

Devoir Surveillé n°5 CORRECTION

Exercice

1. Soit $\gamma : v \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$.

(a) $\gamma(v)$ est définie, si et seulement si $1 - \frac{v^2}{c^2} > 0$, donc si et seulement si $v \in]-c, c[$. /0,5

Et pour tout $v \in]-c, c[$, $-v \in]-c, c[$ et $\gamma(-v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(-v)^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma(v)$ /0,5

$\mathcal{D}_\gamma =]-c, c[$ et γ est paire.

On l'étudie donc que sur $[0, v[$ et on tracera la symétrie par rapport à l'axe Oy .

(b) Sur $\mathcal{D}_\gamma$, γ est dérivable et $\forall v \in \mathcal{D}_\gamma$, /1

$$\gamma'(v) = \frac{-\frac{2v}{c^2}}{2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}(1 - \frac{v^2}{c^2})} = \frac{v}{c^2(1 - \frac{v^2}{c^2})^{3/2}}$$

Donc γ est strictement croissante sur $]0, c[$.

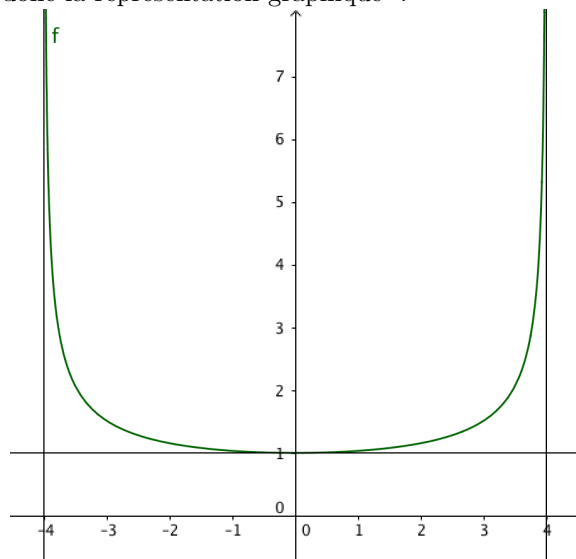
Puis comme $\lim_{v \rightarrow c} \gamma(v) = +\infty$, /0,5

la droite d'équation $x = c$ est une asymptote (verticale) de $\mathcal{C}_\gamma$.

Enfin, comme $\gamma(0) = 1$ et $\gamma'(0) = 0$, /0,5

la droite d'équation $y = 1$ est la tangente à $\mathcal{C}_\gamma$ en $x = 0$.

On a donc la représentation graphique :



(c) $\gamma(v) = (1 - \frac{v^2}{c^2})^{-1/2}$, avec $X = \frac{v^2}{c^2}$, le développement à l'ordre 4 de $(1 - X)^{-1/2}$ est suffisant. Pour X au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} (1 - X)^{-1/2} &= 1 + \frac{-\frac{1}{2}}{1!}(-X) + \frac{\frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2}}{2!}(-X)^2 + \frac{\frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-5}{2}}{3!}(-X)^3 + \frac{\frac{-1}{2} \cdot \frac{-3}{2} \cdot \frac{-5}{2} \cdot \frac{-7}{2}}{4!}(-X)^4 + O(X^5) \\ &= 1 + \frac{1}{2}X + \frac{3}{8}X^2 + \frac{5}{16}X^3 + \frac{35}{64}X^4 + O(X^5) \end{aligned}$$

On a donc, au voisinage de 0 :

$$\gamma(v) = 1 + \frac{1}{2c^2}v^2 + \frac{3}{8c^4}v^4 + \frac{5}{16c^6}v^6 + \frac{35}{64c^8}v^8 + O(v^{10})$$

$f(v) = 1 + \frac{1}{2c^2}v^2 + \frac{3}{8c^4}v^4 + \frac{5}{16c^6}v^6 + \frac{35}{64c^8}v^8 + o(v^9)$ au voisinage de 0

/1,5

(d) Posons $A = \gamma(v)$, donc $A^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, donc /0,5

$$\boxed{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)[\gamma(v)]^2 = 1 \iff [\gamma(v)]^2 = 1 + [\gamma(v)]^2 \frac{v^2}{c^2}}$$

On a alors (en se limitant à l'ordre 6) : /1

$$\begin{aligned} [\gamma(v)]^2 &= \left(1 + \frac{1}{2c^2}v^2 + \frac{3}{8c^4}v^4 + \frac{5}{16c^6}v^6 + o(v^6)\right)^2 \\ &= 1 + 2 \times 1 \times \frac{1}{2c^2}v^2 + 2 \times 1 \times \frac{3}{8c^4}v^4 + \left(\frac{1}{2c^2}v^2\right)^2 \\ &\quad + 2 \times 1 \times \frac{5}{16c^6}v^6 + 2 \times \frac{1}{2c^2}v^2 \times \frac{3}{8c^4}v^4 + o(v^6) \\ &= 1 + \frac{1}{c^2}v^2 + \frac{1}{c^4}v^4 + \frac{1}{c^6}v^6 + o(v^6) \end{aligned}$$

