Devoir surveillé n°1

Sujet donné le mercredi 20 septembre 2023, 2h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Exercice - Application de la transformation d'Abel

On considère $\theta \in]0, 2\pi[$.

On souhaite montrer la convergence de (S_n), où $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos n\theta}{n}$.

On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $V_n = \sin\left((n - \frac{1}{2})\theta\right)$ et $U_n = 1/n$.

On considère également pour tous entiers $m > n \geqslant 1$, $s_{n,m} = \displaystyle\sum_{k=n}^{m} \frac{\cos n\theta}{n}$.

.1. Simplifier $V_{n+1} - V_n$.

.2. En déduire que pour tout $m > n \geqslant 1$,

$$s_{n,m} = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} \sum_{k=n}^{m} U_k \times (V_{k+1} - V_k)$$

.3. Montrer que pour tout $m > n \geqslant 1$,

$$s_{n,m} = \frac{1}{2\sin\theta/2} \times \left[U_m V_{m+1} - U_n V_n + \sum_{k=n+1}^{m} (U_{k-1} - U_k) V_k\right]$$

.4. On rappelle l'inégalité triangulaire :

$$\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \qquad |x + y| \leqslant |x| + |y|$$

Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R}$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

.5. Montrer alors que

$$|s_{n,m}| \leqslant \frac{1}{n|\sin\frac{\theta}{2}|}$$

.6. En déduire, que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, m > n > N \geqslant n$, $|s_{n,m}| \leqslant \epsilon$.
Cette propriété permet d'affirmer que (S_n) converge.

Problème -

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Notons, pour tout d entier naturel tel que $0 \leqslant d \leqslant n$,

$$f_n(d) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(\dfrac{dk\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)} \qquad \text{et, pour } d \text{ tel que } 1 \leqslant d \leqslant n, \qquad g_n(d) = f_n(d) - f_n(d-1)$$

.1. Calculer explicitement $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^k$ en fonction de l'entier $p \in \mathbb{N}^*$ et préciser sa valeur selon la parité de p.

.2. (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2\sin x \sum_{k=1}^{n-1} \cos(kx) = \sum_{k=1}^{n-1} (\sin((k+1)x) - \sin((k-1)x))$$

On pourra développer le terme général de la somme du second membre.

(b) En appliquant la relation ci-dessus pour une valeur de x que l'on précisera, montrer que

$$\forall j \in [\![1, n-1]\!] \ , \ \sum_{k=1}^{n-1} \cos\frac{2jk\pi}{n} = -1$$

.3. (a) Calculer $f_n(0)$ puis $g_n(1)$.

(b) Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$ fixé. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin^2((j+1)x) - 2\sin^2(jx) + \sin^2((j-1)x) = 2\sin^2(x) \times \cos(2jx)$$

(c) En déduire que, pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$,

$$g_n(j+1) - g_n(j) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left((j+1)\frac{k\pi}{n}\right) - 2\sin^2\left(j\frac{k\pi}{n}\right) + \sin^2\left((j-1)\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

puis en déduire que $g_n(j+1) - g_n(j)$ est une constante indépendante de n et j que l'on précisera.

(d) Conclure que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$g_n(k) = n + 1 - 2k$$

.4. Soit $d \in [\![0, n]\!]$ fixé.

(a) Montrer que,

$$f_n(d) = f_n(0) + \sum_{k=1}^{d} g_n(k)$$

(b) Conclure que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(\dfrac{dk\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)} = d(n-d)$$

Correction

Exercice - Application de la transformation d'Abel

On considère $\theta \in]0, 2\pi[$.

On souhaite montrer la convergence de (S_n), où $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos n\theta}{n}$.

On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $V_n = \sin\left((n - \frac{1}{2})\theta\right)$ et $U_n = 1/n$.

On considère également pour tous entiers $m > n \geqslant 1$, $s_{n,m} = \sum_{k=n}^{m} \frac{\cos n\theta}{n}$.

.1. Simplifier $V_{n+1} - V_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$V_{n+1} - V_n = \sin((n + \frac{1}{2})\theta) - \sin((n - \frac{1}{2})\theta) = \sin n\theta \cos\frac{\theta}{2} + \cos n\theta \sin\frac{\theta}{2} - \sin n\theta \cos\frac{\theta}{2} + \cos n\theta \sin\frac{\theta}{2}$$

$$\boxed{V_{n+1} - V_n = 2\cos(n\theta) \times \sin\frac{\theta}{2}}$$

.2. En déduire que pour tout $m > n \geqslant 1$,

$$s_{n,m} = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} \sum_{k=n}^{m} U_k \times (V_{k+1} - V_k)$$

Notons d'abord que $\theta \in]0, 2\pi[$, donc $\frac{\theta}{2} \in]0, \pi[$ et donc $\sin\frac{\theta}{2} > 0$.

