CPGE MPSI
2016-2017

Le 25.03.17

Devoir Surveillé n°8

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé de trois exercices.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

Un résultat numérique sans explication ne sera pas pris en compte
BON COURAGE

Exercice 1 - *30 minutes environ*

Dans le jeu du Lotofoot, le parieur doit remplir une grille où il indique les résultats qu'il prévoit pour treize matchs (non encore joués !) de football.
Pour chacun des treize matchs, trois réponses sont possibles : l'équipe 1 est annoncée gagnante (réponse « 1 »), le résultat prévu est un match nul (réponse « N »), l'équipe 2 est annoncée gagnante (réponse « 2 »). Ces trois réponses recouvrent toutes les éventualités et, à l'issue du match, une et une seule se trouvera réalisée.

Une grille se présente sous la forme suivante :

1.	NANTES-RENNES	$\boxed{1}\ \boxed{\text{N}}\ \boxed{2}$
2.	BORDEAUX-LYON	$\boxed{1}\ \boxed{\text{N}}\ \boxed{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
13.	P.S.G-MARSEILLE	$\boxed{1}\ \boxed{\text{N}}\ \boxed{2}$

La règle du jeu est la suivante : pour chacun des treize matchs, le parieur coche une et une seule des trois cases $\boxed{1}\ \boxed{\text{N}}\ \boxed{2}$ correspondant au résultat prévu. C'est ce que l'on appelle remplir la grille.

1. De combien de façons différentes peut-on remplir une grille ?
2. Déterminer le nombre de grilles pour lesquelles à l'issue des matchs :
   (a) Toutes les réponses sont exactes.
   (b) Toutes les réponses sont fausses.
   (c) Il y a au moins une réponse fausse.
   (d) Les trois premières réponses sont fausses, les dix autres sont exactes.
   (e) Trois réponses et trois seulement sont fausses.
   (f) Les p premières réponses sont fausses ($1 \leqslant p \leqslant 13$).
3. Soient a et b deux entiers tels que $a + b = 13$, p un entier naturel tel que $p \leqslant a$ et $p \leqslant b$ et enfin k un entier vérifiant $0 \leqslant k \leqslant p$.
   (a) Déterminer le nombre de grilles telles que les deux conditions suivantes soient (simultanément) vérifiées :
   — sur les p premiers matchs il y a k bons résultats et $p - k$ résultats erronés
   — sur l'ensemble des treize matchs il y a a bons résultats et b résultats erronés.
   (b) Retrouver la formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \binom{13-p}{a-k} = \binom{13}{a}.$$

Exercice 2 - *90 minutes environ*

$\mathbb{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathbb{C}$, le corps des nombres complexes.
$\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$.
On pose $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

A. Étude d'une symétrie

On s'intéresse à $\sigma : \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

1. (a) Montrer que σ est une symétrie vectorielle du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
   (b) Établir que (I, J, K, L) est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ puis donner la matrice de l'endomorphisme σ dans cette base.
   (c) En déduire les espaces sur lequel et parallèlement auquel σ est définie.
   (d) Pour tout $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, exprimer $\sigma(A)$ avec A, I et le nombre complexe $\operatorname{tr}(A)$.
2. On considère A et B dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
   (a) Montrer que $\sigma(AB) = \sigma(B)\sigma(A)$.
   (b) Justifier l'égalité : $A\sigma(A) = \det(A)I$.
   (c) Montrer que si A est inversible, alors $\sigma(A)$ l'est également.
   Exprimer les matrices $[\sigma(A)]^{-1}$ et $\sigma(A^{-1})$ en fonction de A et $\det(A)$.

B. Une $\mathbb{R}$-algèbre célèbre : l'algèbre des quaternions

A tout couple (z_1, z_2) de nombres complexes, on associe la matrice $M(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix}$.
On désigne par $H = \{M(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$.

1. (a) Montrer que toute matrice de H s'écrit de manière unique sous la forme $\alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des réels.
   (b) En déduire que H est un sous-espace vectoriel du <u>$\mathbb{R}$-espace vectoriel</u> $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.
   Préciser une base et la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel H.
   (c) Montrer que H est stable pour le produit matriciel.
   H est-il commutatif ?
2. (a) Vérifier que : $\forall\, A \in H$, $\sigma(A) \in H$ et $\det(A) \in \mathbb{R}^+$.
   (b) Montrer que toute matrice non nulle de H est inversible et que son inverse est dans H
   (c) Montrer que H est un corps non commutatif.
3. Somme de 4 carrés
   (a) Montrer que si deux entiers naturels peuvent tous deux s'écrire comme une somme de quatre carrés d'entiers naturels, alors il en est de même de leur produit.
   On pourra exprimer $\det\big(M(z_1, z_2)\big)$ *comme une somme de quatre carrés de réels.*
   (b) Décomposer 5 et 14 en somme de quatre carrés (pouvant être nul).
   En déduire une décomposition de 70 en somme de quatre carrés.