Donc /1

$$\boxed{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\gamma(v) = 1 + \frac{1}{c^2}v^2 + \frac{1}{c^4}v^4 + \frac{1}{c^6}v^6 - \frac{1}{c^2}v^2 - \frac{1}{c^4}v^4 - \frac{1}{c^6}v^6 + o(v^6) = 1 + o(v^6)}$$

2. Soit $v \in \mathcal{G}$, et $(x, t) \in E$. On note $(X, T) = \varphi_v(x, t)$.

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(c^2T^2 - X^2) &= c^2\left(t - \frac{1}{c^2}vx\right)^2 - (x - vt)^2 \\ &= c^2t^2 - 2tvx + \frac{v^2x^2}{c^2} - x^2 + 2vxt - v^2t^2 \\ &= \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(c^2t^2 - x^2) \end{aligned}$$

Donc en divisant par $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \neq 0$, on a donc /1

$$\boxed{\forall v \in \mathcal{G}, \forall (x, t) \in E, \text{ si } (X, T) = \varphi_v(x, t) \text{ alors } c^2T^2 - X^2 = c^2t^2 - x^2}$$

On a trouvé un invariant de transformation de Lorentz.

3. Soient $v, v' \in \mathcal{G}$, soit $(x, t) \in E$,

$$\begin{aligned} (\varphi_v \circ \varphi_{v'})(x, t) &= \varphi_v(\varphi_{v'}(x, t)) = \varphi_v(\gamma(v')(x - v't, t - \frac{1}{c^2}v'x)) \\ &= \gamma(v)\gamma(v')((x - v't) - v(t - \frac{1}{c^2}v'x), (t - \frac{1}{c^2}v'x) - \frac{1}{c^2}v(x - v't)) \\ &= \gamma(v)\gamma(v')((1 + \frac{vv'}{c^2})x - (v + v')t, (1 + \frac{vv'}{c^2})t - \frac{1}{c^2}(v + v')x) \\ &= \frac{1 + \frac{vv'}{c^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)}} \left(x - \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}t, t - \frac{1}{c^2} \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}x\right) \end{aligned} \quad /1$$

On pose alors $V = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}$.

Alors,

$$\begin{aligned} \gamma(V) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(v + v')^2}{c^2(1 + \frac{vv'}{c^2})^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2 + 2vv' + v'^2}{c^2 + 2vv' + \frac{v^2v'^2}{c^2}}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{c^2 + 2vv' + \frac{v^2v'^2}{c^2} - v^2 - 2vv' - v'^2}{c^2(1 + \frac{vv'}{c^2})^2}}} = \frac{(1 + \frac{vv'}{c^2})}{\sqrt{1 + \frac{v^2v'^2}{c^4} - \frac{v^2}{c^2} - \frac{v'^2}{c^2}}} \\ &= \frac{1 + \frac{vv'}{c^2}}{\sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)}} \end{aligned} \quad /1$$

Et on a donc bien

$$\boxed{\varphi_v \circ \varphi_{v'} = \varphi_V \text{ avec } V = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}}}$$

4. On définit donc sur l'ensemble $\mathcal{G}$, la loi

$$v_1 \oplus v_2 = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

On ne peut pas montrer que c'est un sous-groupe, car même s'il bien vrai que $\mathcal{G} \subset \mathbb{R}$ et que $\mathbb{R}$ est un groupe ; la loi n'est pas la même !!.

Notons :

— pour tout $v \in \mathcal{G}$,

$$0 \oplus v = \frac{0 + v}{1 + \frac{0 \times v}{c}} = v \text{ et de même } v \oplus 0 = v$$

Donc $\mathcal{G}$ admet un élément neutre : 0.

/0,5

— Soit $v \in \mathcal{G} =]-c, c[$.

Soit $-v$, son opposé dans $\mathbb{R}$, alors $-v \in \mathcal{G} =]-c, c[$,

$$v \oplus (-v) = \frac{v + (-v)}{1 + \frac{v \times (-v)}{c^2}} = 0 = (-v) \oplus v$$

Donc tout élément de $\mathcal{G}$ admet un opposé, dans $\mathcal{G}$

/0,5

— On va d'abord démontrer la commutativité. C'est simple et on l'exploitera pour l'associativité.