Soit $m > n \geqslant 1$. Pour tout $k \in [\![n, m]\!]$, $\frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} U_k \times (V_{k+1} - V_k) = \frac{1}{k}\left(\cos(k\theta)\right)$ (formule précédente).

Donc en sommant, on a bien

$$\boxed{s_{n,m} = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} \sum_{k=n}^{m} U_k(V_{k+1} - V_k)}$$

.3. Montrer que pour tout $m > n \geqslant 1$,

$$s_{n,m} = \frac{1}{2\sin\theta/2} \times \left[U_m V_{m+1} - U_n V_n + \sum_{k=n+1}^{m} (U_{k-1} - U_k) V_k\right]$$

Soient $m > n \geqslant 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{m} U_k(V_{k+1} - V_k) &= \sum_{k=n}^{m} U_k V_{k+1} - \sum_{k=n}^{m} U_k V_k = \underbrace{\sum_{i=n+1}^{m+1} U_{i-1} V_i}_{i=k+1 \Leftrightarrow k-i-1} - \underbrace{\sum_{i=n}^{m} U_i V_i}_{i=k} \\
&= \sum_{i=n+1}^{m} U_{i-1} V_i + U_m V_{m+1} - \sum_{i=n+1}^{m} U_i V_i - U_n V_n \\
&= U_m V_{m+1} - U_n V_n + \sum_{i=n+1}^{m} (U_{i-1} - U_i) V_i
\end{aligned}$$

Donc en divisant par $2\sin\frac{\pi}{2}$:

$$\boxed{s_{n,m} = \frac{1}{2\sin\theta/2} \times \left[U_m V_{m+1} - U_n V_n + \sum_{k=n+1}^{m} (U_{k-1} - U_k) V_k\right]}$$

.4. On rappelle l'inégalité triangulaire :

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}, \qquad |x+y| \leqslant |x| + |y|$$

Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R}$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$: « $\forall\ x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R}$, $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ ».

— $\forall\ x_1 \in \mathbb{R}$, $|x_1| \leqslant |x_1$, donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
Soient $x_1, x_2, \dots x_n, x_{n+1} \in \mathbb{R}$, $n+1$ nombres réels. On applique une fois l'inégalité triangulaire

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right| = \left|\underbrace{\sum_{k=1}^{n} x_k}_{x} + \underbrace{x_{n+1}}_{y}\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| + |x_{n+1}|$$

Puis, on applique $\mathcal{P}_n$, pour le premier des termes de droite. Par transitivité :

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k| + |x_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |x_k|$$

Par conséquent, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
On a démontré : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

$$\boxed{\forall\ x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R}, \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|}$$

.5. Montrer alors que

$$|s_{n,m}| \leqslant \frac{1}{n|\sin\frac{\theta}{2}|}$$

Par inégalité triangulaire (appliqué à $m-(n+1)+1+2 = m-n+2$ termes) :

$$|s_{n,m}| \leqslant \frac{1}{2|\sin\frac{\theta}{2}|}\left(|U_m V_{m+1}| + |U_n V_n| + \sum_{k=n+1}^{m} |U_{k-1} - U_k| \times |V_k|\right)$$

$$|s_{n,m}| \leqslant \frac{1}{2|\sin\frac{\theta}{2}|}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \sum_{k=n+1}^{m} |U_{k-1} - U_k|\right)$$

car pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $|V_i| \leqslant 1$ (donc pour i de n à $m+1$).

Puis comme $\dfrac{1}{k-1} = U_{k-1} > U_k = \dfrac{1}{k}$, alors $U_{k-1} - U_k > 0$ et donc $|U_{k-1} - U_k| = U_{k-1} - U_k$, donc

$$|s_{n,m}| \leqslant \frac{1}{2|\sin\frac{\theta}{2}|}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \sum_{k=n+1}^{m} U_{k-1} - U_k\right) = \frac{1}{2|\sin\frac{\theta}{2}|}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right)$$

par télescopage. Ainsi

$$\boxed{|s_{n,m}| \leqslant \frac{1}{n|\sin\frac{\theta}{2}|}}$$

.6. En déduire, que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ m > n > N \geqslant n$, $|s_{n,m}| \leqslant \epsilon$.
Cette propriété permet d'affirmer que (S_n) *converge.*

