CPGE MPSI
2016-2017

Le 25.03.17

Devoir Surveillé n°8
CORRECTION

Exercice 1

1. Une grille correspond exactement à une 13-liste dont les éléments sont pris dans l'ensemble à trois éléments $\{1, N, 2\}$ (pris avec répétition : on peut "reprendre" 1 ou N ou 2).
   Donc /2

   le nombre de façons différentes de remplir une grille est égal aux nombres de telle liste : 3^{13}

   /1

2. (a)

   Il n'y a qu'une grille possible où toutes les réponses sont exactes : celle où tout est juste.

   (b) Une grille fausse correspond à un mauvais choix pour chacun des matchs.
   Donc lorsque l'on remplit la 13-liste à prendre à chaque fois l'une des deux résultats faux.
   Ainsi le nombre de façons différentes de remplir une grille qui est fausse correspond exactement aux nombres de 13-liste dont chacun des éléments est pris dans un ensemble de deux éléments : /2

   Il y a 2^{13} grille fausses.

   (c) Toutes les listes ayant au moins une réponse fausse sont exactement toutes les listes qui ne sont pas tout juste.
   Il y a donc /1

   $3^{13} - 1$ grille avec au moins une réponse fausse

   (d) Considérons une grille dont les trois premières réponses sont fausses, les dix autres sont exactes. Il s'agit exactement d'une 13-liste dont les trois premiers éléments sont pris dans un ensemble à deux éléments (les réponses fausses des trois premiers matchs de la grille) et dont les 10 suivant sont pris dans un ensemble à 1 élément : celui des réponses exactes pour chacun des matchs 4 à 13.
   Il y a donc $2^3 \times 1^{10}$, c'est à dire /1

   8 grilles possibles (dans ces conditions)

   (e) Une grille où trois réponses et trois seulement sont fausses correspond exactement à une grille pour laquelle :
   - 3 des 13 réponses sont fausses, il y a $\binom{13}{3} = 286$ choix possibles des numéros de ces réponses fausses,
   - PUIS une fois que ces trois réponses fausses sont repérées, il y a $2^3 \times 1^{10} = 8$ possibilités de se tromper sur ces 3 réponses de la grille.

   Ainsi, il y a /2

   $$2^3 \times \binom{13}{3} = 8 \times 286 = 2288 \text{ telles grilles}$$

   (f) Le même raisonnement que pour (d) donne : /1

   il y a 2^p grilles dont les p premières réponses sont fausses.

3. Soient a et b deux entiers tels que $a + b = 13$, p un entier naturel tel que $p \leqslant a$ et $p \leqslant b$ et enfin k un entier vérifiant $0 \leqslant k \leqslant p$.

   (a) Pour chacune des conditions, nous allons calculer le nombre de grilles satisfaisantes.
   Comme ces conditions sont indépendantes (c'est à dire que l'on peut remplir l'une PUIS l'autre, sans que less résultats de la seconde condition n'influence pas la première), nous multiplierons les résultats obtenus.

— Sur les p premiers matchs il y a k bons résultats et $p-k$ résultats erronés.
Il faut choisir $\binom{p}{k}$ places : ceux ayant des résultats justes.
pour les $p-k$ résultats faux, il y a, à chaque fois, 2 choix et 1 pour les p justes.
il y a donc $2^{p-k}\binom{p}{k}$ grilles satisfaisant ces premières conditions.

— La seconde condition est équivalente à la suivante (compte-tenu de la première condition) : sur les $13-p$ derniers matchs il y a $a-k$ bons résultats et $(13-p)-(a-k)=(13-a)-(p-k)=b-(p-k)$ résultats erronés.
Il faut choisir $\binom{13-p}{a-k}$ places : ceux ayant des résultats justes.
pour les $b-(p-k)$ résultats faux, il y a 2 choix et 1 pour les $a-p$ justes.
il y a donc $2^{b-(p-k)}\binom{13-p}{a-k}$ grilles satisfaisant ces premières conditions.

Finalement, */3*

$$\boxed{\text{il y a donc } 2^{p-k}\binom{p}{k}2^{b-(p-k)}\binom{13-p}{a-k}=2^b\binom{p}{k}\binom{13-p}{a-k} \text{ telles grilles.}}$$

(b) Nous avons vu qu'il y a au total : $2^b\binom{13}{b}$ grilles avec b réponses fausses.

Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}2^b\binom{p}{k}\binom{13-p}{a-k}$ est également le nombre de grilles avec b réponses fausses, puisqu'on énumère ici toutes les grilles ainsi possibles.

Donc $\displaystyle 2^b\binom{13}{b}=\sum_{k=0}^{p}2^b\binom{p}{k}\binom{13-p}{a-k}=2^b\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{13-p}{a-k}$.

Ainsi, en simplifiant par 2^b, */2*

$$\boxed{\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\binom{13-p}{a-k}=\binom{13}{a}.}$$

Exercice 2

On note : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$, $K=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}$, $L=\begin{pmatrix}-i&0\\0&i\end{pmatrix}$

et $\sigma:\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$.

A. Étude d'une symétrie

1. (a) Pour $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $\sigma^2(A)=\sigma(\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=A$. */1*

Donc $\sigma^2=\mathrm{id}_{\mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$, donc

$$\boxed{\sigma \text{ est une symétrie vectorielle du } \mathbb{C}\text{-espace vectoriel } \mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$$

(b) Puisque la famille (I,J,K,L) est constituée de $4=\dim_{\mathbb{C}}\big(\mathcal{M}_2(\mathbb{C})\big)$ éléments, il suffit de montrer qu'il s'agit d'une famille libre pour démontrer que c'est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. */1*

Soient $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{C}$ tels que $\alpha I+\beta J+\gamma K+\delta L=0$.