C. Forme linéaire

On définit pour tout matrice $A \in H$:

$$f_A : H \longrightarrow \mathbb{R}, B \longmapsto \frac{1}{4}\operatorname{tr}\,(A\sigma(B) + B\sigma(A))$$

Puis on définit également :

$$F : H \longrightarrow H^*, A \mapsto f_A$$

1. Etude des applications F et f_A
   (a) Montrer que, pour toute matrice A de H, f_A est une forme linéaire.
   (b) Montrer que $F \in \mathcal{L}(H, H^*)$.
   (c) Montrer que pour tout $M, N \in \{I, J, K, L\}$,

$$f_M(N) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad M \neq N \\ 1 & \text{si} \quad M = N \end{cases}$$

2. Etude d'un hyperplan.
   On note $T = \{A \in H \mid \operatorname{tr}\,(A) = 0\}$.
   (a) Montrer que T est un hyperplan du $\mathbb{R}$-espace vectoriel H. En donner une base.
   (b) Montrer que la droite engendrée par I est supplémentaire de T.
   (c) On note p, la projection sur T de direction $\operatorname{vect}(I)$.
   Exprimer $p(A)$ en fonction de A et de $\sigma(A)$.

Exercice 3 - *120 minutes environ*

Dans cet exercice, on cherche à dénombrer des ensembles sur lesquels repose une structure forte de symétrie.
On commence par l'étude d'un cas particulier A, quel l'on résout (grâce à la formule de Burnside) en partie C, après avoir étudier la structure de groupe sous-jacente au problème. En partie D, on donne une démonstration de la formule de Burnside.

A. Une question de dénombrement

On cherche à dénombrer le nombre de colliers de 67 perles, dont 2 sont noires, 2 sont jaunes, 7 sont rouges et 56 sont blanches.

1. Pour créer un collier, il s'agit d'enfiler les perles sur un fil (non encore refermé).
   Combien existe-t-il de façons différentes d'enfiler ces 67 perles (dont 2 sont noires, 2 sont jaunes, 7 sont rouges et 56 sont blanches).
2. On ferme le collier précédent en attachant les deux extrémités.
   Donner l'exemple de liste de perles enfilées différemment mais qui donne le même collier.

Le but de cet exercice est de déterminée le nombre de colliers différents ainsi obtenus.

B. Action de groupe

On commence par considérer $\mathcal{L}$, l'ensemble des listes L de 67 éléments, dont 2 sont des N, 2 sont des J, 7 sont des R et 56 sont des B.
On notera $L[i]$, la lettre située en position i dans la liste L de $\mathcal{L}$.
On considère $\mathcal{S} = S_{67}$, le groupe des permutations de $[\![1, 67]\!]$.
On s'intéresse à deux permutations particulières :
— $\sigma_0 = (1\,2\,3 \cdots\, 66\,67)$, le cycle des éléments ordonnés de $[\![1, 67]\!]$
— $\tau_0 = (1\,67)(2\,66)\dots(33\,35)$, la composée des 33 transpositions $(i, 68-i)$.
Enfin, on note G, le plus petit sous-groupe de $\mathcal{S}$ qui contient σ_0 et τ_0.

1. Etude du groupe G.
   (a) Calculer $\epsilon(\sigma_0)$, $\epsilon(\tau_0)$ et $\epsilon(\sigma_0^k\tau_0^m)$, pour tout entier k, m.
   (b) Pour $p \in \mathbb{N}$, Combien de cycles compose la permutation σ_0^p ?
   (c) (*) Montrer que :
   $$G = \{\tau_0^i\sigma_0^j\ ,\ i \in \{0, 1\}, j \in [\![0, 66]\!]\}$$
2. Action du groupe G sur l'ensemble $\mathcal{L}$.
   On note $\otimes$ l'opération externe de G sur $\mathcal{L}$ à valeur dans $\mathcal{L}$ par :
   $$\sigma \otimes L = (L[\sigma(1)], L[\sigma(2)], \cdots L[\sigma(67)]) = (L[\sigma(i)], i \in [\![1, 67]\!])$$
   (a) Montrer que $\mathcal{R}$ définie sur $\mathcal{L}^2$ par :
   $$L_1\mathcal{R}L_2 \iff \exists\ \sigma \in G \text{ tel que } L_2 = \sigma \otimes L_1$$
   est une relation d'équivalence.
   (b) Montrer que L_1 et L_2 sont deux listes qui représentent le même collier (partie A) si et seulement si il existe $\sigma \in G$ tel que $\sigma \otimes L_1 = L_2$.
   (c) En déduire que l'ensemble des listes L représentant le même collier que L_1, notée $\mathcal{O}(L_1)$ est la classe d'équivalence de L_1 pour la relation $\mathcal{R}$.
   $$\mathcal{O}(L_1) = \{\sigma \otimes L_1, \sigma \in G\},$$
   on parle aussi de l'orbite de L_1 sous l'action $\otimes$ définie par G.
   (d) Montrer enfin que pour tout $\sigma, \sigma' \in G$, pour tout $L \in \mathcal{L}$,
   $$(\sigma \circ \sigma') \otimes L = \sigma' \otimes (\sigma \otimes L)$$

