Chapitre 12

Relations binaires sur un ensemble

Résumé -

Nous complétons quelques notions essentielles du fondement des mathématiques (formalisé non sans mal à la fin du XIX-ième siècle). Ces fondements se basent sur les ensembles !
Mais il faut agir sur ces ensemble. Nous commençons donc d'abord par voir deux notions dont l'emploi en mathématiques est fréquent (en particulier lorsqu'il s'agit de construire de nouvelles notions). Il s'agit des relations binaires : relation d'ordre et relation d équivalence.
Dans ce chapitre, il y a beaucoup de définitions. A apprendre!! Quelques vidéos :

- *Science4all - Les mathématiques modernes - https ://www.youtube.com/watch ?v=7fbn99V1f9U*
- *Maths Adultes - Relations binaires - https ://www.youtube.com/watch ?v=W7cH06qOImM*

Sommaire

1. Problèmes

? Problème 54 - Graphe

En option « maths expertes », les élèves étudient les graphes : sommets, arrêtes....
C'est une famille essentielle d'objets en mathématiques et en informatique (nous les y retrouverons en fin d'année). Comment formaliser proprement les graphes ? Comment passer de l'idée bien comprise (de sommets et d'arêtes/flèches) à une représentation mathématique/informatique acceptable ?

? Problème 55 - Forcer l'égalité. Qu'est-ce qu'une égalité ?

Pour résoudre un exercice, on exploite souvent des équivalences ($\Leftrightarrow$). La bijection de f permet d'écrire : $f(x) = y \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)$ en prenant x et y dans les bons ensembles.
Si f n'est pas surjective, il suffit de changer l'ensemble de définition de y et la résolution du problème se conserve.
Mais si f n'est pas injective, qu'il y a plusieurs solutions $x_1, x_2, \dots x_n$ à l'équation $f(x) = y$. Que faire ?
Une idée : forcer l'égalité et affirmer que $x_1 = x_2 = \dots x_n$, comme pour l'équation $\tan x = \sqrt{3}$ qui permet d'affirmer $x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}\dots$.
C'est choquant ! Comment rendre cela propre : en redonnant un sens nouveau à l'égalité $x_1 = x_2 = \dots x_n$. Qu'est-ce qu'une égalité ?

? Problème 56 - Relation d'ordre ?

Pour résoudre le problème précédent, nous créons la notion de relation d'équivalence.
Mais plus souvent, lorsque nous prenons deux objets nous ne pouvons pas affirmer qu'ils sont pareils. Souvent l'un est PLUS quelque chose que l'autre.
Comment formaliser cette idée ? Qu'est-ce qu'une relation d'ordre ? Et comment l'exploiter ?

? Problème 57 - Plus grand élément

Existe-t-il nécessairement un, un seul, plus grand élément à un ensemble ordonné ?
Par exemple : quel est le plus grand élément de $[0, 1[$?

? Problème 58 - Codage de graphe (ou relation) à partir d'applications. Et réciproquement...

Après avoir défini les ensembles, on peut ou bien définir les applications et à partir de là les relations (ou graphes), ou bien définir les relations et à partir de là les applications.
Comment faire naturellement ces deux implications ? (Evidemment, pas en même temps...)

2. Graphe

2.1. Formalisation

Heuristique - Images mentales des graphes!

Pour l'heuristique et les images mentales (à ne pas oublier et vraiment à garder en mémoire!!), il faut revoir le cours de mathématiques de terminale.

Définition - Graphe non orienté

On considère un ensemble S (de sommets), fini en règle générale. Puis un ensemble $A \subset \binom{S}{2}$ de paires d'arêtes.

On appelle graphe non orienté le couple (S, A).

Définition - Graphe orienté

On considère un ensemble S (de sommets), fini en règle générale. Puis un ensemble $A \subset S \times S$ de couples d'arêtes.

On appelle graphe orienté le couple (S, A).

Exercice

Donner la définition formalisée d'un graphe complet.