On a donc $\begin{pmatrix}\alpha-i\delta&-\beta+i\gamma\\\beta+i\gamma&\alpha+i\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Et donc en faisant : $\frac{1}{2}(L_1+L4)$, on a $\alpha=0$; puis $\frac{1}{2}(iL_1-iL_4)$ on a $\delta=0$;
puis $\frac{1}{2}(-L_2+L3)$, on a $\beta=0$; puis $\frac{-1}{2}(iL_2+iL_3)$ on a $\gamma=0$;

Donc la famille est libre et */2*

$$\boxed{(I,J,K,L) \text{ est une base de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C})}$$

En outre, $\sigma(I)=I$, $\sigma(J)=-J$, $\sigma(K)=-K$ et $\sigma(L)=-L$.

Donc */1*

$$\boxed{\mathcal{M}_{(I,J,K,L)}(\sigma)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}}$$

(c) Pour tout $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$,

alors $\sigma(A) + A = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix} = (a+d)I = \mathrm{tr}(A) \times I.$ /1

$$\boxed{\text{Donc } \sigma(A) = \mathrm{tr}(A)I - A}$$

2. Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$.

(a) On a alors $\sigma(AB) = \sigma\begin{pmatrix} aa'+bc' & ab'+bd' \\ ca'+dc' & cb'+dd' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cb'+dd' & -ab'-bd' \\ -ca'-dc' & aa'+bc' \end{pmatrix}$.

Alors que $\sigma(B)\sigma(A) = \begin{pmatrix} d' & -b' \\ -c' & a' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cb'+dd' & -ab'-bd' \\ -ca'-dc' & aa'+bc' \end{pmatrix}$. /2

$$\boxed{\sigma(AB) = \sigma(B)\sigma(A)}$$

(b) De même : $A \times \sigma(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \det(A)I.$ /1

$$\boxed{A\sigma(A) = \det(A)I}$$

(c) Supposons que A soit inversible,
alors $\sigma(AA^{-1}) = \sigma(A^{-1}) \times \sigma(A)$ d'après la question (a).
Or $AA^{-1} = I$ et $\sigma(I) = I$, donc $\sigma(A^{-1}) \times \sigma(A) = I$.
Par conséquent /1

$$\boxed{\text{si } A \text{ est inversible, alors } \sigma(A) \text{ l'est également,}}$$

et on a montré que son inverse est $[\sigma(A)]^{-1}$, donc /1

$$\boxed{\text{si } A \text{ est inversible, } \sigma(A^{-1}) = [\sigma(A)]^{-1}.}$$

B. Une $\mathbb{R}$-algèbre célèbre : l'algèbre des quaternions

A tout couple (z_1, z_2) de nombres complexes, on associe la matrice $M(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} z_1 & -\overline{z_2} \\ z_2 & \overline{z_1} \end{pmatrix}$.

On désigne par $H = \{M(z_1, z_2) \mid z_1, z_2 \in \mathbb{C}\}$.

1. (a) Si $z_1 = a + ib$ et $z_2 = c + id$ (avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$), alors on a :

$M(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} a+ib & -c+id \\ c+id & a-ib \end{pmatrix} = aI + cJ + dK - bL.$ /1,5

Donc toute matrice de H s'écrit : $\alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des réels.
Cette écriture est unique, puisqu'elle impose *nécessairement* : $z_1 = \alpha - i\delta$ et $z_2 = \beta + i\gamma$ /1,5

$$\boxed{\text{Toute matrice de } H \text{ s'écrit de manière unique sous forme } \alpha I + \beta J + \gamma K + \delta L, \text{ où } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.}$$

(b) Ainsi, $H = \mathrm{vect}_{\mathbb{R}}(I, J, K, L)$ (combinaison linéaire à coefficients réels), ainsi

$$\boxed{H \text{ est un sous-espace vectoriel du } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).}$$

Et l'on a une base : (I, J, K, L) (car cette famille est libre avec le corps $\mathbb{C}$ et donc avec son sous-corps $\mathbb{R}$). On a alors /2

$$\boxed{\dim_{\mathbb{R}}(H) = 4.}$$

(c) Soient $M(z_1, z_2)$ et $M(z_1', z_2') \in H$.

$$M(z_1, z_2) \times M(z_1', z_2') = \begin{pmatrix} z_1 z_1' - \overline{z_2} z_2' & -z_1\overline{z_2'} - \overline{z_2}\overline{z_1'} \\ z_2 z_1' + \overline{z_1} z_2' & -z_2\overline{z_2'} + \overline{z_1}\overline{z_1'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_1 & -\overline{Z_2} \\ Z_2 & \overline{Z_1} \end{pmatrix} \in H$$

avec $Z_1 = z_1 z_1' - \overline{z_2} z_2'$ et $Z_2 = z_2 z_1' + \overline{z_1} z_2'$. /2

Ainsi

$$\boxed{H \text{ est stable pour le produit matriciel.}}$$

Dans la définition de Z_1, on voit que l'on ne peut pas intervertir z_2 et z_2' sans qu'il n'y ait des conséquence sur la valeur de Z_1 (ce qu'on pourrait faire pour z_1 et z_1').
Donc on ne peut pas avoir dans le cas général : $M(z_1, z_2) \times M(z_1', z_2') = M(z_1', z_2') \times M(z_1, z_2)$.
Un contre-exemple : $M(0,1) \times M(0,i) = M(-i, 0)$ et $M(0,i) \times M(0,1) = M(i, 0)$ d'après les formules de Z_1 et Z_2. /1,5

$$\boxed{\text{Donc } H \text{ n'est pas commutative}}$$

2. (a) Si $A = M(z_1, z_2) \in H$, alors $\sigma(A) = M(\overline{z_1}, -z_2)$ car $\overline{\overline{z_1}} = z_1$ et donc /1,5

$$\boxed{\sigma(A) \in H \text{ dès que } A \in H.}$$

En outre /1

$$\boxed{\det(A) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 \in \mathbb{R}^+}$$