Soient $v, v' \in \mathcal{G}$

/0,5

$$v \oplus v' = \frac{v + v'}{1 + \frac{vv'}{c^2}} = \frac{v' + v}{1 + \frac{v'v}{c^2}} = v' \oplus v$$

— L'associativité découle de l'associativité de la composition de fonctions, mais on va la redémontrer « localement ».

Soient v_1, v_2 et $v_3 \in \mathcal{G}$.

$$\begin{aligned} v_1 \oplus (v_2 \oplus v_3) &= v_1 \oplus \frac{v_2 + v_3}{1 + \frac{v_2 v_3}{c^2}} = \frac{v_1 + \frac{v_2 + v_3}{1 + \frac{v_2 v_3}{c^2}}}{1 + \frac{v_1 \frac{v_2 + v_3}{1 + \frac{v_2 v_3}{c^2}}}{c^2}} = \frac{(v_1 + v_2 + v_3 + \frac{v_1 v_2 v_3}{c^2}) \frac{1}{1 + \frac{v_2 v_3}{c^2}}}{1 + \frac{v_1 v_2 + v_1 v_3}{c^2 + v_2 v_3}} \\ &= \frac{c^2 (v_1 + v_2 + v_3 + \frac{v_1 v_2 v_3}{c^2})}{c^2 + v_2 v_3 + v_1 v_2 + v_1 v_3} = \frac{c^2 v_1 + c^2 v_2 + c^2 v_3 + v_1 v_2 v_3}{c^2 + v_2 v_3 + v_1 v_2 + v_1 v_3} \end{aligned}$$

La dernière expression est totalement symétrique en v_1, v_2, v_3 .

Donc, en exploitant la commutativité de $\mathcal{G}$:

/1,5

$$v_1 \oplus (v_2 \oplus v_3) = v_3 \oplus (v_1 \oplus v_2) = (v_1 \oplus v_2) \oplus v_3$$

Donc

l'ensemble $(\mathcal{G}, \oplus)$ est un groupe commutatif

5. Soit $v, v' \in \mathcal{G} =]-c, c[$, La fonction $f_{v'} : v \mapsto v \oplus v'$ est continue en c .

Donc

$$\lim_{v \rightarrow c} V = \lim_{v \rightarrow c} f_{v'}(v) = f_{v'}(c) = \frac{c + v'}{1 + \frac{v'}{c}} = c$$

/1

La limite est indépendante de v' , elle vaut c .

Dans un tel modèle, la vitesse de la lumière n'est pas dépassable et ce modèle confirme les expériences de Michelson et Morley présentées en début d'énoncé.

Dans cet exercice, on voit une situation très fréquente aujourd'hui en science physique, (mais aussi en mathématiques) :

- un groupe $(\mathcal{G}, \oplus)$
- qui agit sur un ensemble $(E = \mathbb{R}^2)$
- par la transformation $\Phi : v \in \mathcal{G} \mapsto \varphi_v (\in \mathcal{F}(E, E))$

On parle d'action du groupe $\mathcal{G}$ sur l'ensemble E . (il faut que l'action vérifie : $\varphi_{e_{\mathcal{G}}} = id$ et $\varphi_{v \oplus v'} = \varphi_v \circ \varphi_{v'}$). En physique, on exploite les actions de groupes pour mieux comprendre les ensembles E . En mathématiques, on utilise plutôt les actions de groupes pour mieux comprendre les groupes en question (par l'étude de « représentants »)...

Problème

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et f une fonction de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, b[$.
 f est dite absolument monotone (en abrégé) AM si : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]a, b[, f^{(n)}(x) \geq 0$.
 f est dite complètement monotone (en abrégé) CM si : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]a, b[, (-1)^n f^{(n)}(x) \geq 0$.

A. Régularité et exemples

1. Soient f et g deux fonctions AM définies sur $]a, b[$.

Alors f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc $f + g$ et $f \times g$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]a, b[$:

/0,5

$$(f + g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x) \geq 0$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]a, b[$,

/1

$$(f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \geq 0$$

Ainsi

Si f et g sont AM sur $]a, b[$, il en est de même de $f + g$ et $f \times g$

Soient f et g deux fonctions CM définies sur $]a, b[$.

Alors f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$, donc $f + g$ et $f \times g$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]a, b[$:

/0,5

$$(-1)^n (f + g)^{(n)}(x) = (-1)^n f^{(n)}(x) + (-1)^n g^{(n)}(x) \geq 0$$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]a, b[$,

/1

$$(-1)^n (f \times g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [(-1)^k f^{(k)}(x)] [(-1)^{n-k} g^{(n-k)}(x)] \geq 0$$

Ainsi

Si f et g sont CM sur $]a, b[$, il en est de même de $f + g$ et $f \times g$

2. Notons $s :]-b, -a[\rightarrow]a, b[, x \mapsto -x$.

s est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -b, -a[$.