2.2. Vocabulaire

Définition - Sommets reliés

On dit que deux sommets $s_1, s_2 \in S$ sont reliés si $(s_1, s_2) \in A$ (cas orienté) ou $\{s_1, s_2\} \in A$ (cas non orienté)

Définition - Degré d'un sommet

Soit $s \in S$ un sommet d'un graphe non orienté (S, A) a pour degré $d(s) = \text{card}(A_s)$ où $A_s = \{a \in A \mid s \in a\}$.

Soit $s \in S$ un sommet d'un graphe orienté (S, A) a pour degré entrant $d_+(s) = \text{card}(A_s)$ où $A_s = A \cap (\{s\} \times S)$ et pour degré sortant $d_-(s) = \text{card}(A'_s)$ où $A'_s = A \cap (S \times \{s\})$.

Exercice

Comment définir chemin d'un sommet à un autre ?

Et graphe connexe ?

2.3. Applications

On retrouvera très vite les graphes dans le cours sur les relations binaires, plus loin en probabilité et algèbre linéaire (chaine de Markov), ou en informatique... A l'occasion, nous verrons en informatique, un façon supplémentaire et pratique de coder/définir un graphe à l'aide de matrice...

3. Relations binaires

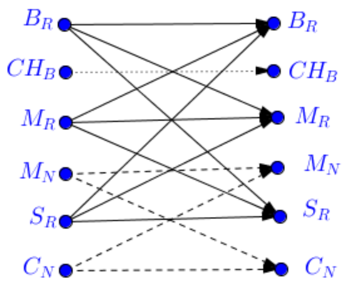
3.1. Construction et représentation

Définition - Relation
Soit E un ensemble.
Une relation binaire sur E est un sous-ensemble G de $E \times E$. Si $(x, y) \in E^2$ on écrit $x\mathscr{R}y$ lorsque $(x, y) \in G$.

On peut représenter une relation par un graphe (diagramme sagittal) : une représentation de $E \times E$ et avec des flèches on indique que x (du premier E) est en relation à y (du second E).

Exemple - Stade Toulousain

Représentation - Graphe



C'est le graphe de l'exercice du Stade Toulousain.

Exercice
On peut définir dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ les relations $\mathscr{R}_1$ "est un multiple de" ou $\mathscr{R}_2$ "est le double de".
Expliciter G_1, G_2 et les diagrammes sagittaux de ces deux relations.

3.2. Caractérisations

Définition - Propriétés des relations
Soit $\mathscr{R}$ une relation sur un ensemble E. On dit que $\mathscr{R}$ est :
- réflexive si $\forall x \in E,\ x\mathscr{R}x$;
- symétrique si $\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathscr{R}y \Rightarrow y\mathscr{R}x$;
- antisymétrique si $\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x \Rightarrow x = y$;
- transitive si $\forall (x, y, z) \in E^3,\ x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z \Rightarrow x\mathscr{R}z$.

Exemple - Stade Toulousain

Exercice
Comment se représentent pour un graphe les propriétés précédentes ?

4. Relation d'ordre

4.1. Définitions

Définition - Relation d'ordre
Soit $\mathscr{R}$ une relation sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'ordre si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Définition - Plus petit
Une relation d'ordre permet de comparer deux éléments. Lorsque $x\mathscr{R}y$ on dit que x est "plus petit" que y et on note usuellement $x \preceq y$.

Savoir faire - Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre.
Il s'agit de montrer, tour à tour, que la relation est réflexive, antisymétrique et transitive.

4.2. Ensemble avec ordre total

Définition - Ordre total
Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'ordre total si

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \preceq y \text{ ou } y \preceq x$$

(c'est-à-dire si deux éléments quelconques de E sont comparables).

Remarque - Concernant le treillis (ou graphe)
Le fait que l'ordre soit total signifie que le treillis/graphe est connexe (en un seul morceau).

