
Rappelons que pour cela on utilise les formules de de Moivre : $\sin^n x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n \ldots$

Exercice

Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = e^{3x}\sin(2x); \quad f_2(x) = \sin^3(x)\cos^4(x)$$

Remarque - Si on a un doute...

On peut toujours vérifier en calculant la dérivée de la primitive obtenue.

Ici la dérivée de $x \mapsto \dfrac{e^{3x}}{13}\big(3\sin(2x) - 2\cos(2x)\big)$ est

$$x \mapsto \frac{e^{3x}}{13}\big((9\sin(2x) - 6\cos(2x)) + (6\cos(2x) + 4\sin(2x))\big) = e^{3x}\sin(2x)$$

Fractions rationnelles

Des résultats et un savoir-faire à connaître :

Proposition - Tableau de primitives de certaines fonctions rationnelles (fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$)

fonction	primitives (C est une constante réelle)
$\dfrac{1}{x-a}$	$\ln\lvert x-a\rvert + C$
$\dfrac{1}{(x-a)^n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{-1}{n-1}\dfrac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C$
$\dfrac{2x+p}{x^2+px+q}$	$\ln\lvert x^2+px+q\rvert + C$
$\dfrac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}$ où $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$	$\dfrac{-1}{n-1}\dfrac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + C$

Exercice
A démontrer

Remarque - Division euclidienne
Lorsque le polynôme au numérateur a un degré plus important que celui du dénominateur, on commence par effectuer une division euclidienne pour se trouver en présence des cas précédent.
Nous reverrons les divisions euclidiennes en fin de premier semestre

Pour aller plus loin - Avec l'arithmétique complexe (à manipuler avec précaution...)
On rappelle que $\arg(1+ix) = \arctan(x)$*, donc si* $z = e^{i\theta} = 1+ix$*, on a donc*

$$\ln(1+ix) = \ln(z) = i\theta = i\arg(1+ix) = i\arctan(x)$$

Donc

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+1} &= \frac{i}{2}\int \frac{1}{x+i} - \frac{1}{x-i}\\ &= \frac{i}{2}(\ln(x+i) - \ln(x-i))\\ &= \frac{i}{2}\left(\ln(1+\frac{i}{x}) - \ln(1-\frac{i}{x})\right)\\ &= \frac{1}{2}(-\arctan\frac{1}{x} + \arctan\frac{-1}{x}) = -\frac{\pi}{2} + \arctan x\end{aligned}$$

En fait le logarithme complexe est définie à une constante $2i\pi$ *près...*

Savoir faire - Fractions rationnelles $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

Pour les fractions rationnelles de la forme $f(x) = \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ ($(a,b,c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$) :

— si $\Delta > 0$, le trinôme a deux racines réelles distinctes α et β. On cherche alors $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \frac{\lambda}{x-\alpha} + \frac{\mu}{x-\beta}$$

et on primitive avec $\ln|.|$

$$F(x) = \lambda\ln|x-\alpha| + \mu\ln|x-\beta| = \ln|(x-\alpha)^\lambda(x-\beta)^\mu|$$

— si $\Delta = 0$, on a alors

$$f(x) = \frac{1}{a(x-\alpha)^2}$$

on primitive directement avec la fraction rationnelle

$$F(x) = \frac{-1}{a(x-\alpha)}$$

— si $\Delta < 0$, on met le dénominateur sous forme canonique

$$f(x) = \frac{1}{(x+\alpha)^2+\beta^2}$$

on reconnaît une fonction composée qui se primitive avec arctan

$$F(x) = \frac{1}{\beta}\arctan\left(\frac{x+\alpha}{\beta}\right)$$

Exercice
Déterminer des primitives des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{1}{(x^2-x-2)};\quad f_2(x) = \frac{1}{x^2+x+1};\quad f_3(x) = \frac{2x-1}{x^2+x+1};\quad f_4(x) = \frac{2x+1}{x^2+4x+4}.$$

Enfin, $f_4(x) = \dfrac{2x+1}{(x+2)^2} = 2\dfrac{x+2-\frac{3}{2}}{(x+2)^2} = \dfrac{2}{x+2} - 3\dfrac{1}{(x+2)^2}$.
Donc une primitive de f_4 est $F_4 : x \mapsto \ln|x+2| + 3\dfrac{1}{x+2} + C$.

3. Intégrales

3.1. Théorème fondamental et conséquences

Extension de l'intégrale sur $\mathbb{C}$

Définition - Notation
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, pour tout $a < b \in I$, on note

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

l'aire (algébrique) comprise entre les segments de droites $x = a$, $y = 0$ et $x = b$, et la courbe $y = f(x)$.
Nous admettons son existence si f est continue sur $[a, b]$.

Définition - Intégrale de f sur $[a, b]$
Si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est continue sur $[a, b]$, on appelle intégrale de f sur $[a, b]$ le nombre complexe

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathfrak{Re} f(t)\,dt + i\int_a^b \mathfrak{Im} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Attention - Définition?
Est-ce vraiment une définition? Non, car on ne sait pas bien ce qu'est ce calcul. Préciser qu'il s'agit du nombre obtenu à partir d'une primitive de f, c'est tourner en rond par rapport au théorème et au corollaire qui suivent.
A ce stade, on est obligé de prendre ce nombre comme construit à partir de f, a et b. Au second semestre, nous prendrons le temps de bien montrer l'existence et donner un algorithme de calcul de ce nombre. Nous verrons qu'il n'est pas nécessaire que f soit continue (f pourrait être moins régulière)

Exercice

Soit P une application polynomiale. On suppose que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{-imt}P(e^{it})\mathrm{d}t = 0$.
Montrer que P est nul

Fonction : intégrale de sa borne supérieure

Théorème - Théorème fondamental du calcul différentiel
Soit f continue sur I, intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $a \in I$.
Alors la fonction

$$F : \begin{array}{ll} I & \to K \\ x & \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est de classe C^1 (c'est-à-dire dérivable de dérivée continue) sur I et $F' = f$.
C'est de plus l'unique primitive de f nulle en $a \in I$.