Le but de l'exercice est donc de compter le nombre de classe d'équivalence de $\mathcal{R}$ (ou orbite sous l'action de G).

Mais pour cela il faut tourner la page...

C. Formule de Burnside

La formule de Burnside s'énonce ainsi : Si G un groupe fini agissant sur un ensemble $\mathcal{L}$ fini, alors le nombre d'orbites sous l'acton de G est donné par la formule :

$$\frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}|\mathrm{Fix}(\sigma)|$$

où $\mathrm{Fix}(\sigma)$ désigne l'ensemble des éléments de Y fixés par σ.

1. Application de la formule.
   (a) Quel est le cardinal de G (définie en partie B) ?
   Soit $\sigma \in G$. On cherche donc à dénombrer
   $$\mathrm{Fix}(\sigma) = \{L \in \mathcal{L} \mid \sigma \otimes L = L\}$$
   (b) Supposons que $\sigma = \sigma_0^k$, avec $k \in [\![1, 66]\!]$.
   Montrer que $|\mathrm{Fix}(\sigma)| = 0$
   (c) Que vaut $|\mathrm{Fix}(\sigma_0^0)|$?
   (d) Montrer que $|\mathrm{Fix}(\tau_0)| = \dfrac{33!}{1!1!3!28!}$. Que vaut $|\mathrm{Fix}(\tau_0\sigma_0^k)|$, pour $k \in [\![1, 66]\!]$?
   (e) Conclure en donnant une expression exacte du nombre de colliers vérifiant les conditions initiales.
   On vérifiera que le calcul a une valeur approchée égale à $1,9 \times 10^{13}$.
2. (*) Démonstration de la formule de Burnside.
   On note $C = \{(\sigma, L) \in G \times \mathcal{L} \mid \sigma \otimes L = L\}$. On cherche à le dénombrer de deux façons distinctes, il en découlera le nombre d'orbite recherché.
   (a) Montrer que $|C| = \displaystyle\sum_{L\in\mathcal{L}} |\{\sigma \in G \mid \sigma \otimes L = L\}|$.
   On note $G(L) = \{\sigma \in G \mid \sigma \otimes L = L\}$ et $g(L) = |G(L)|$, donc $|C| = \sum_{L\in\mathcal{L}} g(L)$.
   (b) Soit $L \in \mathcal{L}$. On note $\mathcal{O}(L)$, l'orbite de L sous l'action $\otimes$.
   Soit $L' = \sigma' \otimes L$. Montrer que
   $$\sigma \otimes L = L \iff ((\sigma')^{-1} \circ \sigma \circ \sigma') \otimes L' = L'$$
   En déduire que $g(L) = g(L')$.
   (c) Montrer que pour tout $L \in \mathcal{L}$, $|G| = |\mathcal{O}(L)| \times g(L)$ (*théorème de Lagrange*)
   (d) Comme $\{\mathcal{O}(L)\}$ forme une partition de $\mathcal{L}$, on suppose que $\mathcal{L}$ est partagé en h orbites différentes, chacune représentée par une liste L_i. On peut donc écrire :
   $$\mathcal{L} = \bigcup_{i=1}^{h} \mathcal{O}(L_i) \qquad \text{Union disjointe}$$
   En déduire
   $$|C| = \sum_{i=1}^{h} |\mathcal{O}(L_i)| \times g(L_i) = h \times |G|$$
   (e) Enfin, montrer que l'on a également :
   $$|C| = \sum_{\sigma\in G} |\mathrm{Fix}(\sigma)|$$
   (f) En déduire la formule de Burnside.