Pour tout $x \in]-b, -a[, s'(x) = -1$ et pour tout $n > 1, s^{(n)}(x) = 0$.

Par composition : f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ ssi $g = f \circ s$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

/0,5

Dans ce cas, on montre par récurrence :

/1

$$\mathcal{P}_n : \ll \forall x \in]-b, -a[, g^{(n)}(x) = (-1)^n f^{(n)}(-x) \gg$$

— Pour tout $x \in]-b, -a[, g^{(0)}(x) = g(x) = f(-x) = (-1)^0 f^{(0)}(-x)$, donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Pour tout $x \in]-b, -a[, g^{(n)}(x) = (-1)^n f^{(n)}(-x)$, on peut dériver :

$$\forall x \in]-b, -a[, g^{(n+1)}(x) = (-1)^n \times (-1) f^{(n+1)}(-x) = (-1)^{n+1} f^{(n+1)}(-x)$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

On a donc la suite d'équivalence :

/0,5

$$\begin{aligned} f \text{ est AM sur }]a, b[&\iff f \in \mathcal{C}^\infty([a, b]) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b], f^{(n)}(x) \geq 0 \\ &\iff g \in \mathcal{C}^\infty([a, b]) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a, b], (-1)^n g^{(n)}(x) = ((-1)^n)^2 f^{(n)}(x) \geq 0 \\ &\iff g \text{ est CM sur }]a, b[\end{aligned}$$

avec g définie par $g(x) = f(-x)$, on a f est AM sur $]a, b[$ si et seulement si g est CM sur $] -b, -a[$.

3. Exemples.

(a) $\ln$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et par récurrence, pour tout $k \geq 1, \ln^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k}$.

En effet :

— $\ln'(x) = \frac{1}{x} = \frac{(-1)^{0!}}{x^1}$, la formule est vraie pour $k = 1$.

— Supposons qu'elle soit vrai au rang $k \geq 1$, donc

$$\ln^{(k+1)}(x) = d \left(x \mapsto \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{x^k} \right) = \frac{-(-1)^{k-1} (k-1)! k x^{k-1}}{x^{2k}} = \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$$

dans ce cas $\mathcal{P}_{k+1}$ est également vraie.

Ainsi par multiplication par -1 , $x \mapsto -\ln x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, 1[$,

$$\text{et pour } x \in]0, 1[, (-1)^k d^k(x \mapsto -\ln x) = (-1)^k \frac{-(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} = \frac{(k-1)!}{x^k} \geq 0. \quad /1,5$$

Donc la fonction $-\ln$ est CM sur $]0, 1[$.

(b) $\tan$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

Si on dérive n fois cette expression, avec la formule de Leibniz, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \tan^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tan^{(k)}(x) \tan^{(n-k)}(x)$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{Q}_n : \ll \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \tan^{(n)}(x) \geq 0 \gg$

— $\mathcal{Q}_0$ est vraie : $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \tan^{(0)}(x) = \tan(x) \geq 0$

— $\mathcal{Q}_1$ est vraie : $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \tan^{(1)}(x) = 1 + \tan^2(x) \geq 0$

— Soit $n \geq 1$. Supposons que pour tout $h \leq n$, $\mathcal{P}_h$ est vraie.

$$\text{Alors } \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \tan^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \tan^{(k)}(x) \tan^{(n-k)}(x) \geq 0$$

(La récurrence a besoin de termes initiaux ici, car la relation que l'on utilise n'est vraie que pour $n \geq 1$).

Donc $\tan$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \tan^{(n)}(x) \geq 0$ /1,5

Ainsi la fonction $\tan$ est AM sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

4. Prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ en a^+ .

(a) f est AM sur $]a, b[$.

Donc pour tout $x \in]a, b[$, $f'(x) \geq 0$, donc f est croissante sur $]a, b[$.

On a alors vu que dans ce cas (théorème de la limite monotone) :

f admet une limite en b^- , ssi f est majorée

et (surtout) f admet une limite en a^+ ssi f est minorée.

Or pour tout $x \in]a, b[$, $f(x) \geq 0$.

Donc f est minorée par 0, décroissante sur $]a, b[$, ainsi /1

f admet une limite en a^+ positive ou encore : il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lambda = \lim_{a^+} f$

(b) On prolonge f en posant $f(a) = \lambda$.

La fonction f' est également AM, donc également continue,

on peut lui appliquer ce que l'on vient de démontrer :

f' admet une limite en a^+ (positive).

D'après le théorème de prolongement de classe $\mathcal{C}^1$, il suffit que f' ait une limite en a^+ , pour que f soit dérivable en a et f' est continue sur $]a, b[$. /1

Donc f est dérivable à droite en a , et que f' est continue à droite en a .