(b) Soit $A \in H$, d'après ce qu'on vient de voir, $\det(A) = |z_1|^2 + |z_2|^2$.
Donc $\det(A) = 0$ si et seulement si $z_1 = z_2 = 0$.
Ainsi, /1

$$\boxed{\text{toute matrice non nulle de } H \text{ est inversible}}$$

De plus, on a vu que $A \times \sigma(A) = \det(A)I$.
Donc si A est inversible, alors $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\sigma(A)$.
Mais $\sigma(A) \in H$, qui est un espace vectoriel, donc /2

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\sigma(A) \in H}$$

(c) On a vu la stabilité additive (H est un espace vectoriel), stabilité multiplicative, donc H est un sous-corps de $\mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$.
Et on sait aussi qu'il n'est pas commutatif. /1

$$\boxed{H \text{ est donc bien un corps non commutatif}}$$

3. (a) Supposons que $n_1 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2$ et $n_2 = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2$,
alors en notant $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_1' = c_1 + id_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ et $z_2' = c_2 + id_2$,
On a $n_1 = \det[M(z_1, z_1')]$ et $n_2 = \det[M(z_2, z_2')]$. /2
Et donc $n_1 \times n_2 = \det[M(z_1, z_1')] \times \det[M(z_2, z_2')] = \det[M(z_1, z_1') \times M(z_2, z_2')]$.
Mais $M(z_1, z_1') \times M(z_2, z_2') = M(z_1z_2 - \overline{z_1'}z_2', z_1'z_2 + \overline{z_1}z_2')$.
Donc en remplaçant par $a_1 \ldots d_2$, on a : /2

$$\begin{aligned} &M(z_1, z_1') \times M(z_2, z_2') \\ &\quad = M\big((a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) - (c_1 - id_1)(c_2 + id_2), (c_1 + id_1)(a_2 + ib_2) + (a_1 - ib_1)(c_2 + id_2)\big) \\ &\quad = M\big((a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 + d_1d_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1 - c_1d_2 + c_2d_1), \\ &\qquad\quad (c_1a_2 + d_1b_2 + a_1c_2 + b_1d_2) + i(d_1a_2 + c_1b_2 + a_1d_2 - b_1c_2)\big) \end{aligned}$$

En passant au déterminant /1

$$\boxed{\begin{aligned} n_1n_2 = &(a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 + d_1d_2)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1 - c_1d_2 + c_2d_1)^2 \\ &+(c_1a_2 + d_1b_2 + a_1c_2 + b_1d_2)^2 + (d_1a_2 + c_1b_2 + a_1d_2 - b_1c_2)^2 \end{aligned}}$$

(b) On a $5 = 4 + 1 + 0 + 0 = 2^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2$ et $14 = 9 + 4 + 1 + 0 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 0^2$
On *peut* donc prendre $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, $a_2 = 3$, $b_2 = 2$ et $c_2 = 1$ avec $c_1 = d_1 = d_2 = 0$. /1
Ainsi /2

$$\begin{aligned} &5 \times 14 = 70 = (2 \times 3 - 1 \times 2 - 0 + 0)^2 + (2 \times 2 + 1 \times 3 - 0 + 0)^2 \\ &+(0 + 0 + 2 \times 1 + 0)^2 + (0 + 0 + 0 - 1 \times 1)^2 = 4^2 + 7^2 + 2^2 + 1^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{70 = 16 + 49 + 4 + 1 = 4^2 + 7^2 + 2^2 + 1^2 \text{ (sans unicité de la décomposition).}}$$

C. Forme linéaire

1. Etude des applications F et f_A

(a) Soit $A \in H$,

$\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, B_1, B_2 \in H$:

$$\begin{aligned} f_A(\lambda_1B_1 + \lambda_2B_2) &= \tfrac{1}{4}\mathrm{Tr}\,\big(A\sigma(\lambda_1B_1 + \lambda_2B_2) + (\lambda_1B_1 + \lambda_2B_2)\sigma(A)\big) \\ &= \tfrac{1}{4}\mathrm{Tr}\,\big[\lambda_1A\sigma(B_1) + \lambda_2A\sigma(B_2) + \lambda_1B_1\sigma(A) + \lambda_2B_2\sigma(A)\big] && \times \text{ et } \sigma \text{ (bi)linéaires} \\ &= \tfrac{1}{4}\mathrm{Tr}\,\big[\lambda_1(A\sigma(B_1) + B_1\sigma(A)) + \lambda_2(A\sigma(B_2) + B_2\sigma(A))\big] \\ &= \tfrac{\lambda_1}{4}\mathrm{Tr}\,\big(A\sigma(B_1) + B_1\sigma(A)\big) + \tfrac{\lambda_2}{4}\mathrm{Tr}\,\big(A\sigma(B_2) + B_2\sigma(A)\big) && \mathrm{Tr} \text{ linéaire} \\ &= \lambda_1 f_A(B_1) + \lambda_2 f_A(B_2) \end{aligned}$$

Donc f_A est une application linéaire de H sur $\mathbb{R}$. /1

Par ailleurs, f_A est à valeur dans $\mathbb{R}$ (en notant : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & a' \end{pmatrix}$) : /2

$$A\sigma(B) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d' & -b' \\ -c' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad' - bc' & ? \\ ? & a'd - b'c \end{pmatrix}$$

$$A\sigma(B) + B\sigma(A) = \begin{pmatrix} ad' - bc' + a'd - b'c & ? \\ ? & a'd - b'c + ad' - bc' \end{pmatrix}$$

$$f_A(B) = \frac{1}{2}[(ad' + a'd) - (bc' + b'c)] = \mathcal{R}e(ad' - bc') \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\text{Pour toute matrice } A,\ f_A \text{ est une forme linéaire.}}$$