Exemple - Sur $\mathbb{R}$

Exercice
Sur $E = \mathbb{R}^2$ on définit les deux relations suivantes :
- l'ordre produit :
$$(x,y) \preceq_1 (x',y') \Leftrightarrow x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y'$$
- l'ordre lexicographique :
$$(x,y) \preceq_2 (x',y') \Leftrightarrow (x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leqslant y')$$

Vérifier qu'il s'agit de relations d'ordre. S'agit-il d'ordre partiel ou d'ordre total ?

Pour aller plus loin - Treillis (de Galois)
Pour les relations d'ordre, au lieu du grpahe, on préfère une représentation graphique sous forme de treillis (de Galois).
Si $x \preceq y$, alors on représente x « sous » y, et l'on trace un lien entre les deux.
Si l'ordre est total, il n'y a qu'un élément à chaque hauteur.
Cette représentation n'a d'intérêt que pour E de cardinal fini (et petit), même si elle peut aussi donner de bonnes idées complémentaires.

4.3. Ensemble avec ordre partiel

Définition - Ordre partiel
Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'ordre partiel s'elle n'est pas total.
C'est-à-dire : il existe $(x,y) \in E^2$ tel que $x \npreceq y$ et $y \npreceq x$.

Exercice
Soit Ω un ensemble et $E = \mathscr{P}(\Omega)$. On définit sur E la relation $\mathscr{R}$ par

$$\forall (A,B) \in E^2, A\mathscr{R}B \Leftrightarrow A \subset B.$$

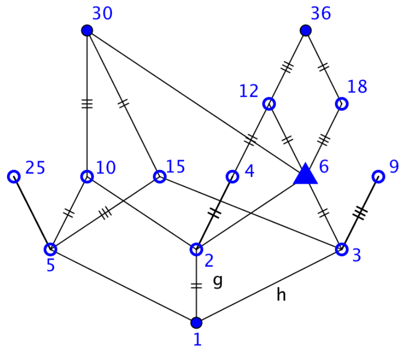
Vérifier que la relation $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre. S'agit-il d'une relation d'ordre total ?

Exemple - Divisibilité sur $\mathbb{N}$

Exercice
Montrer ce résultat

Remarque - Treillis
On peut faire un treillis de divisibilité de certains nombres entiers.
Ce n'est pas une droite, comme avec $(\mathbb{R}, \leqslant)$ par exemple.

***Représentation - Treillis de diviseurs de* 30 *et* 36**



4.4. Eléments particuliers

Majorant/minorant

Définition - Majorants,minorants
Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit les éléments suivants :
- $M \in E$ est un majorant de A si $\forall x \in A, x \preceq M$;
- $m \in E$ est un minorant de A si $\forall x \in A, m \preceq x$;

Exemple - Majorant sur $(\leqslant, \mathbb{R})$

Exemple - Majorant sur $(|, \mathbb{N})$

Exercice
Pour la relation d'ordre $\subset$ sur $\mathbb{R}$.
Donner un majorant et un minorant de $\{\{1,2,3\},\{2,3,5\}\}$

Plus grand/petit élément

Définition - Plus grand élément, plus petit élément
Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur un ensemble E. Pour $A \subset E$, on définit les éléments suivants :
- $a \in E$ est un plus grand élément de A si $a \in A$ et $\forall x \in A, x \preceq a$;
- $a \in E$ est un plus petit élément de A si $a \in A$ et $\forall x \in A, a \preceq x$.

En fait a est respectivement un majorant de A et élément de A ou bien un minorant et élément de A

Théorème - Unicité
Un plus petit grand élément de $A \subset E$, lorsqu'il existe, est unique, noté $\max(A)$.
Un plus petit petit élément de $A \subset E$, lorsqu'il existe, est unique, noté $\min(A)$.

Démonstration

Attention - Attention au mot
Ici il ya une source d'erreur classique. On fera bien attention aux mots définis ici : (un) majorant, (un) minorant, (le) plus grand élément, (le) plus grand élément.
S'ajoutent à ces mots : élément maximal, minimal...
Il y aura bientôt également l'expression borne supérieure, borne inférieure...