(c) On peut généraliser le résultat que l'on vient de trouver à toutes les dérivées de f .

Là encore, on va faire une récurrence :

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n : \ll f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } [a, b[, \text{ avec } f^{(n)}(a) \geq 0 \gg$.

— Le cas $\mathcal{H}_0$ a été vérifiée (et également $\mathcal{H}_1$).

— Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $\mathcal{H}_n$ est vraie.

f est AM, donc $f^{(n+2)}$ est positive, donc $f^{(n+1)}$ est croissante sur $]a, b[$.

En outre, $f^{(n+1)}$ est également positive, donc minorée.

Ainsi, $f^{(n+1)}$ admet une limite en a^+ .

D'après l'hypothèse de récurrence, f^n est continue sur $[a, b[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$,

et $(f^{(n)})'$ admet une limite en a^+ , nécessairement positive

donc f^n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b[$ et donc f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b[$

Ainsi $\mathcal{H}_{n+1}$ est vérifiée.

Donc /2

f est indéfiniment dérivable à droite en a avec des dérivées positives ou nulles.

(d)

Le même phénomène ne se produit pas en b , car la fonction n'est, a priori, pas majorée.

C'est le cas de la fonction $\tan$ vu dans l'exemple. /1

B. Lien avec le développement de Taylor

On suppose dans cette partie que : $-\infty < a < 0 < b \leq +\infty$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]a, b[$, considérons

$$\varphi : x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{(t-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \int_x^t \frac{(t-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u) du = \sum_{k=0}^n \frac{(t-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - \int_t^x \frac{(t-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u) du$$

φ est de classe $\mathcal{C}^1$, et pour tout $x \in]a, b[$,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{(t-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + \sum_{k=1}^n \frac{k(t-x)^{k-1}}{k!} f^{(k)}(x) - \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(t-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{(t-x)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(x)}_{i=k-1} - \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(t-x)^k}{k!} f^{(k+1)}(x) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(t-x)^i}{i!} f^{(i+1)}(x) - \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) \\ &= \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) - \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc φ est constante et donc pour tout $x \in]a, b[$, $\varphi(x) = \varphi(t) = f(t)$.

Ainsi,

/2

pour tout $x, t \in]a, b[$, $f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(t-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \int_x^t \frac{(t-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u) du$

Puis en faisant le changement de variable $v = \frac{1}{t-x}(u-x)$, (si $t \neq x$) : $du = (t-x)dv$,
on a les correspondances : $u = x \Leftrightarrow v = 0$; $u = t \Leftrightarrow v = 1$ et $u = (t-x)v + x$,

/1

pour tout $x \neq t \in]a, b[$, $f(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(t-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \int_0^1 \frac{(t-x)^{n+1}(1-v)^n}{n!} f^{(n+1)}(x + (t-x)v) dv$

2. Soit f une fonction AM sur $]a, b[$ et

$$R_n(f, x) = f(x) - f(0) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. f est AM donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale en $x = 0$ et $t = x$:

$$R_n(f, x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \int_0^1 \frac{x^{n+1}(1-v)^n}{n!} f^{(n+1)}(xv) dv$$

Comme x^n est indépendant de v :

/1

$$\frac{R_n(f, x)}{x^n} = \int_0^1 \frac{x(1-v)^n}{n!} f^{(n+1)}(xv) dv$$

Si $0 \leq x < y < b$, comme f est AM, $f^{n+2} \geq 0$, donc f^{n+1} croissante

ainsi $\forall v \in [0, 1]$, $xv \leq yv$ et $f^{(n+1)}(xv) \leq f^{(n+1)}(yv)$,

puis comme $0 < x < y$, $xf^{(n+1)}(xv) \leq yf^{(n+1)}(yv)$

Enfin par croissance de l'intégrale (on a $1-v \geq 0$, $n! > 0$, $1 > 0$) :

/2

$$\frac{R_n(f, x)}{x^n} = \int_0^1 \frac{x(1-v)^n}{n!} f^{(n+1)}(xv) dv \leq \int_0^1 \frac{y(1-v)^n}{n!} f^{(n+1)}(yv) dv = \frac{R_n(f, y)}{y^n}$$

Donc $x \mapsto \frac{R_n(f, x)}{x^n}$ est croissante sur $]0, b[$

On a également, par croissance de f^{n+1} , positive $f^{(n+1)}(xv) \leq f^{(n+1)}(x)$ (car $v \leq 1$) :

$$\left| \frac{R_n(f, x)}{x^n} \right| = \left| \int_0^1 \frac{x(1-v)^n}{(n+1)!} f^{n+1}(xv) dv \right| \leq x f^{(n+1)}(x) \int_0^1 \frac{(1-v)^n}{(n+1)!} dv$$

Or la limite du terme de droite est nul pour $x \rightarrow 0$, $(f^{(n+1)}(x) \int_0^1 \frac{(1-v)^n}{(n+1)!} dv)$ est bornée donc par encadrement :

/2

$$x \mapsto \frac{R_n(f, x)}{x^n} \text{ possède une limite nulle quand } x \text{ tend vers } 0.$$

(b) On a $f(x) - S_n(x) = R_n(f, x) \geq \lim_{x \rightarrow 0^+} R_n(f, x) = 0$, par croissance de $x \mapsto R_n(f, x)$.