Corollaire - Existence de primitive
Toute fonction continue sur I admet une primitive sur I.

Attention - Pas toutes les primitives avec cette notation
On n'obtient pas toutes les primitives ainsi.
Ainsi, pour $f(x) = \cos x$, la primitive $F(x) = \sin x + 2$ ne peut s'obtenir ainsi. En effet, on aurait alors $F(x) = \sin x - \sin a$, or il n'existe pas de $a \in \mathbb{R}$ tel que $\sin a = -2$.

Remarque - Démonstration ?
Ce théorème est admis, pour le démontrer il faudrait une meilleure définition de $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$

Fusion : primitive et intégrale (de sa borne supérieure)

Théorème - Calcul fondamental
Soit f continue sur I intervalle de $\mathbb{R}$ contenant a et b. Soit F une primitive de f. Alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a) = \Big[F(t)\Big]_a^b.$$

Définition - Notation par extension
On notera, par extension des notations précédentes :

— $\displaystyle\int_.^x f(t)\mathrm{d}t$, une primitive quelconque de f.
On pourra même considérer avec cette notation l'ensemble de toutes les primitives de f

— $\big[F(t)\big]_.^x = F(x)$

Corollaire - Avec f'
Soit f de classe C^1 sur I. Alors

$$\forall (a,x) \in I^2,\ f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t.$$

3.2. Quelques propriétés de l'intégrale

Proposition - Linéarité, croissance, Chasles...
Pour des fonctions f et g continues sur un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{R}$, on a, pour $a, b \in I$, les propriétés suivantes :

— **linéarité** : si λ et μ sont deux réels,

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

— **relation de Chasles** : pour $c \in]a, b[$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

— **positivité** : si $a \leqslant b$ **et** $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$$

— **croissance** : si $a \leqslant b$ **et** $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant g(x)$ alors

$$\int_a^b f(t)\,dt \geqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Truc & Astuce pour le calcul - Encadrer une intégrale

Pour encadrer une intégrale, on encadre la fonction à intégrer

Remarque - Combinaison linéaire

Si f et g sont deux fonctions, λ et μ deux réels $\lambda f + \mu g$ s'appelle une combinaison linéaire à coefficients réels de f et g.

Proposition - Fonctions à valeurs complexes

Soient f, g deux fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ et λ, μ deux complexes. Alors on a les propriétés suivantes :

— **linéarité** :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

— **relation de Chasles** : pour $c \in]a,b[$,

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Attention - Sur $\mathbb{C}$, pas de relation d'ordre...

Donc la croissance de l'intégrale sur $\mathbb{C}$ n'a pas de sens. Mais on peut exploiter les modules, si l'on souhaite faire des encadrements de la partie réelle et la partie imaginaire...

3.3. Technique 1 : Intégration par parties

Enoncé

Théorème - Intégration par parties

Si u et v sont deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors

$$\forall (a,b) \in I^2, \qquad \int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t$$

Démonstration

Obtenir une primitive

Savoir faire - Obtenir une primitive avec une IPP cachée

Pour calculer une primitive par IPP de $f = u'v$, notée

$$\int_{\cdot}^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

(attention, il s'agit d'**une fonction** et non d'un scalaire), on peut écrire

$$\int^x u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = u(x)v(x) - \int^x u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t + C$$

Exercice

Avec une intégration par parties trouver une primitive de $x \mapsto \frac{x^2}{(x^2+1)^2}$ puis de $x \mapsto \frac{1}{(x^2+1)^2}$.

On verra une autre méthode plus loin.

Primitives de $P(x)e^{\alpha x}$

Savoir faire - $f(x) = P(x)e^{\alpha x}$

Pour $f : t \mapsto P(t)e^{\alpha t}$ où P est une fonction polynomiale, on peut faire $\deg(P)$ intégrations par parties (IPP) en dérivant $v : t \mapsto P(t)$ et en intégrant $u' : t \mapsto e^{\alpha t}$.

On peut appliquer la même méthode pour $f : t \mapsto P(t)\sin(\alpha t)$ ou $f : t \mapsto P(t)\cos(\alpha t)$.

Pour aller plus loin - Fonction beta

On note $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$.

On montre par IPP que

$B(x,y+1) = \frac{y}{x+y}B(x,y)$.

Puis si n et m sont des entiers :

$$B(n+1,m+1) = \frac{n!m!}{(n+m+1)!} = \frac{1}{(n+m+1)\binom{n+m}{n}}$$

Cela peut donner un sens à $\binom{x+y}{x}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$...

Remarque - Autre méthode

On peut aussi directement chercher une primitive de la forme $Q(t)e^{\alpha t}$ avec $\deg Q = \deg P$.

On dérive cette fonction et identifie les coefficients de Q.

Exercice

Calculer

$$I = \int_0^{\pi/2} t\sin t\,\mathrm{d}t, \quad J = \int_0^1 e^{2x}(6x^2+2x-4)\,\mathrm{d}x$$

Exercice

Pour aller plus loin : trouver une formule générale de $\int e^{\alpha x}P(x)$ qui exploite les puissances de α et les dérivées de P

Primitives de $P(x)\ln\big(Q(x)\big)$

Savoir faire - $f(x) = P(x)\ln\big(Q(x)\big)$

Pour $f : t \mapsto P(t)\ln\big(Q(t)\big)$ où P est une fonction polynomiale, on peut faire une intégrations par parties (IPP) en dérivant $v : t \mapsto \ln\big(Q(t)\big)$ et en intégrant $u' : t \mapsto P(t)$.

