Devoir surveillé n°2

Sujet donné le samedi 30 septembre 2023, 3h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Exercice 1 - Raisonnements variés ≈ 7 points sur 30

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

.1. On se donne un nombre réel $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(a) Résoudre l'équation en z :

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^4 = 1$$

(b) Plus généralement, pour $\alpha \neq 0$, résoudre l'équation en z :

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^4 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$$

.2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.
On pourra exploiter une récurrence forte.

Problème - Racines quadatiques et géométrie ≈ 12 points sur 30

On se donne deux nombres complexes p et q, affixes des points P et Q du plan complexe, on étudie les racines (=zéros) z_1 et z_2 du trinôme $x^2 - 2px + q$. On note M_1 et M_2 les deux points d'affixe z_1 et z_2 respectivement.
On cherchera durant tout le problème des conditions nécessaires suffisantes en lien avec le nombre $\frac{q}{p^2}$ (complexe, a priori). On supposera pour tout le problème que $p \neq 0$. On note O, le point d'affixe 0, centre du repère.

.1. Calculer les racines du polynôme pour $p = \frac{1}{2}(1+i)$ et $q = -4i$

.2. Relation entre coefficients et racines pour $x^2 - 2px + q$.

(a) Calculer Δ, on donnera le résultat factorisé par $\left(1 - \frac{q}{p^2}\right)$.

(b) Exprimer les relations de Viète pour le polynôme $x^2 - 2px + q = 0$.

(c) A quelle condition nécessaire et suffisante, a-t-on $z_1 = z_2$?
On donnera une condition qui repose sur le nombre $\frac{q}{p^2}$.

.3. Vision géométrique sur les racines de $x^2 - 2px + q$.

(a) Quel est le milieu de $[M_1M_2]$?

(b) Montrer que pour que les points O, M_1 et M_2 soient alignés, il faut et il suffit que $\frac{q}{p^2}$ soit un nombre réel inférieur ou égal à 1.
On montrera que la condition est vérifiée pour l'équation de la question 1.

(c) A quelle condition nécessaire et suffisante, les deux zéros du trinôme étudié ont-ils le même argument principal ?

(d) Montrer que, pour que les zéros aient le même module, il faut et il suffit que $\frac{q}{p^2}$ soit un nombre réel supérieur ou égal à 1.

(e) A quelle condition le triangle OM_1M_2 est-il rectangle et isocèle en O ?
A quelle condition ce triangle est-il équilatéral ?

PROBLÈME 2 - LEMME DES PICS $\approx$ 11 POINTS SUR 30

On note indifféremment : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, v ou (v_n), selon le contexte une même suite.
Notons, en revanche que v_n ne désigne pas la suite, mais la valeur prise par cette suite en n, précisément.

On rappelle quelques résultats de terminale :

- la suite (v_n) est croissante, si $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \geqslant v_n$.
- la suite (v_n) est décroissante, si $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leqslant v_n$.
- la suite (v_n) est majorée, si il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant A$.
- la suite (v_n) est minorée, si il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant B$.
- la suite (v_n) est bornée, si (v_n) est majorée et minorée.

On rappelle que toute suite de réels, croissante et majorée, est convergente dans $\mathbb{R}$.
On rappelle que toute suite de réels, décroissante et minorée, est convergente dans $\mathbb{R}$.
On admet également que toute partie F de $\mathbb{N}$, non vide, admet un plus petit élément, c'est-à-dire
$\exists\ m \in F$ tel que $\forall\ x \in F$, $m \leqslant x$.

On considère dans tout le problème une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée.
On note $E(u) = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall\ p \geqslant n, u_p \geqslant u_n\}$. C'est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$

.1. Exemple d'ensemble E, selon des cas particuliers de suite u.

(a) Que vaut $E((n)_{n\in\mathbb{N}})$, si la suite $(u_n) = (n)$?

(b) Que vaut $E\left(\left(\frac{1}{n}\right)\right)$, si la suite $(u_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$?

(c) Que vaut $E\left(((-1)^n)\right)$, si la suite $(u_n) = ((-1)^n)$?