Donc pour tout $x \in]0, b[$, $f(x) \geq S_n(x)$.

En outre $S_{n+1}(x) - S_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} x^{n+1} \geq 0$, car $x \geq 0$ et f est AM.

Ainsi, la suite $(S_n(x))_n$ est croissante (en n), majorée par $f(x)$ (indépendant de n) donc convergente.

/1

Et par majoration, sa limite est inférieure à $f(x)$.

/0,5

Bilan : la suite $(S_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, de limite $g(x)$ vérifiant $g \leq f$ sur $[0, b[$.

(c) Soit $x \in]0, b[$. Soit $y = \frac{b+x}{2}$, donc $x < y < b$

Par croissance de $x \mapsto \frac{R_n(f, x)}{x^n}$, on a donc :

$$0 \leq \frac{R_n(f, x)}{x^n} \leq \frac{R_n(f, y)}{y^n}$$

en multipliant par x^n , et comme $R_n(f, y) \leq f(y)$ ($f(y) - R_n(f, y) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} y^k \geq 0$)

/2

$$0 \leq R_n(f, x) \leq \frac{x^n}{y^n} R_n(f, y) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y)$$

Ainsi

$$0 \leq f(x) - S_n(x) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y)$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y) = 0 \times f(y) = 0$ car $x < y$, donc par encadrement

/1

$\forall x \in]0, b[$, $f(x) - g(x) = 0$; vrai également en $x = 0$. Donc $g = f$ sur $[0, b[$

3. On note $F : x \mapsto f(x-a)$. Alors par composition affine, F est AM sur $]a-a, b-a[=]0, b-a[$
On rappelle que $a < 0$, donc $-a > 0$.

On peut appliquer ce que l'on vient de démontrer de f à F :

/0,5

$$\forall x \in [0, b-a[, \quad F(x) = G(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(0)}{k!} x^k \right)$$

Or par composition affine, avec $x \mapsto x+a$ de dérivée égale à 1,

$$F^{(k)}(u) = f^{(k)}(u+a) \quad \Rightarrow \quad F^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)$$

Donc en prenant $x = t-a$, dans l'expression précédente :

$$\forall x \in [0, b-a[, t = x+a \in]a, b[, f(t) = F(t-a) = F(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{F^{(k)}(0)}{k!} x^k \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right)$$

$$\text{Donc pour tout } x \in [a, b[, f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} \right)$$

/2

4. On sait que $f(x_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(x_0-a)^k}{k!} \right)$.

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $(x_0-a)^k > 0$, $k! > 0$ et $f^{(k)}(a) \geq 0$.

Donc nécessairement, la suite $\left(\sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(x_0-a)^k}{k!} \right)_n$ est croissante.

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall N > n, \sum_{k=0}^N f^{(k)}(a) \frac{(x_0-a)^k}{k!} \geq \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(x_0-a)^k}{k!}$$

En passant à la limite ($N \rightarrow +\infty$) : $0 = f(x_0) \geq \sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(x_0 - a)^k}{k!}$. /1

Or, à droite, il s'agit d'une somme finie, à termes positifs. Elle est nulle si et seulement si tous ces termes sont nuls.

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $f^{(k)}(a) = 0$ (les autres termes sont strictement positifs).

Ce résultat est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(a) = 0$. /1

Ainsi d'après l'expression trouvée à la question précédente :

$$\forall x \in [a, b[, f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=0}^n 0 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 \quad /1$$

Donc si f s'annule en $x_0 \in]a, b[$, alors f est nulle.

Si f est AM alors $f^{(p)}$ est également AM.

On peut appliquer à $f^{(p)}$ ce que l'on vient de démontrer, donc $f^{(p)} = 0$ sur $]a, b[$.

Et par conséquent, en intégrant p fois, f est un polynôme de degré $p-1$. /1

On peut alors écrire $f(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k (x-a)^k$.