On rencontre très souvent le cas suivant :

Exercice
On suppose que $\preceq$ est une relation d'ordre total sur E.
Soit $A \subset E$. On suppose que A est fini.
Montrer que A admet nécessairement un plus grand élément

Exercice
On admet qu'un ensemble fini admet toujours un plus petit élément (il suffit de faire au plus $\frac{n(n-1)}{2}$ comparaisons - mais on peut se contenter de $n-1$ comparaisons...).
Montrer que tout sous-ensemble de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Eléments maximaux/minimaux

Remarque - Généralisation : élément maximal ou minimal
On peut également définir la notion d'élément maximal ou minimal :
— $M \in A$ est un élément maximal de A si $\forall x \in A, M \preceq x \Rightarrow x = M$;
— $m \in A$ est un élément minimal de A si $\forall x \in A, x \preceq m \Rightarrow x = m$.

S'il s'agit d'une relation d'ordre total, ces éléments coïncident avec les plus grand et plus petit éléments (s'ils existent).

Exemple - Ensemble avec plusieurs éléments maximaux

Borne supérieure/inférieure

Une dernière définition, pour des cas plus simples que celui de l'exemple précédent :

Définition - Borne inférieure, borne supérieure
Soit $A \subset \mathbb{R}$.
— Si l'ensemble des majorants de A est non vide et admet un plus petit élément a, a est appelé borne supérieure de A, on note $a = \sup A$.
— Si l'ensemble des minorants de A est non vide et admet un plus grand élément b, b est appelé borne inférieure de A, on note $b =$

inf A.

Cette définition sera au coeur de la définition de l'ensemble $\mathbb{R}$ (à partir de $\mathbb{Q}$ avec la relation d'ordre totale $\leqslant$). Mais elle sert aussi à d'autres moments du cours

Exemple - Borne inférieure et supérieure pour $(|,\mathbb{N})$

Savoir faire - Montrer que $a = \sup E$

On montre en deux temps :

1. $\forall\ x \in E, x \preceq a$
2. $\forall\ z$ tel que $\forall\ x \in E, x \preceq z$, alors $a \preceq z$
   (tout majorant z de E est plus grand que a)
   OU (de manière équivalente)
   $\forall\ u \preceq a, \exists\ x \in E$ tel que $u \preceq x$
   (tout élément plus petit que a ne peut pas être un majorant de E)

Exercice

Comment repérer sur le treillis des multiples et diviseurs de u et de v, leur PGCD et leur PPCM ?

Exercice

Comment peut-on définir l'ensemble borne supérieure de deux ensembles A et B pour la relation $\leqslant$?
Même question avec la borne inférieure ?

Pour aller plus loin - Espaces vectoriels
On indiquera que dans le cadre des espaces vectoriels, où l'on exige en outre une stabilité pour l'addition vectoriel, la borne supérieure des sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 est donnée par l'ensemble $F_1 + F_2$

4.5. Ordre strict

Définition - Ordre strict
Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. On définit la relation $\prec$ par :

$$x \prec y \Leftrightarrow (x \preceq y \text{ et } x \neq y)$$

ce n'est pas une relation d'ordre sur E car elle n'est pas réflexive.

Exemple - Sur $\mathbb{R}$

5. Relation d'équivalence

5.1. Propriétés caractéristiques

Définition - Relation d'équivalence
Soit $\mathscr{R}$ une relation sur un ensemble E. On dit que c'est une relation d'équivalence si elle est réflexive, symétrique et transitive.

Pour aller plus loin - Relation d'équivalence : volonté de définir =
Sur le site images des maths, un article intéressant : http ://images.math.cnrs.fr/Egalite

Exemple - Stade Toulousain

Exemple - Fractions rationnelles

Savoir faire - Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence

Il s'agit de montrer, tour à tour, que la relation est réflexive, symétrique et transitive.