La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)$ converge vers 0 en décroissant, donc par produit, il en est de même de $\left(\dfrac{1}{n|\sin\frac{\theta}{2}|}\right)$.
Fixons ϵ. Donc, si n est suffisamment grand,

$$0 \leqslant \frac{1}{n|\sin\frac{\theta}{2}|} \leqslant \frac{1}{N|\sin\frac{\theta}{2}|} < \epsilon$$

$$\boxed{\text{Et donc, il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\ m > n > N \geqslant n,\ |s_{n,m}| \leqslant \epsilon \text{ et } (S_n) \text{ est convergente.}}$$

Problème

Soit n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$.
Notons, pour tout d entier naturel tel que $0 \leqslant d \leqslant n$,

$$f_n(d) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(\dfrac{dk\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)} \qquad \text{et, pour } d \text{ tel que } 1 \leqslant d \leqslant n, \qquad g_n(d) = f_n(d) - f_n(d-1)$$

.1. Calculer explicitement $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^k$ en fonction de l'entier $p \in \mathbb{N}^*$ et préciser sa valeur selon la parité de p.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé.
$\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^k$ est la somme des p premiers termes de la suite géométrique de raison -1 (différente de 1) et de premier terme -1 donc

$$\sum_{k=1}^{p}(-1)^k = (-1) \times \frac{1-(-1)^p}{1-(-1)} = -\frac{1}{2}(1-(-1)^p) = \frac{(-1)^p - 1}{2}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } p \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{p}(-1)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } p \equiv 0\ [2], \\ -1 & \text{si } p \equiv 1\ [2]. \end{cases}}$$

.2. (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$2\sin x \sum_{k=1}^{n-1} \cos(kx) = \sum_{k=1}^{n-1} (\sin((k+1)x) - \sin((k-1)x))$$

On pourra développer le terme général de la somme du second membre.

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1}(\sin((k+1)x) - \sin((k-1)x)) &= \sum_{k=1}^{n-1}\Big[\sin(kx)\cos(x) + \cos(kx)\sin(x) - \Big(\sin(kx)\cos(x) - \cos(kx)\sin(x)\Big)\Big] \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} 2\cos(kx)\sin(x) \\
&= 2\sin x \sum_{k=1}^{n-1}\cos(kx)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R},\ 2\sin x \sum_{k=1}^{n-1}\cos(kx) = \sum_{k=1}^{n-1}(\sin((k+1)x) - \sin((k-1)x)).}$$

(b) En appliquant la relation ci-dessus pour une valeur de x que l'on précisera, montrer que

$$\forall j \in [\![1, n-1]\!] \ , \ \sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{2jk\pi}{n} = -1$$

Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$ fixé.

Appliquons la relation établie dans la question précédente pour $x \leftarrow \dfrac{2j\pi}{n}$:

$$\begin{aligned}
2\sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{2jk\pi}{n}\right)) &= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\sin\left((k+1)\frac{2j\pi}{n}\right) - \sin\left((k-1)\frac{2j\pi}{n}\right)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\sin\left((k+1)\frac{2j\pi}{n}\right) - \sum_{k=1}^{n-1}\sin\left((k-1)\frac{2j\pi}{n}\right) \\
&= \sum_{i=2}^{n}\sin\left(i\frac{2j\pi}{n}\right) - \sum_{i=0}^{n-2}\sin\left(i\frac{2j\pi}{n}\right) \\
&\ \text{en posant } i = k+1 \text{ dans la première somme et } i = k-1 \text{ dans la seconde} \\
&= \sin\left(n\frac{2j\pi}{n}\right) + \sin\left((n-1)\frac{2j\pi}{n}\right) - \sin\left(1\times\frac{2j\pi}{n}\right) - \sin\left(0\times\frac{2j\pi}{n}\right) \\
&= \underbrace{\sin(2j\pi)}_{=0} + \underbrace{\sin\left(2j\pi - \frac{2j\pi}{n}\right)}_{= -\sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right)} - \sin\left(1\times\frac{2j\pi}{n}\right) - \underbrace{\sin\left(0\times\frac{2j\pi}{n}\right)}_{=0} \\
&= -2\sin\left(\frac{2j\pi}{n}\right)
\end{aligned}$$

Observons que $0 < j < n$ donc $\dfrac{2j\pi}{n} \in]0, 2\pi[$,
or sur $]0, 2\pi[$, la fonction sinus ne s'annule que pour la valeur π :