On se retrouve alors en présence d'une fraction rationnelle, que l'on sait intégrer, en principe...

Exercice

Calculer

$$I_b = \int_0^b x\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x.$$

On pourra remarquer que $x^3 = x(x^2+1) - x$...

3.4. Technique 2 : Changement de variables

Enoncé

Théorème - Changement de variable

Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in I$,

Soient $\phi : I \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\phi(I) \subset J$ et $f : J \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) continue.

Alors
$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration

Analyse - Deux cas possibles

Savoir faire - Changement de variable - dans la pratique

on veut calculer $\displaystyle\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t$. On pose $t=\phi(x)$ (changement de variable), on remplace alors

— t par $\phi(x)$

— $\mathrm{d}t$ par $\phi'(x)\,\mathrm{d}x$ $\qquad (\phi'(x) = \dfrac{d\phi(x)}{dx} = \dfrac{dt}{dx})$

— t varie de $\phi(\alpha)$ à $\phi(\beta)$ par x varie de α à β (et inversement)

On peut faire un tableau

Pour aller plus loin - Aire d'un cercle

Donner l'aire d'un cercle de rayon r.

Exercice

Calculer par changement de variables les intégrales suivantes

$$I = \int_0^{\pi/2} x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x, \quad J = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

Application : calcul de primitive

Soulignons l'importance que ϕ soit bijective pour exploiter ϕ^{-1}...

Savoir faire - Calculer une primitive par changement de variable

On cherche une primitive F de f sur I,

- on pose $t = \phi(x)$ et donc $\mathrm{d}t = \phi'(x)\mathrm{d}x$ où ϕ est une **bijection de classe** C^1 de J sur I,
- on cherche une primitive $G(x) = \int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x$ et on prend $F(t) = G(\phi^{-1}(t))$.

Exemple - Primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^2+a^2}$

Attention - Ne pas oublier de revenir à la variable de départ

Pour éviter les erreurs (oubli de revenir à la variable de départ...) on aurait intérêt à écrire

$$F(x) = \int_{.}^{x} \frac{dt}{t^2 + a^2}$$

Exercice

Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+a^2)^2}$ en faisant le changement de variable $\tan t = \frac{x}{a}$.

On rappelle que $1 + \tan^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$

Exercice

Aller plus loin : Donner l'expression des primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{(x^2+a^2)^n}$

Savoir faire - Bijection par morceaux

Lorsque le changement de variable doit être bijectif, mais ne l'est que par morceaux, alors

1. on cherche une primitive sur chaque morceaux d'intervalle
2. on « recolle » chaque morceaux en ajustant les constante de manière à ce que la primitive soit bien continue.

L'exercice suivant illustre ce savoir-faire.

Exercice

Donner l'ensemble de définition et calculer la primitive de $h : x \mapsto \dfrac{1}{2+\cos x}$

On posera $t = \tan \frac{x}{2}$

Fonctions définies à partir de fonctions trigonométrique

Savoir faire - Calcul pour $f(t) = \sin^n t \cos^m t$ avec n ou m impair

Pour $f(t) = \sin^n t \cos^m t$, on peut linéariser, ou,

- si n est impair, effectuer le changement de variables $u = \cos t$ (ou isoler un $\sin t$ et dans $\sin^{n-1} t$ remplacer $\sin^2 t$ par $1 - \cos^2 t$ puis reconnaître des primitives),
- si m est impair, effectuer le changement de variables $u = \sin t$ (ou

remplacer $\cos^2 t$ par $1 - \sin^2 t$).

Exercice

Calculer par changement de variables l'intégrale suivante

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 u \cos^3 u \,\mathrm{d}u$$

Savoir faire - Cas général ($\tan \frac{x}{2}$)

D'une manière générale, les changements de variables utiles pour les fonctions construites avec de fonctions trigonométriques sont $t = \cos x$, $t = \sin x$, $t = \tan x$, $t = \tan \frac{x}{2}$.

On rappelle que si $t = \tan \frac{x}{2}$, alors $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ et $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

Exercice

Calculer par changement de variables l'intégrale suivante

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$$

Simplification des calculs

Théorème - Simplification des calculs

Soit $f : [-a, a] \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ une fonction continue :

- si f est paire, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$;
- si f est impaire, $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0$;
- si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est une fonction continue T-périodique,

$$\int_{a+T}^{b+T} f(t)\,dt = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \text{ et } \int_a^{a+T} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

Démonstration

Variable dans les bornes de l'intégrale (composition)

Savoir faire - Variable dans le bornes de l'intégrale

Il arrive qu'on doit étudier des fonctions de la forme

$$g : x \mapsto \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} h(t)\mathrm{d}t$$

, sans pouvoir exprimer explicitement H, une primitive de h.
Néanmoins, la simple existence de H, permet d'écrire :

$$g(x) = H(f_2(x)) - H(f_1(x))$$

Dont on déduit de nombreuses informations. Par exemple : g est dérivable si f_1 et f_2 le sont. Et dans ce cas :

$$\forall\ x \in \mathscr{D}, \qquad g'(x) = f_2'(x) \times h(f_2(x)) - f_1'(x) \times h(f_1(x))$$

Exercice

Soit $H : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$. Etudier la parité de H. Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer H' et dresser le tableau de variations de H. Déterminer les limites de H en $+\infty$ et $-\infty$.