On a alors $f^{(k)}(a) = k!a_k$, il faut nécessairement que $k!a_k \geq 0$, donc $a_k \geq 0$. /1

Et réciproquement, si $\forall k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$, $a_k \geq 0$,

$$\text{alors } f^{(h)}(x) = \sum_{k=h}^{p-1} \frac{k!}{(k-h)!} a_k (x-a)^{k-h} \geq 0.$$

Donc f est AM sur $]a, b[$. /1

Ainsi l'ensemble des fonctions f AM sur $]a, b[$ telles que, pour un $p \in \mathbb{N}$ fixé, $f^{(p)}$ possède un zéro dans $]a, b[$ est

$$\left\{ x \mapsto \sum_{k=0}^{p-1} a_k (x-a)^k \mid \forall k \leq p-1, a_k \geq 0 \right\}$$

C. Différences finies

1. Si φ est définie sur $]A, B[$, alors $\Delta_h \varphi$ est définie sur $]A, B-h[$.

En effet il faut pouvoir calculer $\varphi(x)$ et $\varphi(x+h)$, donc $A < x < x+h < B$.

Par récurrence, sur n , $\mathcal{D}_{\Delta_h^n(f)} =]a, b-nh[$.

— Ce résultat est vrai, pour $n=0$ (et $n=1$).

— Si il est vrai pour $n \in \mathbb{N}$, en notant $\varphi = \Delta_h^n(f)$ et en appliquant la remarque,

on a $A_{n+1} = A_n = a$ et $B_{n+1} = B_n - h = b - nh - h = b - (n+1)h$.

La récurrence est démontrée : /1,5

l'ensemble de définition de $\Delta_h^n(f)$ est $\mathcal{D}_{\Delta_h^n(f)} =]a, b-nh[$ (si $nh < b$)

2. On démontre le résultat par récurrence.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{P}_n : \ll \forall x \in]a, b-nh[, \Delta_h^n(f)(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh) \gg$$

$$\text{— } \Delta_h^0(f)(x) = f(x) \text{ et } \sum_{k=0}^0 (-1)^{0-k} \binom{0}{k} f(x+kh) = 1f(x).$$

Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Soit $x \in]a, b-(n+1)h[$, alors $x \in]a, b-nh[$ et $x+h \in]a, b-nh[$, on peut appliquer

$\mathcal{P}_n$:

$$\Delta_h^n(f)(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh) \quad \Delta_h^n(f)(x+h) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+h+kh)$$

Et comme $\Delta_h^{n+1}(f)(x) = (\Delta \circ \Delta_h^n)(f)(x) = \Delta_h^n(f)(x+h) - \Delta_h^n(f)(x)$, on a donc

$$\begin{aligned}
\Delta_h^{n+1}(f)(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x + (k+1)h) - \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x + kh) \\
&= \underbrace{(-1)^0 \binom{n}{n} f(x + (n+1)h)}_{k=n} + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x + (k+1)h) \\
&\quad - \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x + kh) - \underbrace{(-1)^n \binom{n}{0} f(x)}_{k=0} \\
&= f(x + (n+1)h) + \underbrace{\sum_{i=1}^n (-1)^{n-i+1} \binom{n}{i-1} f(x + ih)}_{i=k+1} \\
&\quad - \underbrace{\sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f(x + ih)}_{i=k} - (-1)^n f(x) \\
&= f(x + (n+1)h) + \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i+1} \left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right) f(x + ih) - (-1)^n f(x) \\
&= (-1)^{(n+1)-(n+1)} \binom{n+1}{n+1} f(x + (n+1)h) + \sum_{i=1}^n (-1)^{n+1-i} \binom{n+1}{i} f(x + ih) \\
&\quad + (-1)^{n+1-0} \binom{n+1}{0} f(x) \\
&= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^{n+1-i} \binom{n+1}{i} f(x + ih)
\end{aligned}$$

On a donc démontré, par récurrence :

/2,5

pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in]a, b - nh[$, $\Delta_h^n(f)(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x + kh)$

3. Selon l'indication, on pose $X(h) = \Delta_h^{n+1}f(x)$.

D'après l'expression précédente :

$$X(h) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} f(x + kh)$$

Il s'agit d'une somme de fonctions dérivables, donc dérivable et ainsi

/1

$$X'(h) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} k \binom{n+1}{k} f'(x + kh) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} k \binom{n+1}{k} f'(x + kh)$$

Par ailleurs,

$$k \binom{n+1}{k} = \frac{k(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1) \times n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} = (n+1) \binom{n}{k-1} \quad /0,5$$

Donc, en posant $i = k - 1$:

$$X'(h) = (n+1) \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} k \binom{n}{k-1} f'(x + kh) = (n+1) \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} f'(x + h + ih)$$

$$X'(h) = (n+1) \times \Delta_h^n(f')(x+h)$$

Montrons alors le résultat par récurrence. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

/1,5

$$\mathcal{Q}_n : \ll \forall f \text{ AM sur }]a, b[, \forall h \in \mathbb{R}_+^* \Delta_h^n(f) \geq 0. \gg$$

— Soit f , AM sur $]a, b[$, alors $\Delta_h^0(f) = f \geq 0$. Donc $\mathcal{Q}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{Q}_n$ est vraie.