Exercice

Montrer que $\mathscr{R}$ définie sur $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$ (ensemble des suites) par $(u_n)\mathscr{R}(v_n)$ ssi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ est une relation d'équivalence.

Exercice

Soit $f : E \to F$.
On définit la relation $\mathscr{R}_f$ sur E par $x\mathscr{R}_f y$ ssi $f(x) = f(y)$.
Montrer que $\mathscr{R}_f$ est une relation d'équivalence sur E.

5.2. Classes d'équivalence

Définition - Classe d'équivalence

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur E.
Pour $a \in E$, on appelle classe d'équivalence de a l'ensemble $C(a) = \{x \in E \mid x\mathscr{R}a\}$. a est un représentant de $C(a)$.

Exemple - Fractions rationnelles

Exercice

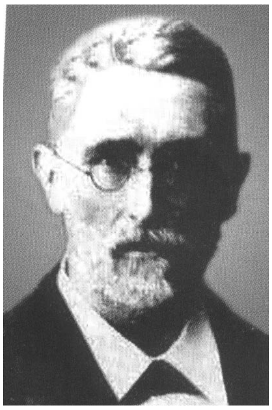
Montrer que $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{C}^2$, par $z = a + \mathrm{i}b\mathscr{R}z' = a' + \mathrm{i}b'$ ssi $a \times b' = a' \times b$ est une relation d'équivalence.
Quelles sont les classes d'équivalence de $\mathscr{R}$?

Exercice

Montrer que $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{R}$, par $\theta\mathscr{R}\theta'$ ssi $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta - \theta' = 2k\pi$ est une relation

Histoire - Construction de $\mathbb{Z}$

Etant donné $\mathbb{N}$, construit par un principe de type récurrence (par Péano) ; on peut suivre Dedekind est construire $\mathbb{Z}$.
On note sur $\mathbb{N}^2$, $\mathscr{R}$ telle que $(n,m)\mathscr{R}(n',m')$ ssi $n + m' = n' + m$
Les classes d'équivalences sont de la forme $(0,n) = \{(k, k+n), k \in \mathbb{N}\}$, représenté de l'entier relatif : $-n$.



Richard Dedekind (1831-1916) est un brillant mathématicien allemand, hanté par une question : « qu'est-ce que sont les nombres ? ».

d'équivalence.
Quelles sont les classes d'équivalence de $\mathscr{R}$?

Proposition - Caractéristique par les classes d'équivalence
Soient $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E, a et b deux éléments de E. Alors
$$a\mathscr{R}b \Leftrightarrow C(a) = C(b).$$

Démonstration

Exercice
On note $\mathscr{P}$ le plan usuel. On définit sur $\mathscr{P} \times \mathscr{P}$ la relation $\mathscr{R}$ par

$$(A,B)\mathscr{R}(C,D) \Leftrightarrow ABDC \text{ est un parallélogramme.}$$

Il s'agit d'une relation d'équivalence. Que représentent les classes d'équivalence de cette relation ?

Définition - Système de représentants
On appelle système de représentants de la classe d'équivalence $\frac{E}{\mathscr{R}}$, un ensemble $S \subset E$, tel que :
pour tout élément $x \in E$, il existe un unique $s \in S$ tel que $x\mathscr{R}s$.
On note souvent $S_{E\backslash\mathscr{R}}$ un tel système

Remarque - Notation floue
La notation $S_{E\backslash\mathscr{R}}$ est très imprécise (pas de différence entre un système et un autre).
Souvent ce qui compte pour les démonstrations est d'un considérer un système quelconque, sans précision

5.3. Partition de E

Heuristique - Classe d'équivalence : partition de E
Avoir une relation d'équivalence, c'est faire l'assimilation entre différents objets à priori différents et finalement identique (ou plutôt équivalent) du point de vue de la relation. L'ensemble du départ est alors réduit en partie plus petite, ces éléments sont les classes d'équivalence. Elles forment une partition de l'ensemble initial.