4. Equation différentielle (dérivation/primitivation tordue)

4.1. Vocabulaire

D'une manière générale on appelle équation différentielle une équation faisant intervenir les dérivées successives d'une même fonction, elle est du premier ordre si elle porte sur la fonction et sa dérivée première, du second ordre si elle porte sur la fonction et ses dérivées première et seconde...
La résolution d'un problème de Cauchy est la résolution d'une équation différentielle avec des conditions initiales.
Plus précisément :

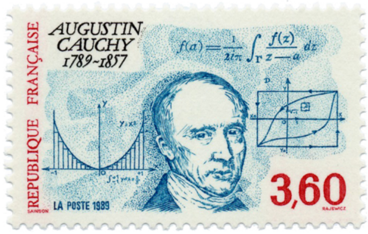
Histoire - Révolution newtonienne
La double découverte, par Newton, des lois de physique qui s'expriment sous forme d'équations différentielles et des méthodes mathématiques pour les résoudre a permis la révolution scientifique en Europe. Pendant deux siècles, les techniques se sont affinées et la maîtrise de tous les phénomènes de sciences physiques s'est élargies. Au milieu du XIX-ième siècle, les scientifiques croyaient au déterminisme totalement compris (l'avenir totalement écrit sous nos yeux)...

Définition - Equation différentielle linéaire du premier ordre
Une équation différentielle (E) est dite linéaire et du premier ordre si elle s'écrit $\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t)$ où α, β, γ sont trois fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Elle est dite normalisée si elle s'écrit $y' + a(t)y = b(t)$ où a, b sont deux fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
$b(t)$ (ou $\gamma(t)$) est le second membre, l'équation est dite sans second membre ou homogène si la fonction b est nulle.

Remarque - Mise sous forme normale
Si α ne s'annule pas sur I l'équation différentielle $\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t)$ se ramène à une équation normalisée.

Définition - Problème de Cauchy du premier ordre
On appelle problème de Cauchy du premier ordre la donnée d'une équation différentielle du premier ordre et d'une condition initiale $y(t_0) = y_0$ où $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$).

Histoire - Louis-Augustin Cauchy



Louis-Augustin Cauchy (1789-1857) est un mathématicien français aux intérêts très large en mathématiques. Son attitude face aux événements politiques contemporains l'a beaucoup isolé, sans totalement le marginaliser; probablement grâce à son génie. On le retrouvera à de nombreuses reprises tout au long de l'année.

Définition - Solutions
Soit f une fonction de I dans $\mathbb{C}$.
f est solution de (E) $\quad \alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t)$ si

(1) f est dérivable sur I,
(2) $\forall t \in I, \quad \alpha(t)f'(t) + \beta(t)f(t) = \gamma(t)$.

On pourra noter S_E l'ensemble des solutions de (E).
Résoudre l'équation différentielle (E) c'est donc déterminer l'ensemble S_E, c'est-à-dire trouver toutes les solutions sur I.
On appelle courbe intégrale de (E) la courbe représentative d'une solution de (E).

Remarque - Convention réelle
En l'absence d'indications contraires, si les fonctions α, β, γ sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, on notera S_E l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ qui sont solutions de (E).

Définition - Solution d'un problème de Cauchy
Résoudre le problème de Cauchy défini par (E) et $y(t_0) = y_0$, c'est déterminer toutes les solutions f de (E) vérifiant $f(t_0) = y_0$.

Remarque - Une/la solution ?
On parle souvent de solution particulière de (E), il s'agit en fait d'UNE fonction qui est solution, par opposition à solution générale qui est la forme générale des solutions. Par exemple, $t \mapsto e^{3t}$, $t \mapsto 4e^{3t}$ sont des solutions particulières de $y' = 3y$ alors que $t \mapsto \lambda e^{3t}$ est la solution générale.

Savoir faire - Découper I pour avoir des équations normalisées
Si α s'annule sur I, on cherchera à découper I en plusieurs intervalles ouverts sur lesquels elle ne s'annule pas pour se ramener à des équations normalisées.
Ensuite on cherchera les solutions sur I par « recollement », c'est-à-dire que l'on regardera, parmi les fonctions définies par morceaux sur chacun des intervalles, celles qui sont dérivables sur I (problème aux points de recollement, c'est-à-dire ceux où α s'annulait) et vérifient (E) sur I.

Le principe suivant est d'usage fréquent en physique : il permet de s'intéresser à des seconds membres simples.

Proposition - Principe de superposition des solutions
Si le second membre de l'équation (E) est de la forme $b(t) = b_1(t) + \cdots + b_n(t)$
et si l'on connaît des solutions particulières $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n$ des équations avec les seconds membres $b_1(t), \ldots, b_n(t)$,

alors une solution particulière de (E) est $\widetilde{y} = \widetilde{y}_1 + \cdots + \widetilde{y}_n$.

Démonstration

4.2. Equation différentielle linéaire d'ordre 1

Principe

On considère désormais l'équation différentielle linéaire normalisée

$$(E) \qquad y' + a(t)y = b(t)$$

où a et b sont continues sur I, intervalle de $\mathbb{R}$.
Dans la suite $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Heuristique - Démonstration et savoir-faire. Que retenir ?

Pour les démonstrations, nous allons décomposer l'application $F_a : \mathscr{D}(\mathbb{R}) \to \mathscr{D}(\mathbb{R})$, $y \mapsto y' + ay$ en applications, plus ou moins inversible. Nous verrons alors que l'équation différentielle est une dérivation « tordue ».
A la fin du cours, nous donnerons une méthode qu'on pourra appliquer **directement** lors des exercices.
Sauf pour les exercices théoriques (du type inégalités différentielles).

Analyse

Analyse - Décomposition de F_a

Exercice
Résoudre $(E) \quad (1+t^2)y' + 4ty = 0$ sur $I = \mathbb{R}$.

Remarque - Comment retenir l'ensemble des solutions ?
On dispose d'une méthode intuitive (mais qui n'est pas une démonstration car elle suppose que l'on sait que les solutions non nulles ne s'annulent pas)

pour retrouver le résultat dans le cas des fonctions à valeurs réelles (c'est-à-dire lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) en écrivant $\dfrac{y'(t)}{y(t)}=-a(t)$ et en primitivant.