(b) On a bien F de H dans H^* d'après la question précédente.
Il s'agit maintenant de montrer la linéarité par rapport à A.
Mais par symétrie, remarquons que : pour tout B, $f_A(B) = f_B(A)$,
donc pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $A_1, A_2 \in H$ et $B \in H$: /1

$$F(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)(B) = f_{\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2}(B) = f_B(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) = \lambda_1 f_B(A_1) + \lambda_2 f_B(A_2)$$

$$= \lambda_1 f_{A_1}(B) + \lambda_2 f_{A_2}(B) = [\lambda_1 f_{A_1} + \lambda_2 f_{A_2}](B) = [\lambda_1 F(A_1) + \lambda_2 F(A_2)](B)$$

$$\boxed{\text{Donc } F \in \mathcal{L}(H, H^*).}$$

(c) Pour $M \in \{J, K, L\}$, $\sigma(M) = -M$ alors que $\sigma(I) = I$.
Donc (et par symétrie vue plus haut) pour $M \neq N \in \{J, K, L\}$ et I :

$f_I(M) = f_M(I) = \frac{1}{4}\text{Tr}\ (I\sigma(M) + M\sigma(I)) = \frac{1}{4}\text{Tr}\ (-M + M) = 0$
$f_I(I) = \frac{1}{4}\text{Tr}\ (I\sigma(I) + I\sigma(I)) = \frac{1}{2}\text{Tr}\ (I) = 1$
$f_M(M) = \frac{1}{4}\text{Tr}\ (M\sigma(M) + M\sigma(M)) = \frac{1}{4}\text{Tr}\ (2M \times \sigma(M)) = \frac{1}{2}\text{Tr}\ ((\det(M)I_n) = 1$
$f_M(N) = f_N(M) = \frac{1}{4}\text{Tr}\ (M\sigma(N) + N\sigma(M)) = \frac{1}{4}\text{Tr}\ (-2M \times N) = 0$

Le dernier résultat Tr $(M \times N) = 0$, vient du fait que :
— $JK) = -KJ = L$, $KL - LK = J$ et $LJ = -JL = K$
— Tr $(L) =$ Tr $(J) =$ Tr $(K) = 0$ /2

$$\boxed{\text{pour tout } M, N \in \{I, J, K, L\},\ f_M(N) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad M \neq N \\ 1 & \text{si} \quad M = N \end{cases}}$$

2. Etude d'un hyperplan.
On note $T = \{A \in H \mid \text{Tr}\ (A) = 0\}$.

(a) $T = \text{Ker Tr}$ et Tr est une forme linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donc de H. /0,5

$$\boxed{\text{Ainsi } T \text{ est un hyperplan du } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel } H.}$$

Par ailleurs, H est de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, donc T hyperplan de H est de dimension 3.
Puis Tr $(J) =$ Tr $(K) =$ Tr $(L) = 0$, donc $J, K, L \in T$.
Par ailleurs, on sait que la famille (J, K, L) est libre (car I, J, K, L est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ donc libre).
Ayant le bon nombre de vecteurs : /1,5

$$\boxed{(J, K, L) \text{ est une base de } T}$$

(b) Comme I, J, K, L est une base de H, on a donc

$$H = \text{vect}(I) \oplus \text{vect}(J, K, L) = \text{vect}(I) \oplus T$$

$$\boxed{\text{Ainsi, la droite engendrée par } I \text{ est un supplémentaire de } T \text{ dans } H.}$$ /1

(c) Soit $A \in H$, A est de la forme :

$$A = M(z_1, z_2) = \begin{pmatrix} a + ib & -c + id \\ c + id & a - ib \end{pmatrix} = aI + cJ + dK - bL$$

Dans ce cas,

$$p(A) = cJ + dK - bL = A - aI$$

Par linéarité (ou calcul direct) : Tr $(A) = a\text{Tr}\ (I) + c \times 0 + c \times 0 - b \times 0 = 2a$,
et $A + \sigma(A) =$ Tr $(A)I_n$; /2

$$\boxed{\text{Donc } p(A) = \frac{1}{2}(A - \sigma(A))}$$

Exercice 3 - *120 minutes environ*

A. Une question de dénombrement

On cherche à dénombrer le nombre de colliers de 67 perles, dont 2 sont noires, 2 sont jaunes, 7 sont rouges et 56 sont blanches.

1. Pour créer un collier, il s'agit d'enfiler les perles sur un fil (non encore refermé).
   Enfiler les perles, c'est exactement créer une liste de 67 éléments dont 2 sont noires, 2 sont jaunes, 7 sont rouges et 56 blanches.
   On peut raisonner directement comme avec des anagrammes (mais à justifier un peu, tout de même), on peut aussi noter qu'il s'agit de :
   (a) choisir 2 places parmi 67 pour les perles noires : $\binom{67}{2}$ possibilités
   (b) PUIS choisir 2 places parmi les 65 restantes pour les perles jaunes : $\binom{65}{2}$ possibilités
   (c) PUIS choisir 7 places parmi les 63 restantes pour les perles rouges : $\binom{63}{7}$ possibilités
   (d) PUIS on place les blanches : 1 seule possibilité.
   Ce qui conne une nombre de fil égal à */3*

$$\boxed{\binom{67}{2}\binom{65}{2}\binom{63}{7} = \frac{67!}{2!2!7!56!}}$$

Remarques !
Pour la démonstration avec les anagrammes, on peut écrire : S'il s'agit de permutation de 67 perles, il y a $67!$ *possibilités.*
Mais certaines forment apparaissent de multiple fois, $2! = 4$ *fois pour les permutations des perles noires,* $2! = 4$ *fois pour les permutations des perles jaunes,* $7!$ *pour les permutations des perles rouges et* $56!$ *fois pour les permutations des perles blanches.*
Il s'agit donc de faire la division, et on obtient : $\frac{67!}{2!2!7!56!}$ *fils différents*

2. On ferme le collier précédent en attachant les deux extrémités. */1*

Les fils $(J, J, N, N, \underbrace{R, \cdots, R}_{7\,R}, \underbrace{B, B, \dots B}_{56 B})$ et $(N, N, \underbrace{R, \cdots, R}_{7\,R}, \underbrace{B, B, \dots B}_{56\,B}, J, J)$ refermés donnent le même collier.