Définition - Partition d'un ensemble
Une partition de E est un ensemble de sous-ensembles (non vides) de E tel que :
— leur réunion fait E
— leur intersection 2 à 2 est vide

Proposition - Partition de E
Si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E, alors ses classes d'équivalence forment une partition de E.

Démonstration

Remarque - La réciproque est vraie
Etant donnée une partition sur E : $E = \bigcup_{i \in I} O_i$.
Considérons alors $\mathscr{R}$: $(x \mathscr{R} y)$ ssi $\exists\ i \in I$ tel que $x \in O_i$ ET $y \in O_i$.
$\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur E.

Remarque - Classes d'équivalence et dénombrement
Si E fini se décompose en classe d'équivalence $(O_i)_{i \in I}$, alors $\#E = \sum_{i \in I} \#O_i$.
Il arrive souvent que E se décompose en n classes d'équivalence toutes de même cardinal c. Dans ce cas : $\#E = c \times n$.

Application - Dénombrement et classe d'équivalence

6. Bilan

Synthèse

- Les ensembles, dont on a vu qu'ils étaient à la base des raisonnements mathématiques, peuvent être « travaillés ». Ils peuvent être coupés en morceaux, avec des classes d'équivalence ou bien structurés visuellement avec une relation d'ordre.
- Selon chaque situation, on fait évoluer notre regard !

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

— Savoir-faire - Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre
— Savoir-faire - Montrer que $a = \sup E$
— Savoir-faire - Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$:=$	Egalité, par définition (du terme de gauche)		autre notation : $\stackrel{\text{def.}}{s} =$
$\Leftrightarrow, \sim, \equiv, \dots$	Relations d'équivalence variées	Réflexive, Symétrique, Transitive	
$\frac{E}{\mathscr{R}}$	Ensemble des classes d'équivalence sur E pour la relation d'équivalence $\mathscr{R}$	Les classes d'équivalence forment une partition de E	
$S_{E\backslash\mathscr{R}}$	Système de représentants de $\frac{E}{\mathscr{R}}$	$S_{E\backslash\mathscr{R}} \subset E$ et $\forall\, x \in E, \exists\, ! s \in S_{\frac{E}{\mathscr{R}}}$ tel que $x\mathscr{R}s$.	
$\Rightarrow, \leqslant, \subset, \mid, \dots$	Relations d'ordre variées	Réflexive, Antiymétrique, Transitive	
$\max E$	Plus grand élément de E pour UNE relation d'ordre fixée a priori	$\max E \in E$ et $\forall\, x \in E$, $x \leqslant \max E$ (ou $\subset \dots$...)	Si la relation est totale, $\max E$ est au plus unique.
$\min E$	Plus petit élément de E pour UNE relation d'ordre fixée a priori	$\min E \in E$ et $\forall\, x \in E$, $\min E \leqslant x$ (ou $\subset \dots$...)	Si la relation est totale, $\min E$ est au plus unique.
$\sup E$	Plus petit des majorants de E	$\forall\, x \in E,\ x \leqslant \sup E$ et $[\forall\, x \in E, x \leqslant y \Rightarrow \sup E \leqslant y$	Au plus unique.
$\inf E$	Plus grand des minorants de E	$\forall\, x \in E,\ \inf E \leqslant x$ et $[\forall\, x \in E, y \leqslant x \Rightarrow y \leqslant \inf E$	Au plus unique.

Retour sur les problèmes

54. Voir cours
55. Voir cours
56. Voir cours
57. Pas de plus grand élément à $[0,1[$. Mais un plus petit élément à tous ses majorants : $\sup[0,1[= 1$, on l'appelle la borne supérieure.
58. Si les applications sont bien définies.
    Alors une relation $\mathscr{R}$ est une application f de E^2 dans $\{0,1\}$, avec $f((a,b)) = 1$ ssi $a\mathscr{R}b$.
    Si les relations sont bien définies.
    Alors une application f de E sur F est définie par $f(a) = b$ ssi $a\mathscr{R}b$.