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=-a(t)\Longrightarrow \ln(y(t))=-A(t)+K\Longrightarrow y(t)=\exp(-A(t)+K)=Ce^{-A(t)} \text{ avec } C=e^K$$

On écrirait plutôt, heuristiquement :

$$(ye^{\int a})'=[y'+ay]e^{\int a}=0\Longrightarrow ye^{\int a}=K\Longrightarrow y=Ke^{-\int a}$$

Attention - Variable x, variable t ?
Nous avons noté y la fonction de la variable t, mais l'on peut bien évidemment avoir d'autres notations, par exemple y fonction de la variable x (équations différentielles donnant l'ordonnée en fonction de l'abscisse) ou x en fonction de t (équations différentielles donnant l'abscisse en fonction du temps) ou encore z en fonction de t (équations différentielles donnant l'affixe en fonction du temps).

Structures des solutions et méthodes

Théorème - Structure de l'ensemble S_E
La solution générale de l'équation (E) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée (H), ce qui peut aussi s'écrire :
Si $\widetilde{y}$ (à lire « y tilde ») est une solution particulière de l'équation (E) alors

$$S_E=\left\{t\mapsto Ce^{-A(t)}+\widetilde{y}(t);\, C\in\mathbb{K}\right\}.$$

Remarque - Existence
Insistons : L'existence d'(au moins) une solution est donnée par la forme de l'équation (E) :
- normalisée,
- avec a continue (admettant une primitive - plus exactement)
- avec b continue ($t\mapsto b(t)e^{A(t)}$ admettant une primitive - plus exactement)

Démonstration

Pour aller plus loin - Equation à variables séparables
La méthode présentée dans le remarque est celle proposée dans le cas des équations à variables séparables : $y'\times f(y)=g(t)$. Avec un changement de variables, il s'agit d'un simple calcul d'intégrale (présenté ainsi, cela fonctionne mieux)...
En 1840, le mathématicien belge Pierre Verhulst propose un modèle de dynamique de population qui conduit à l'équation

$$y'=ay\left(1-\frac{y}{K}\right)$$

où a et K sont des constantes associées à la population considérée.
La résolution donne :

$$y(t)=K\frac{1}{1+\left(\frac{K}{y_0}-1\right)e^{-at}}$$

On trouve en particulier : $y(0)=y_0$ et $y\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}K$. Ce qui est contraire au modèle de Maltus

Trouver une solution particulière $\widetilde{y}$

L'enjeu est donc maintenant de trouver une solution particulière.
On doit à Lagrange la méthode de la variation de la constante qui répond explicitement à cette question (parmi d'autres méthodes).

Savoir faire - Comment trouver une équation particulière? Méthode de « variation de la constante »

D'après le théorème précédent, ce qui reste est de trouver une solution particulière.
Sans indication donnée par l'énoncé, la méthode classique à suivre est la suivante :

1. On normalise l'équation différentielle. Cela peut nécessiter une étude sur plusieurs intervalles.
2. On résout l'équation différentielle homogène : $y = Ce^{-A(t)}$
3. On cherche une solution particulière :
   — en cherchant une solution évidente,
   — en utilisant le principe de superposition des solutions,
   — en essayant des fonctions simples (polynomiales lorsque a et b le sont, trigonométriques lorsque a et b le sont...),
   — en faisant varier la constante C, c'est-à-dire sous la forme
   $$\widetilde{y} : t \mapsto C(t)e^{-A(t)}$$
   (La constante C devient variable : « méthode de la variation de la constante »).
   Le calcul (à refaire à chaque fois - il permet de vérifier la bonne résolution de l'équation homogène) conduit à :
   $$C'(t) = b(t)e^{A(t)}$$
   C'est un « simple » calcul de primitive
4. Les solutions générales sont alors de la forme
   $$y : t \mapsto (K + C(t))e^{-A(t)}$$
   avec C définie au point précédent

Problème de Cauchy

Théorème - Problème de Cauchy
Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.
Il existe une unique solution sur I de l'équation linéaire normalisée (E) $y' + a(t)y = b(t)$ vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

Démonstration

Remarque - Résoudre un problème de Cauchy
Pour résoudre un problème de Cauchy, on résout (E) puis on cherche la solution vérifiant $y(t_0) = y_0$.

Pour aller plus loin - Courbe intégrale
Cela signifie également qu'il existe une unique courbe intégrale passant par le point (t_0, y_0).

Applications. Cas classiques

Exercice
Résoudre (E) $\quad y' + ty = t$.

Exercice
Résoudre (E) $\quad z' = (1+i)z - 2it^2 + 2$.

Attention - Ensemble des solutions particulières selon le second membre

Attention, si le second membre est colinéaire à la solution homogène, il faut alors chercher une solution particulière de « degré » plus élevé...

Exercice
Résoudre $(E)\quad y' + y = 2e^x + 4\sin x + 3\cos x$.

Savoir faire - Etudier une inéquation différentielle

Supposons qu'on ait l'inéquation $y' + ay \leqslant b$.
On note alors A une primitive de a et B, une fonction que l'on précisera par la suite...

$$\left(ye^{A(t)} + B\right)' = y'e^{A(t)} + A'(t)ye^{A(t)} + B' = (y' + ay)e^{A(t)} + B' \leqslant be^{A(t)} + B'$$

car une exponentielle est positive.
Donc si B est une primitive de $t \mapsto -b(t)e^{A(t)}$, alors $\left(ye^{A(t)} + B\right)' \leqslant 0$.
Donc la fonction $t \mapsto y(t)e^{A(t)} + B(t)$ est décroissante et donc $y(t) \leqslant y(t_0)e^{A(t_0)-A(t)} + (B(t_0) - B(t))e^{-A(t)}$.

Cas d'une équation non résolue. Problème du recollement

Savoir faire - Cas non résolue

A résoudre une équation $a(t)y' + b(t)y = c(t)$ sur I avec a qui s'annule sur I.