Le but de cet exercice est de déterminée le nombre de colliers différents ainsi obtenus.

B. Action de groupe

On commence par considérer $\mathcal{L}$, l'ensemble des listes L de 67 éléments, dont 2 sont des N, 2 sont des J, 7 sont des R et 56 sont des B.
On notera $L[i]$, la lettre située en position i dans la liste L de $\mathcal{L}$.
On considère $\mathcal{S} = S_{67}$, le groupe des permutations de $[\![1, 67]\!]$.
On s'intéresse à deux permutations particulières :
— $\sigma_0 = (1\,2\,3 \cdots 66\,67)$, le cycle des éléments ordonnés de $[\![1, 67]\!]$
— $\tau_0 = (1\,67)(2\,66)\dots(33\,35)$, la composée des 33 transpositions $(i, 68 - i)$.
Enfin, on note G, le plus petit sous-groupe de $\mathcal{S}$ qui contient σ_0 et τ_0.

1. Etude du groupe G.
   (a) σ_0 est un cycle de longueur 67, donc $\epsilon(\sigma_0) = (-1)^{67-1} = 1$.
   τ est une transposition, donc $\epsilon(\tau) = -1$.
   Enfin, ϵ est un morphisme, donc $\epsilon(\sigma_0^k \tau_0^m) = \big(\epsilon(\sigma_0)\big)^k \big(\epsilon(\tau_0)\big)^m = (1)^k(-1)m^{=}(-1)^m$. */2*

$$\boxed{\text{Bilan : } \epsilon(\sigma_0) = 1,\ \epsilon(\tau_0) = -1 \text{ et } \epsilon(\sigma_0^k \tau_0^m) = (-1)^m, \text{ pour tout entier } k, m.}$$

   (b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que σ_0^p possède k cycles.

Piste de recherche...
Attention à bien démontrer tout ce qui est énoncé ici.
En effet, même si certains résultats présentés ici ont été vus en cours, si leur démonstration n'a pas été faite, il faut le redémontrer...

Notons d'abord que $\sigma_0^h(j) = \sigma^{h-1}(j+1)$ (avec $68 = 1$)
et par récurrence $\sigma_0^h(j) = j + h \equiv [68]$.
et donc $\sigma_0^{67}(j) = j$ ainsi $\sigma_0^{67} = \mathrm{id}$.
Et plus précisément : $\forall\ h \in \mathbb{N}$, $\sigma_0^(h)(j) = \sigma_0^{r_{67}(h)}(j)$ où $r_{67}(h) = h\%67$
Par conséquent : $\sigma_0^h(j) = j$ si et seulement si $67|h$ (pour tout $j \in [\![1, 67]\!]$).
Revenons sur σ_0^p possédant k cycles,
on peut supposer que c_i le cycle i est de longueur ℓ_i respectivement.
Or l'orbite de $x_i \in \mathrm{supp}(c_i)$ est de longueur ℓ_i, on a donc $(\sigma^p)^{\ell_i}(x_i) = x_i$.
Ainsi $67|p\ell_i$.
Or 67 est un nombre premier. Donc $67|p$ ou $67|\ell_i$.
donc si $p \wedge 67 = 1$, on a donc $67|\ell_i$, or $\ell_i \in [\![1, 67]\!]$, donc $\ell_i = 67$. /3

Par conséquent, pour tout p, si $67\|p$ alors σ_0^p possède 67 points fixes et sinon σ_0^p possède un seule cycle

Piste de recherche...

(c) *Pour fair cette question, nous allons procéder en plusieurs temps :*

i. *Montrer que G est bien définie (facile)*
ii. *Montrer $\{\tau_0^i\sigma_0^j\ ,\ i \in \{0,1\}, j \in [\![0, 66]\!]\} \subset G$*
iii. *Pour montrer l'inclusion réciproque, nous allons montrer que $\sigma\tau = \tau\sigma^h$, avec un h bien choisi.*
Comme $\tau^{-1} = \tau$, nous allons donc faire le calcul $\tau^{-1}\sigma\tau = \tau\sigma\tau$ (c'est CLASSIQUE)
iv. *Dernière chose pour faire ce calcul nous allons exploiter le fait que les opérations σ et τ sont en réalités des calculs algébriques simples si on se place sur $\frac{\mathbb{Z}}{67\mathbb{Z}}$.*