Soit f un fonction AM sur $]a, b[$.

Alors f' est également AM sur $]a, b[$, donc $\Delta_h^n(f') \geq 0$.

On considère x , bien adapté,

Donc $X'(h) \geq 0$ (produit de termes positifs).

Ainsi X est croissante et donc $\forall h \in \mathbb{R}_+^*$, $X(h) \geq X(0) = \Delta_0^{n+1}(f) = 0$

($\Delta_0(f) = 0$, donc si $m \geq 0$, $\Delta_h^m(f) = 0$).

Ainsi $X(h) = \Delta_h^{n+1}(f)(x) \geq 0$, et ainsi $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie.

/2

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_h^n(f) \geq 0$.

4. On considère les fonctions f totalement monotones (en abrégé) TM c'est-à-dire définies sur $]a, b[$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall h \in \left]0, \frac{b-a}{n}\right[, \forall x \in [a, b - nh[, \Delta_h^n(f)(x) \geq 0$$

- (a) Soit f une fonction TM sur $]a, b[$.

Alors en prenant $n = 0$, $\Delta_h^0(f)(x) = f(x) \geq 0$. Donc f est positive.

Soit $x, y \in]a, b[$ tel que $x < y$.

Soit $h = y - x < b - a$ et $n = 1$, on a

$$\Delta_h^1(f)(x) = f(x+h) - f(x) = f(y) - f(x) \geq 0$$

Donc $f(y) \geq f(x)$, par conséquent : f est croissante.

On a montré que toute fonction TM est positive et croissante.

/1

- (b) ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On développe ψ par la formule du binôme de Newton

(le calcul de la dérivée d'une somme est plus facile à gérer)

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{kt} (-1)^{n-k} \Rightarrow \forall h \in \mathbb{N}, \psi^{(h)}(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^h e^{kt}$$

$$\text{On a donc } \forall h \in \mathbb{N}, \psi^{(h)}(0) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^h = h! P_h.$$

/1

La fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 (en fait, sur $\mathbb{R}$), donc ψ admet un développement limité en 0 :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \psi(t) = \sum_{h=0}^m \frac{\psi^{(h)}(0)}{h!} t^h + o(t^m) = \sum_{h=0}^m P_h t^h + o(t^m)$$

Or on sait que, au voisinage de 0 :

$$\psi(t) = (e^t - 1)^n = (t + o(t))^n = t^n (1 + o(1))^n = t^n + o(t^n)$$

Enfin, affirmons que le développement limité d'une fonction est unique, on a donc en identifiant les deux DL(ψ)(0) pour $m = n$:

/3

$$\forall j < n, P_j = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{k^j}{j!} = 0 \text{ et } P_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{k^n}{n!} = 1$$

- (c) Soit f une fonction TM.

On va intervertir les deux sommations, comme lors du premier DS (fin du premier exercice)

f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, elle admet donc un développement limité d'ordre n au voisinage de $x \in]a, b[$

/1

$$f(x+u) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} u^j + \frac{u^n}{n!} f^{(n)}(x) + u^n \epsilon(u) \quad \text{avec } \epsilon(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$$

On a alors ($u = kh$) :

$$\begin{aligned}
\Delta_h^n(f)(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x + kh) \\
&= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} (kh)^j + \frac{(kh)^n}{n!} f^{(n)}(x) + (kh)^n \epsilon(kh) \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} h^j f^{(j)}(x) \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{k^j}{j!} \right) + h^n f^{(n)}(x) \left(\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{k^n}{n!} \right) + h^n E(h) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} h^j f^{(j)}(x) P_j + h^n f^{(n)}(x) P_n + h^n E(h) \\
&= h^n (f^{(n)}(x) + E(h))
\end{aligned}$$

d'après la question précédente : $P_n = 1$ et $P_j = 0$ si $j < n$.

On a noté $E(h) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n \epsilon(hk) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ (somme finie, donc bornée...).

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]a, b[, f^{(n)}(x) = \frac{\Delta_h^n(f)(x)}{h^n} - E(h) \text{ au voisinage de } h = 0$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in]a, b[, f^{(n)}(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta_h^n(f)(x)}{h^n} \geq 0 \quad /2$$

car f est une fonction TM. Donc f est bien absolument monotone.

Toute fonction totalement monotone (TM) est absolument monotone (AM) sur $]a, b[$