- ⋆ si $\dfrac{2j\pi}{n} \neq \pi$, alors $\sin\left(\dfrac{2j\pi}{n}\right) \neq 0$ si bien que le calcul ci-dessus donne, après multiplication par $\left[2\sin\left(\dfrac{2j\pi}{n}\right)\right]^{-1}$,

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{2jk\pi}{n}\right) = -1$$

- ⋆ sinon, $\dfrac{2j\pi}{n} = \pi$ donc $2j = n$ ce qui montre que n est pair, et de plus, $j = \dfrac{n}{2}$ dans ce cas d'où

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{2jk\pi}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\cos\left(\frac{2nk\pi}{2n}\right) = \sum_{k=1}^{n-1}\cos(k\pi)) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k = -1}_{\text{car } n \equiv 0\ [2] \text{ donc } n-1 \equiv 1\ [2] \text{ (quest. .1)}}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall j \in [\![1, n-1]\!] \ , \ \sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{2jk\pi}{n} = -1.}$$

.3. (a) Calculer $f_n(0)$ puis $g_n(1)$.

- ⋆ $f_n(0) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\overbrace{\sin^2\left(0\times\frac{k\pi}{n}\right)}^{=0}}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = 0$ donc $\boxed{f_n(0) = 0.}$

$\star$ $f_n(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\frac{\sin^2\left(1 \times \frac{k\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}}_{=1} = \sum_{k=1}^{n-1} 1 = n-1$ donc $f_n(1) = n-1$ si bien que $\boxed{g_n(1) = f_n(1) - f_n(0) = n-1.}$

(b) Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$ fixé. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin^2((j+1)x) - 2\sin^2(jx) + \sin^2((j-1)x) = 2\sin^2(x) \times \cos(2jx)$$

$$\begin{aligned}
\sin^2((j+1)x) - \sin^2(jx) &= (\sin((j+1)x) - \sin(jx)) \times (\sin((j+1)x) + \sin(jx)) \\
&= 2\cos\frac{(j+1)x+jx}{2}\sin\frac{(j+1)x-jx}{2} \times 2\sin\frac{(j+1)x+jx}{2}\cos\frac{(j+1)x-jx}{2} \\
&\quad \text{en utilisant } \sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \text{ et } \sin p + \sin q = 2\cos\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2} \\
&= 4\cos\left(jx + \frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(jx + \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= 2\cos\left(jx + \frac{x}{2}\right)\sin\left(jx + \frac{x}{2}\right) \times 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\
&= \sin(2jx + x)\sin(x) \qquad \text{en utilisant la formule } \sin(2a) = 2\sin a\cos a. \qquad (1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin^2((j-1)x) - \sin^2(jx) &= (\sin((j-1)x) - \sin(jx)) \times (\sin((j-1)x) + \sin(jx)) \\
&= 2\cos\frac{(j-1)x+jx}{2}\sin\frac{(j-1)x-jx}{2} \times 2\sin\frac{(j-1)x+jx}{2}\cos\frac{(j-1)x-jx}{2} \\
&\quad \text{en utilisant } \sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \text{ et } \sin p + \sin q = 2\cos\frac{p-q}{2}\sin\frac{p+q}{2} \\
&= 4\cos\left(jx - \frac{x}{2}\right)\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\sin\left(jx - \frac{x}{2}\right)\cos\left(-\frac{x}{2}\right) \\
&= 2\cos\left(jx - \frac{x}{2}\right)\sin\left(jx - \frac{x}{2}\right) \times 2\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\cos\left(-\frac{x}{2}\right) \\
&= \sin(2jx - x)\sin(-x) \qquad \text{en utilisant la formule } \sin(2a) = 2\sin a\cos a. \qquad (2)
\end{aligned}$$

En sommant les égalités (1) et (2),

$$\begin{aligned}
\sin^2((j+1)x) - 2\sin^2(jx) + \sin^2((j-1)x) &= \sin(2jx+x)\sin(x) + \sin(2jx-x)\sin(-x) \\
&= \sin(x)(\sin(2jx+x) - \sin(2jx-x)) \\
&= \sin(x) \times 2\cos\frac{(2jx+x)+(2jx-x)}{2}\sin\frac{(2jx+x)-(2jx-x)}{2} \\
&= \sin(x) \times 2\cos(2jx)\sin(x) \\
&= 2\sin^2(x)\cos(2jx)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathbb{R},\ \sin^2((j+1)x) - 2\sin^2(jx) + \sin^2((j-1)x) = 2\sin^2(x) \times \cos(2jx).}$$

(c) En déduire que, pour tout $j \in [\![1, n-1]\!]$,

$$g_n(j+1) - g_n(j) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left((j+1)\frac{k\pi}{n}\right) - 2\sin^2\left(j\frac{k\pi}{n}\right) + \sin^2\left((j-1)\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

puis en déduire que $g_n(j+1) - g_n(j)$ est une constante indépendante de n et j que l'on précisera.