Notons d'abord que $\{\sigma_0, \tau\} \subset \mathcal{S}$, qui est un groupe.
Donc l'ensemble $\{\mathcal{G}, \text{groupe } \mid \sigma, \tau \in \mathcal{G}\}$ est non vide.
Il admet un plus petit élément pour l'inclusion, donc G existe bien. /1
Comme $\sigma_0 \in G$, et que G est un groupe, alors $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $\sigma_0^k \in G$.
$\tau_0 \in G$ et comme G est un groupe, alors $\tau^i \in G$, pour $i = 0$ ou $i = 1$.
Enfin comme G est un groupe, pour $i = 1$ ou $i = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\tau_0^i\sigma_0^k \in G$.
On a donc montré : $\{\tau_0^i\sigma_0^j\ ,\ i \in \{0,1\}, j \in [\![0, 66]\!]\} \subset G$ /1
Remarquons que pour tout $j \in \{1, 67\}$, $\sigma_0(j) \equiv 1 + j[67]$ et $\tau_0(j) \equiv 68 - j[67]$.
Donc $(\tau_0 \circ \sigma_0 \circ \tau_0)(j) \equiv 68 - (1 + (68 - j)) \equiv 68 - 69 + j = j - 1[67]$
Ainsi : $\sigma_0\tau_0\sigma_0\tau_0 = \mathrm{id}$ donc $\sigma_0\tau_0 = \tau_0^{-1}\sigma^{-1} = \tau_0\sigma_0^{-1}$.
Soit $\sigma \in G$,
Comme G est un groupe engendré par σ_0, τ_0,
il existe $n \in \mathbb{N}$, $i_1, i_2, \dots i_n, j_1, j_2, \dots j_n \in \mathbb{N}$ tel que $\sigma = \sigma_0^{i_1}\tau_0^{j_1} \cdots \sigma_0^{i_n}\tau^{j_n}$
Comme τ_0 est une permutation, on peut considérer que $j_k \in \{0, 1\}$,
si $j_k = 0$, alors $\sigma_0^{i_k}\tau_0^0\sigma_0^{i_{k+1}} = \sigma_0^{i_k+i_{k+1}}$.
et si $j_k = 1$, alors $\sigma_0^{i_k}\tau_0^1\sigma_0^{i_{k+1}} = \tau\sigma_0^{-i_k}\sigma_0^{i_{k+1}} = \tau\sigma_0^{i_{k+1}-i_k}$.
Et ainsi, on démontre que $\sigma = \sigma_0^{i_1}\tau_0^{j_1} \cdots \sigma_0^{i_n}\tau^{j_n} = \tau_0^{r_2(\sum_{k=1}^n j_k)}\sigma_0^{r_{67}(\sum_{k=1}^n (-1)^{j_k} i_k)}$
Ainsi $G \subset \{\tau_0^i\sigma_0^j\ i \in \{0,1\}, j \in [\![0, 66]\!]\}$ /4

Bilan : $G = \{\tau_0^i\sigma_0^j\ i \in \{0,1\}, j \in [\![0, 66]\!]\}$

2. Action du groupe G sur l'ensemble $\mathcal{L}$.
On note $\otimes$ l'opération externe de G sur $\mathcal{L}$ à valeur dans $\mathcal{L}$ par :

$$\sigma \otimes L = (L[\sigma(1)], L[\sigma(2)], \cdots L[\sigma(67)]) = (L[\sigma(i)], i \in [\![1, 67]\!])$$

(a) — Soit $L_1 \in \mathcal{L}$.
$\mathrm{id} \in G$, et comme $L_1 = \mathrm{id} \otimes L_1$, on a donc $L_1 \mathcal{R} L_1$. Ainsi $\mathcal{R}$ est reflexive.
— Soient $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ telles que $L_1 \mathcal{R} L_2$.
Il existe $\sigma \in G$ telle que $L_2 = \sigma \otimes L_1$.
Pour tout $i \in [\![1, 67]\!]$, $L_2[i] = L_1[\sigma(i)]$, donc en $j = \sigma(i)$ i.e. $i = \sigma^{-1}(j)$:
$L_1[j] = L_2[i] = L_2[\sigma^{-1}(j)]$, ceci est vrai pour tout j car σ surjective.
Donc $L_1 = \sigma^{-1} \otimes L_2$. Et comme $\sigma^{-1} \in G$, on a bien $L_2 \mathcal{R} L_1$.
La relation $\mathcal{R}$ est symétrique.
— Soient $L_1, L_2, L_3 \in \mathcal{L}$ telles que $L_1 \mathcal{R} L_2$ et $L_2 \mathcal{R} L_3$.
Il existe $\sigma_1, \sigma_2 \in G$ telle que $L_2 = \sigma_1 \otimes L_1$ et $L_3 = \sigma_2 \otimes L_2$.
Pour tout $i \in [\![1, 67]\!]$, $L_3[i] = L_2[\sigma_2(i)] = L_1[\sigma_1(\sigma_2(i))]$ Donc $L_3 = (\sigma_1 \circ \sigma_2) \otimes L_1$.

Et comme $\sigma_1 \circ \sigma_2 \in G$, on a bien $L_3 \mathcal{R} L_1$.
La relation $\mathcal{R}$ est transitif. /3

$$\boxed{\text{Ainsi } \mathcal{R} \text{ est une relation d'équivalence.}}$$

(b) L'opération σ_0 sur la liste L consiste à faire tourner la liste L.
Si le collier est formée (la liste refermée), cette rotation conserve le même collier.
L'opération τ_0 sur la liste L consiste à faire tourner la liste L dans l'autre sens.
Si le collier est formée (la liste refermée), cette symétrie conserve le collier.
Toute combinaison de σ_0 et τ_0 constitue cette même opération géométrique qui conserve le collier.
Ainsi s'il existe $\sigma \in G$ tel que $\sigma \otimes L_1 = L_2$, alors L_1 et L_2 représentent le même collier. /1
Réciproquement, si L_1 et L_2 sont deux listes qui représentent le même collier,
Alors en tournant, ou en le retournant on peut passer de la liste L_1 à la liste L_2.
Algorithmiquement, on peut comparer la place des perles noires par exemple. /1

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Donc } L_1 \text{ et } L_2 \text{ sont deux listes qui représentent le même collier (partie A)} \\ \text{si et seulement si il existe } \sigma \in G \text{ tel que } \sigma \otimes L_1 = L_2.\end{array}}$$

(c) On raisonne directement par équivalence (donc égalité d'ensembles)
$L \in \mathcal{O}(L_1) \iff L$ représente le même collier que L_1 /2

$$\iff \exists\ \sigma \in G \text{ tel que } \sigma \otimes L_1 = L$$

$$\iff L \in \{\sigma \otimes L_1, \sigma \in G\}$$

$$\boxed{\text{Donc } \mathcal{O}(L_1) = \{\sigma \otimes L_1, \sigma \in G\}}$$

(d) Soient $\sigma, \sigma' \in G$ et $L \in \mathcal{L}$, /3

$$\begin{aligned}\forall\ i \in [\![1, 67]\!], \quad \big((\sigma \circ \sigma') \otimes L\big)[i] &= L[(\sigma \circ \sigma')(i)] = L[\sigma(\sigma'(i))] \\ &= (\sigma \otimes L)[\sigma'(i)] = \big(\sigma' \otimes (\sigma \otimes L)\big)[i]\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\forall\ \sigma, \sigma' \in G, \forall\ L \in \mathcal{L} \qquad (\sigma \circ \sigma') \otimes L = \sigma' \otimes (\sigma \otimes L)}$$

C. Formule de Burnside

La formule de Burnside s'énonce ainsi : Si G un groupe fini agissant sur un ensemble $\mathcal{L}$ fini, alors le nombre d'orbites sous l'acton de G est donné par la formule :

$$\frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} |\mathrm{Fix}(\sigma)|$$

où $\mathrm{Fix}(\sigma)$ désigne l'ensemble des éléments de Y fixés par σ.