1. On étudie l'équation sur des sous-intervalles de I où a ne s'annule pas.
   Par exemple si $a(t) = t$ et $I = \mathbb{R}$; on étudie sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
2. On obtient une famille de solutions, paramétrée sur chacun des sous-intervalles par une variable α (par exemple).
3. On essaye de « **recoller** » les solutions. Pour cela, on regarde les limites de y et de y' au voisinage du point t_0 qui annule a de manière à étudier la continuité et la dérivabilité de y en t_0.
   Souvent ces limites dépendent de la valeur paramètre α.

Dans la suite du cours : le théorème de prolongement de classe $\mathscr{C}^1$ et les méthodes de calcul asymptotiques seront très utiles pour résoudre ce problème

Exercice
Résoudre l'équation $t^2y' + y = 1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (on discutera suivant la position de 0 par rapport à I).

Notez bien la méthode de recollement!

Remarque - Règle de L'Hospital

Il n'est pas rare que pour faire le recollement, nous ayons besoin de la règle de L'Hospital pour lever l'indétermination que l'on obtient en calculant, pour s frontière de I $\lim_{t\to s} y'(t) = \lim_{t\to s} \dfrac{c(t) - b(t)y(t)}{a(t)}$.
A utiliser, sans modération!

4.3. Equation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants

Enoncé

$\mathbb{K}$ désigne toujours $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Insistons : ici a, b, c **sont constants**, $a \neq 0$ (sinon on revient au cas précédent).
L'année prochaine, vous élargirez ce point de vue.

Définition - Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants
Soient $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $a \neq 0$ et $u : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est solution de l'équation différentielle du second ordre à coefficients constants

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = u(t)$$

si

(1) f est deux fois dérivable sur I
(2) $\forall t \in I, af''(t) + bf'(t) + cf(t) = u(t)$

L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelée équation caractéristique associée.

Résolution de l'équation homogène associée

On considère donc l'équation homogène $(H) \quad ay'' + by' + cy = 0 \quad a \neq 0$.
Analyse - Composition de $F_\alpha \circ F_\beta$

Cette analyse ne marche pas lorsque les racines sont les mêmes : $\alpha = \beta$.
On étudie les cas particuliers selon la nature des solutions (double ou simples, complexes ou réelles) de l'équation caractéristique associée à l'équation homogène.

Théorème - Cas complexe

— Si $ar^2 + br + c = 0$ possède deux racines distinctes r_1 et r_2 alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ est :

$$S_H = \left\{ t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

— Si $ar^2 + br + c = 0$ possède une racine double $r_0 \in \mathbb{C}$ alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ est :

$$S_H = \left\{ t \mapsto (\lambda + \mu t) e^{r_0 t} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \right\}$$

Démonstration

Pour le cas réel, la partie correspondant aux racines complexes ($\Delta < 0$) est plus subtile.

Théorème - Cas réel
On suppose ici a, b, c réels, $a \neq 0$.

— Si $ar^2+br+c=0$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ est :
$$S_H = \left\{t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
— Si $ar^2+br+c=0$ possède une racine double $r_0 \in \mathbb{R}$ alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ est :
$$S_H = \left\{t \mapsto (\lambda + \mu t) e^{r_0 t} ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$
— Si $ar^2+br+c=0$ possède deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$ alors l'ensemble des solutions à valeurs dans $\mathbb{R}$ est :
$$S_H = \left\{t \mapsto \lambda e^{\alpha t} \cos \beta t + \mu e^{\alpha t} \sin \beta t ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Pour aller plus loin - Paramètres
Considérons l'équation aux paramètres physiques : $y'' + \frac{\omega}{Q} y' + \omega_0^2 y = 0$.
On a $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 (1 - 4Q^2)$.

— *si* $\Delta < 0$ ($Q > \frac{1}{2}$) *: régime périodique, les solutions sont de la forme* $e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t}(A\cos(\omega t + \varphi)$ *avec* $\omega = \frac{\omega_0}{Q}\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}$. *Comme* $\omega_0, Q > 0$, *les solutions sont oscillantes, bornées et de fréquence* $\omega = \frac{\omega_0}{Q}\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}$
— *si* $\Delta = 0$ ($Q = \frac{1}{2}$) *: régime critique, les solutions sont de la forme* $e^{\omega_0 t}(At + B)$
— *si* $\Delta > 0$ ($Q < \frac{1}{2}$) *: régime a-périodique, les solutions sont de la forme* $Ae^{-\frac{\omega_0}{Q}(1+\sqrt{\frac{1}{4} - Q^2})t} + Be^{-\frac{\omega_0}{Q}(1-\sqrt{\frac{1}{4} - Q^2})t}$

Pour la démonstration, commençons par un lemme

Lemme - Solution réelle d'une équation réelle
Soit (H) l'équation différentielle homogène $ay'' + by' + cy = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, a \neq 0$.
Si f est solution de (H) à valeurs dans $\mathbb{C}$ alors $\mathfrak{Re} f$ est solution de (H) à valeurs réelles.
Plus précisément l'ensemble des solutions réelles de (H) est exactement l'ensemble des parties réelles des solutions complexes de (H).

Démonstration

Remarque - Autre expression pour le cas $\Delta < 0$
Dans le cas des racines complexes conjuguées, on peut poser $\lambda + i\mu = Ae^{-i\phi}$, où $A \geqslant 0$ et $\phi \in \mathbb{R}$. Les solutions s'écrivent alors $t \mapsto Ae^{\alpha t}\cos(\beta t + \phi)$
C'est un cas souvent préféré en physique.

Remarque - Base d'une espace vectoriel
Dans tous les cas (réel ou complexe) $S_H = \left\{\lambda f_1 + \mu f_2; (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\right\}$ où f_1 et f_2 sont deux fonctions déterminées par l'équation caractéristique associée. On dira que la famille (f_1, f_2) est une base de S_H.
On en déduira que S_H est un espace vectoriel de dimension 2 (=nombre de vecteurs de la base).