- Soit $j \in [\![1, n-1]\!]$ fixé. Par définition,

$$\begin{aligned}
g_n(j+1) - g_n(j) &= f_n(j+1) - f_n(j) - (f_n(j) - f_n(j-1)) \\
&= f_n(j+1) - 2(f_n(j) + f_n(j-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(\frac{(j+1)k\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} - 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(\frac{jk\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(\frac{(j-1)k\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(\frac{(j+1)k\pi}{n}\right) - 2\sin^2\left(\frac{jk\pi}{n}\right) + \sin^2\left(\frac{(j-1)k\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \qquad (3)
\end{aligned}$$

- Appliquons, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, l'identité établie dans la question précédente pour $x \leftarrow \frac{k\pi}{n}$:

$$\sin^2\left((j+1)\frac{k\pi}{n}\right) - 2\sin^2\left(j\frac{k\pi}{n}\right) + \sin^2\left((j-1)\frac{k\pi}{n}\right) = 2\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) \times \cos\left(2j\frac{k\pi}{n}\right)$$

si bien qu'en injectant ces égalités dans la relation (3),

$$\begin{aligned}
g_n(j+1) - g_n(j) &= 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right) \times \cos\left(2j\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)} \\
&= 2\sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(2j\frac{k\pi}{n}\right) \\
&= -2 \qquad \text{car } \sum_{k=1}^{n-1} \cos\left(2j\frac{k\pi}{n}\right) = -1 \text{ d'après la question (.2(b)).}
\end{aligned}$$

(d) Conclure que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$g_n(k) = n + 1 - 2k$$

Soit $k \in [\![1, n]\!]$ fixé.

- Si $k = 1$, d'après la question .3(a), $g_n(1) = f_n(1) - f_n(0) = n - 1 = n + 1 - 2 \times 1$ ce qui valide la formule attendue dans le cas $k = 1$.
- Sinon, $k \geqslant 2$. D'après la question précédente, $\forall j \in [\![1, n-1]\!]$, $g_n(j+1) - g_n(j) = -2$ donc en sommant ces égalités pour $j = 1, \ldots, k-1$,

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{k-1}(g_n(j+1) - g_n(j))}_{\substack{= g_n(k) - g_n(1) \\ \text{après télescopage}}} = -\sum_{j=1}^{k-1} 2 = -2(k-1)$$

donc $g_n(k) = g_n(1) - 2(k-1) = n - 1 - 2(k-1) = n + 1 - 2k$.

$$\boxed{\text{Ainsi, } \forall k \in [\![1, n]\!],\ g_n(k) = n + 1 - 2k.}$$

.4. Soit $d \in [\![0, n]\!]$ fixé.

(a) Montrer que,

$$f_n(d) = f_n(0) + \sum_{k=1}^{d} g_n(k)$$

Calculons :

$$f_n(0)+\sum_{k=1}^{d} g_n(k) = f_n(0)+\sum_{k=1}^{d}(f_n(k)-f_n(k-1)) = f_n(0)+\sum_{k=1}^{d} f_n(k)-\underbrace{\sum_{k=1}^{d} f_n(k-1)}_{=\sum_{i=0}^{d-1} f_n(i)} = \underbrace{f_n(0)+f_n(d)-f_n(0)}_{\text{après télescopage}} = f_n(d)$$

$$\boxed{\text{donc } \forall d \in [\![0,n]\!],\ f_n(d) = f_n(0) + \sum_{k=1}^{d} g_n(k).}$$

(b) Conclure que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(\dfrac{dk\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)} = d(n-d)$$

D'après la question précédente,

$$f_n(d) = f_n(0) + \sum_{k=1}^{d} g_n(k) = 0 + \sum_{k=1}^{d}(n+1-2k) = \underbrace{\sum_{k=1}^{d}(n+1)}_{=(n+1)d} - 2\underbrace{\sum_{k=1}^{d} k}_{=\frac{d(d+1)}{2}} = (n+1)d - d(d+1) = nd - d^2$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sin^2\left(\dfrac{dk\pi}{n}\right)}{\sin^2\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)} = d(n-d).}$$