1. Application de la formule.

(a) On a vu que $G = \{\tau_0^i \sigma_0^j\ i \in \{0, 1\}, j \in [\![0, 66]\!]\}$.
Tout ces $2 \times 67 = 134$ éléments sont distinctes.
En effet, si $\tau_0^i \sigma_0^j = \tau_0^{i'} \sigma_0^{j'}$ alors pour des questions de signature $i = i'$.
et alors $\sigma_0^j = \sigma_0^{j'}$, ce qui impose $67 | j - j'$ et donc $j = j'$ (car $j, j' \in [\![0, 66]\!]$). /2

$$\boxed{|G| = 134}$$

Soit $\sigma \in G$. On cherche donc à dénombrer

$$\mathrm{Fix}(\sigma) = \{L \in \mathcal{L} \mid \sigma \otimes L = L\}$$

(b) Supposons que $\sigma = \sigma_0^k$avec $k \in [\![1, 66]\!]$. Soit $L \in \mathrm{Fix}(\sigma)$.
On a vu que $\sigma_0^k(i) \equiv i+k[67]$, donc si $L[i] =$N, alors $L[i+k] =$N, mais alors $L[i+2k] =$N également.
Donc $2k = 67$ (il n'y a pas d'autres N possibles), ce qui est impossible. /2

$$\boxed{\text{Dans ce cas } |\mathrm{Fix}(\sigma)| = 0}$$

(c) Comme $\sigma_0^0 = \mathrm{Id}$, alors pour tout liste $L \in \mathcal{L}$, $\sigma_0^0 \otimes L = L$.
Donc, comme on a fait le calcul en partie A : /2

$$\boxed{|\mathrm{Fix}(\sigma_0^0)| = |\mathcal{L}| = \frac{67!}{2!2!7!56!}}$$

(d) Soit L tel que $\tau_0 \otimes L = L$.
Si $L[i]$ =N, alors nécessairement $L[68-i] = L[\tau_0(i)] = L[i]$ =N.
De même pour J.
Pour R, en nombre impair, il faut qu'une perle soit invariante par τ_0 ;
donc nécessairement (pas de choix) $L[34]$ =R,
et il y a trois 3 entre 1 et 33 les autres sont les symétriques.
Enfin, les B occupent les dernière places (28 entre 1 et 33 et 28 entre 35 et 67).
Donc, décrire parfaitement une liste L vérifiant $L = \tau_0 \otimes L$, il faut :
— choisir une place pour N entre 1 et 33 : $\binom{33}{1} = 33$ possibilités.
— PUIS choisir une place pour J entre 1 et 33 (mais pas celle prise par N) : $\binom{32}{1} = 32$ possibilités.
— PUIS choisir trois place pour R entre 1 et 33 (mais ni celle de N, ni celle de J) : $\binom{31}{3}$ possibilités.
Donc /4

$$\boxed{|\mathrm{Fix}(\tau_0)| = \frac{33 \times 32 \times 31!}{3!28!} = \frac{33!}{1!1!3!28!}}$$

Considérons $L \in \mathrm{Fix}(\tau_0\sigma_0^k)$, donc $\tau^0\sigma_0^k \otimes L = L$.
Ainsi, $\forall\ i$, $L[\tau_0\sigma_0^k(i)] = L[i]$ i.e. $L[68-i-k] = L[i]$.
On retrouve alors les mêmes conditions que précédemment : choix d'une position pour N, l'autre imposée par symétrie.... /2

$$\boxed{\text{Donc, on a également : } |\mathrm{Fix}(\tau_0\sigma_0^k)| = \frac{33!}{1!1!3!28!}, \text{ pour } k \in [\![1, 66]\!]}$$

(e) Il reste à appliquer la formule de Burnside :

$$N = \frac{1}{|G|}\sum_{\sigma\in G}|\mathrm{Fix}(\sigma)| = \frac{1}{132}\left(\underbrace{\frac{67!}{2!2!7!56!}}_{\mathrm{Fix}(\sigma^0)} + \underbrace{0}_{\mathrm{Fix}(\sigma^k)} + \underbrace{67 \times \frac{33!}{1!1!3!28!}}_{\mathrm{Fix}(\tau_0\sigma^k)}\right)$$

Donc /2

$$\boxed{\frac{1}{134}\left(\frac{67!}{2!2!7!56!} + 67 \times \frac{33!}{1!1!3!28!}\right) \approx 1,9 \times 10^{13}}$$

2. Démonstration de la formule de Burnside.
On note $C = \{(\sigma, L) \in G \times \mathcal{L} \mid \sigma \otimes L = L\}$. On cherche à le dénombrer de deux façons distinctes, il en découlera le nombre d'orbite recherché.