Exercice
Résoudre les équations différentielles suivantes (on cherchera les solutions réelles).

1. $y'' = \omega^2 y$
2. $y'' = -\omega^2 y$
3. $y'' - 4y' + 13y = 0$
4. $y'' - 4y' + 4y = 0$

Résolution avec second membre

On considère l'équation complète $(E)\quad ay'' + by' + cy = u(t)$ avec $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0$.

Théorème - Structure de l'ensemble S_E
La solution générale de l'équation (E) est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène associée (H), ce qui peut aussi s'écrire :
Si $\widetilde{y}$ est une solution particulière de l'équation (E) et (f_1, f_2) une base de S_H alors
$$S_E = \left\{t \mapsto \lambda f_1(t) + \mu f_2(t) + \widetilde{y}(t); (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\right\}.$$

Démonstration

Proposition - Principe de superposition des solutions
Si le second membre de l'équation (E) est de la forme $u(t) = u_1(t) + \cdots + u_n(t)$
et si l'on connaît des solutions particulières $\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_n$ des équations avec les seconds membres $u_1(t), \ldots, u_n(t)$,
alors une solution particulière de (E) est $\widetilde{y} = \widetilde{y}_1 + \cdots + \widetilde{y}_n$.

Remarque - Démonstration
Il s'agit exactement de la même démonstration que dans le cas $n = 1$.
Ce qui compte ici c'est la linéarité. (Le fait que les coefficients soient constants ne changent rien concernant ce théorème de superposition)

Avec second membre : exponentielle-polynôme

On va s'intéresser au cas où $u(t) = e^{mt}P(t)$ avec $m \in \mathbb{C}$ et P une fonction polynomiale à valeurs complexes.

Savoir faire - Second membre $e^{mt}P(t)$
Soit $m \in \mathbb{C}$ et P une fonction polynomiale de degré n. Alors on peut trouver une solution particulière de l'équation

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = e^{mt}P(t)$$

de la forme $\widetilde{y}(t) = e^{mt}Q(t)$ où Q est une fonction polynomiale
- de degré n si m n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$
- de degré $n+1$ si m est racine simple de $ar^2 + br + c = 0$
- de degré $n+2$ si m est racine double de $ar^2 + br + c = 0$

Démonstration

Pour aller plus loin - Méthode de Laplace
On note $\mathscr{L} : f \mapsto F$, telle que $F : p \mapsto \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\mathrm{d}t$ On montre (IPP) alors que $\mathscr{L}(f')(p) = pf(p) - f(0^+)$.
On transforme ainsi une dérivation en un produit et donc l'équation $ay'' + by' + cy = g$ se transforme en

$$(ap^2 + bp + c)F(p) = G(p)$$

et donc $F(p) = \dfrac{G(p)}{ap^2 + bp + c}$, il reste donc à appliquer $\mathscr{L}^{-1}$ à F pour trouver la valeur de $f\ldots$

Analyse - Polynôme × fonction trigonométrique

Pour aller plus loin - Equations en physique

1. *Dans un circuit RC ou RL, τ étant la constante de temps, $E(t)$ la tension fournie par un générateur, le signal de sortie y vérifie l'équation différentielle :*

$$y' + \frac{1}{\tau} y = E(t)$$

2. *On considère un circuit comprenant, en série, un condensateur de capacité C, une résistance R, une inductance et un générateur fournissant une tension complexe $U(t) = U_0 e^{j\omega t}$ (où $j^2 = -1$). L'intensité du courant dans le circuit est alors solution de l'équation différentielle :*

$$(E) \quad L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C} = j\omega U_0 e^{j\omega t}$$

3. *Une masse ponctuelle m suspendue à un ressort glisse le long de l'axe (Oy) orienté vers le haut. Le ressort est étiré jusqu'à une position $y = y_0$ puis laché à l'instant $t = 0$. La masse ponctuelle est soumise à son poids $-mg$, à la force de rappel $-ky$, à la force de frottement $-K\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. On obtient l'équation différentielle :*

$$(E) \quad m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + K\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + ky = -mg$$

Savoir faire - Second membre de la forme $e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t + Q(t)\sin\beta t)$

On peut trouver (par identification) une solution particulière de l'équation

$$(E) \quad ay'' + by' + cy = e^{\alpha t}(P(t)\cos(\beta t) + Q(t)\sin(\beta t))$$

de la forme $\widetilde{y}(t) = e^{\alpha t}(T(t)\cos(\beta t) + R(t)\sin(\beta t))$ où T et R sont des fonctions polynomiales

— de degré $n = \max(\deg(P), \deg(Q))$ si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$

— de degré $n+1 = \max(\deg(P), \deg(Q)) + 1$ si $\alpha + i\beta$ est racine simple de $ar^2 + br + c = 0$

Exercice

1. Résoudre $y'' - y' - 2y = 3e^{-t} + 1$.
2. Résoudre $y'' + 2y' + 5y = \cos^2 t$.

Résolution du problème de Cauchy

Théorème - Conditions initiales

Soit $(E) \quad ay'' + by' + cy = u(t)$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0$ et $u : I \to \mathbb{K}$ de l'une des formes précédentes. Soit $(t_0, y_0, y'_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$.
Alors il existe une unique solution $f : I \to \mathbb{K}$ telle que $f(t_0) = y_0$ et $f'(t_0) = y'_0$.

La démonstration est simple : les deux conditions initiales fixent les deux valeurs des deux variables libres λ et μ.