(a) $C = \bigcup_{L\in\mathcal{L}}\{(\sigma, L) \mid \sigma \in G \text{ et } \sigma \otimes L = L\}$ C'est une réunion disjointe, donc /2

$$|C| = \sum_{L\in\mathcal{L}}\left|\{(\sigma, L) \mid \sigma \in G \text{ et } \sigma \otimes L = L\}\right| = \sum_{L\in\mathcal{L}}\left|\{\sigma \in G \mid \sigma \otimes L = L\}\right|$$

$$\boxed{\text{Conclusion : } |C| = \sum_{L\in\mathcal{L}}|\{\sigma \in G \mid \sigma \otimes L = L\}|.}$$

On note $G(L) = \{\sigma \in G \mid \sigma \otimes L = L\}$ et $g(L) = |G(L)|$, donc $|C| = \sum_{L\in\mathcal{L}} g(L)$.

(b) Soit $L \in \mathcal{L}$. On note $\mathcal{O}(L)$, l'orbite de L sous l'action $\otimes$.
Soit $L' = \sigma' \otimes L$. On exploite la réponse à la dernière question de la partie précédente :

$$\begin{aligned}
&(\sigma' \circ \sigma \circ (\sigma')^{-1}) \otimes L' = L' \\
&\quad\iff (\sigma' \circ \sigma \circ (\sigma')^{-1}) \otimes (\sigma' \otimes L) = \sigma' \otimes L \\
&\quad\iff (\sigma' \circ (\sigma')^{-1} \circ \sigma \circ \sigma') \otimes L = \sigma' \otimes L \\
&\quad\iff (\sigma \circ \sigma') \otimes L = \sigma' \otimes L \\
&\quad\iff \sigma' \otimes (\sigma \otimes L) = \sigma' \otimes L \\
&\quad\iff \sigma \otimes L = L
\end{aligned}$$ /3

$$\boxed{\sigma \otimes L = L \quad\iff\quad ((\sigma')^{-1} \circ \sigma \circ \sigma') \otimes L' = L'}$$

En déduit que $\varphi : G(L) \to G(L')$, $\sigma \mapsto (\sigma')^{-1} \circ \sigma \circ \sigma'$ est bijective. /3

$$\boxed{\text{Donc } g(L) = g(L').}$$

(c) Soit $L \in \mathcal{L}$.
$G(L) = \{\sigma \in G \mid \sigma \otimes L = L\}$ est fini. Notons $K = g(L)$ et $\sigma_1, \dots \sigma_K \in G(L)$.

$$\sigma \otimes L = \sigma' \otimes L \iff (\sigma')^{-1} \otimes (\sigma \otimes L) = L \iff (\sigma \circ (\sigma')^{-1}) \otimes L = L$$

$$\iff (\sigma \circ (\sigma')^{-1}) \in G(L) \iff \exists\, i \leqslant K, \sigma \circ (\sigma')^{-1}) = \sigma_i$$

$$\iff \exists\, i \leqslant K, \sigma = \sigma_i \sigma'$$

Ainsi, $G(\sigma \otimes L) = \{\sigma_i \circ \sigma, \sigma_i \in G(L)\}$ et donc pour tout $\sigma \in G$, $g(\sigma \otimes L) = g(L)$.
Par conséquent, pour tout $\sigma \in G$,

$\exists\, !(i, L') \in [\![1, K]\!] \times \mathcal{O}(L)$ puis il existe σ' tel que $L' = \sigma' \otimes L$ et $\sigma = \sigma_i \circ \sigma'$. On crée donc ainsi une bijection de G sur $[\![1, K]\!] \times \mathcal{O}(L)$. En passant aux cardinaux : */4*

$$\boxed{\text{pour tout } L \in \mathcal{L},\ |G| = |\mathcal{O}(L)| \times g(L) \text{ (théorème de Lagrange)}}$$

(d) Comme $\{\mathcal{O}(L)\}$ forme une partition de $\mathcal{L}$, on suppose que $\mathcal{L}$ est partagé en h orbites différentes, chacune représentée par une liste L_i. On peut donc écrire :

$$\mathcal{L} = \bigcup_{i=1}^{h} \mathcal{O}(L_i) \qquad \text{Union disjointe}$$

Ainsi, en reprenant la formule en (a),

$$|C| = \sum_{L \in \mathcal{L}} g(L) = \sum_{L \in \cup_{i=1}^{h} \mathcal{O}(L_i)} g(L) = \sum_{i=1}^{h} \sum_{L \in \mathcal{O}(L_i)} g(L)$$

Mais on a vu à la question b que si L et L' sont dans la même orbite alors $g(L) = g(L')$.
Donc pour tout $L \in \mathcal{O}(L_i)$, $g(L) = g(L_i)$ qui est constante et « sort » de la somme : */3*

$$|C| = \sum_{i=1}^{h} g(L_i) \sum_{L \in \mathcal{O}(L_i)} 1 = \sum_{i=1}^{h} g(L_i) \big|\mathcal{O}(L_i)\big|$$

Enfin, on exploite la formule de Lagrange trouvée en (c) : $|G| = |\mathcal{O}(L)| \times g(L)$, $\forall\ L$, */1*

$$\boxed{|C| = \sum_{i=1}^{h} |\mathcal{O}(L_i)| \times g(L_i) = |G| \sum_{i=1}^{h} 1 = h \times |G|}$$

(e) On a aussi en raisonnant sur σ */2*

$$C = \{(\sigma, L) \in G \times \mathcal{L} \mid \sigma \otimes L = L\} = \bigcup_{\sigma \in G} \{(\sigma, L) \mid L \in \mathcal{L} \text{ et } \sigma \otimes L = L\} = \bigcup_{\sigma \in G} \{(\sigma, L) \mid L \in \mathrm{Fix}(\sigma)\}$$

Donc en prenant le cardinal :

$$\boxed{|C| = \sum_{\sigma \in G} |\mathrm{Fix}(\sigma)|}$$

(f) On a donc */1*

$$|C| = \sum_{\sigma \in G} |\mathrm{Fix}(\sigma)| = h \times |G|$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } h \text{ le nombre d'orbite de } \mathcal{L} \text{ sous l'action de } G \text{ vérifie : } h = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} |\mathrm{Fix}(\sigma)}$$