Démonstration

Exercice
Résoudre le problème de Cauchy : $y'' - 2y' + y = te^t$ avec les conditions $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

Exercice
Résoudre les équations différentielles de la physique (cadre)

5. Bilan

Synthèse

- ⇝ A toute fonction f, on associe (par un tableau) une fonction f' qui est sa dérivée. Réciproquement, on peut essayer de lui associer une fonction F dont elle ($=f$) serait la dérivée. Cette fonction F non unique s'appelle une primitive de f. On a un tableau de fonctions usuelles à APPRENDRE par coeur.
- ⇝ Il n'existe pas d'algorithme simple de primitivisation comme il en existe de dérivation. La seule chose que l'on sait (et que l'on démontrera plus tard) est que toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur cet intervalle I. On fait ce que l'on peut en reconnaissant localement des situations : pour une somme de fonctions, la linéarité suffit; pour un produit, on exploite une intégration par parties; pour une composition, on utilise un changement de variable.
- ⇝ Une équation différentielle est une équation (égalité) dont l'inconnue est une fonction et qui associe cette fonction à ses dérivées. L'équation peut être linéaire, d'ordre quelconque (un entier), écrite sous forme normale... On lui associe une courbe intégrale.
  L'ensemble des solutions apparait (pour les équations différentielles linéaires) sous forme d'un espace affine.
- ⇝ Le problème théorique consiste à trouver des hypothèses qui assure l'existence d'une solution (unique?) à une équation différentielle, sur un intervalle le plu grand possible.
  Pour les équations différentielles linéaires, une théorie satisfaisante est

donné par le théorème de Cauchy. A connaître par coeur avec toutes ses hypothèses et toutes ses conclusions (ordre 1 ou 2)...

$\rightsquigarrow$ Le problème pratique consiste à résoudre l'équation. Nous avons mis au point des stratégies : la méthode de la variation de la constante (pour les EDL1). Au passage, on rencontre le problème du recollement de solutions sur des intervalles joints; ainsi que l'étude des inéquations différentielles.
Pour les EDL2, nous nous limitons cette année aux équations à coefficients constants. La méthode est simple : il s'agit de mettre en parallèle cette équation différentielle et l'équation caractéristique (polynomiale de degré 2), puis de résoudre cette seconde équation. La forme des solutions et les solutions de cette seconde équation (polynomiale) donnent la forme des solutions et les solutions de la première (différentielle).

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

— Savoir-faire - $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $e^{\alpha x}\sin\beta x$
— Savoir-faire - $\sin^n x\cos^m x$
— Savoir-faire - Fractions rationnelles $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$
— Truc & Astuce pour le calcul - Encadrer une intégrale
— Savoir-faire - Obtenir une primitive avec une IPP cachée
— Savoir-faire - $f(x)=P(x)e^{\alpha x}$
— Savoir-faire - $f(x)=P(x)\ln(Q(x))$
— Savoir-faire - Changement de variable - dans la pratique
— Savoir-faire - Calculer une primitive par changement de variable
— Savoir-faire - Bijection par morceaux
— Savoir-faire - Calcul pour $f(t)=\sin^n t\cos^m t$ avec n ou m impair.
— Savoir-faire - Cas général ($\tan\frac{x}{2}$).
— Savoir-faire - Variable dans les bornes de l'intégrales.
— Savoir-faire - Découper I pour avoir des équations normalisées
— Savoir-faire - Méthode de « variation de la constante ».
— Savoir-faire - Etudier une inéquation différentielle.
— Savoir-faire - Cas non résolue (recollement).
— Savoir-faire - Second membre de la forme $e^{\alpha t}(P(t)\cos\beta t+Q(t)\sin\beta t)$.

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$\left[\Phi(t)\right]_{\cdot}^{x}=\Phi(x)$	« Crochet » de Φ	Par extension : $[\Phi]_a^b=\Phi(b)-\Phi(a)$	On trouve parfois $\Phi(t)]_{\cdot}^{x}$.
$\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$	Intégrale de f entre a et b. Il s'agit de l'aire « sous » la courbe	Pour tout $a\in\mathscr{D}_f$ et f continue $x\mapsto$ $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f	
$\displaystyle\int_{\cdot}^{x} f(t)\mathrm{d}t$	(Ensemble des) primitive(s) de f		Attention : il n'y a pas unicité de la primitive de f.

Retour sur les problèmes

25. Il est miraculeux qu'ils s'agissent des deux faces d'une même pièce. C'est Newton et Leibniz qui s'en rendirent compte les premiers, indépendamment et en prenant des chemins très différents. Certains pensent que Fermat l'avait compris... Un célèbre faux du XIX siècle fit croire à Michel Chasles que le premier avait été en réalité Blaise Pascal. Un mauvais pari de l'académicien français.
26. C'est l'application $x\mapsto 2^x u_0=u_0e^{x\ln 2}$
27. Rien de simple. D'où les deux méthodes : intégration par parties (pour un produit) et changement de variable (pour une composition).
28. Oui c'est possible, on l'aperçoit dans le cours. Mais le moins qu'on puisse dire c'est que la technique est très technique!

29. Toute fonction continue est intégrable (voir plus tard dans l'année). La réciproque est fausse : certaine fonction non continue sont néanmoins intégrable. En regardant la courbe, on trouve qu'il y a une compensation : $\int_0^{\pi} \tan(t)\mathrm{d}t = 0$.
    Mais concrètement, une primitive de $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ est $-\ln(|\cos|) + K$, mal définie en $\frac{\pi}{2}$. On ne peut inopinément écrire : $+\infty - \infty = 0\ldots$
30. Cf. Cours de physique
31. Le théorème de Cauchy a pour but de répondre à cette question. Dans le cadre des équations linéaires, il allie nombre liberté (ordre de l'équation) et nombre de contraintes (conditions initiales).
32. Nous verrons une autre option pour étudier des équations différentielles : la force brute de calcul de l'ordinateur. La solution ne sera qu'approchée, mais l'approximation sera diablement efficace (méthode d'Euler, Heun...).