(d) Que vaut $E\left(\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)\right)$, si la suite $(u_n) = \left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$?

.2. Que signifie, formellement, $n \notin E(u)$?

.3. On suppose que $E(u)$, ensemble infini et dénombrable s'écrit $\{n_1, n_2, \dots n_k, \dots\}$
avec la convention que $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $n_k \leqslant n_{k+1}$.
On définie la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k = u_{n_k}$.

(a) Montrer que la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

(b) En déduire que la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

.4. On suppose que $E(u)$ n'est pas infini (donc est fini).

(a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \geqslant N$, $\exists\ p \geqslant n$ tel que $u_p < u_n$.

(b) Montrer que pour tout $n \geqslant N$, $F_n := \{p \in \mathbb{N} \cap]n, +\infty[\ \mid u_p < u_n\}$ admet un plus petit élément noté $\varphi(n)$.

(c) On note $n_0 = N$ et par récurrence pour $k \in \mathbb{N}^*$, $n_k = \varphi(n_{k-1})$.
Montrer que $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers et que $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} := (u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

(d) En déduire que la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} = (u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

.5. Qu'avez-vous démontré ?

Correction

Exercice 1 - Raisonnements variés

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

.1. On se donne un nombre réel $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(a) Résoudre l'équation en z :

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^4 = 1$$

Les racines quatrièmes de 1 sont $1, -1, i$ et $-i$. L'équation devient donc $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^4 = 1$, équivalente à $\frac{1+iz}{1-iz} \in \{1, i, -1, -i\}$.

Or $\frac{1+iz}{1-iz} = 1 \iff iz = -iz \iff z = 0$.
Or $\frac{1+iz}{1-iz} = i \iff 1 + iz = i + z \iff z = \frac{1-i}{1-i} = 1$.
Or $\frac{1+iz}{1-iz} = -1 \iff 1 = -1 \iff \mathcal{S} = \emptyset$.
Or $\frac{1+iz}{1-iz} = -i \iff 1 + iz = -i - z \iff z = \frac{-1-i}{1+i} = -1$.

On a les solutions :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{0, 1, -1\}}$$

Bien qu'on peut croire que l'équation est de degré 4 en z, donc admettant 4 racines, il y a ici une simplification : /1,5

$$(E) \Leftrightarrow (1+iz)^4 - (1-iz)^4 = 0 \Leftrightarrow 8iz - 8iz^3 = 8iz(1-z^2) = -8iz(z-1)(z+1)$$

(b) Plus généralement, pour $\alpha \neq 0$, résoudre l'équation en z :

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^4 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$$

Notons que nécessairement, si z est solution de l'équation, $iz \neq 1$, donc $z \neq \frac{1}{i} = -i$.

Posons $Z = \frac{1+iz}{1-iz}$, en multipliant la fraction par $\cos\theta \neq 0$ ($\theta \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$), au numérateur et dénominateur,

$$Z^4 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$$

En exploitant les racines quatrièmes de $e^{2i\theta}$, on a l'équivalence :

$$Z^4 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \iff \exists\, k \in [\![0,3]\!] \text{ tel que } Z = e^{i\alpha_k} \text{ avec } \alpha_k = \frac{\theta}{2} + k\frac{\pi}{2}$$

Notons alors Z_k, le complexe $e^{i\alpha_k}$ avec $\alpha_k = \frac{\theta}{2} + k\frac{\pi}{2}$.
On a donc

$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^4 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \iff \exists\, k \in [\![0,3]\!] \text{ tel que } \frac{1+iz}{1-iz} = Z_k$$

Or

$$\frac{1+iz}{1-iz} = Z_k \iff 1 + iz = Z_k(1-iz) \iff (i + iZ_k)z = Z_k - 1 \iff (1+Z_k)z = -iZ_k + i$$

Notons que $1 + Z_k = 0 \iff Z_k = -1 \iff \alpha_k = \pi[2\pi] \iff \frac{\theta}{2} + k\frac{\pi}{2} \equiv \pi[2\pi]$

Or $\frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, alors pour que $Z_k = -1$, il faut et il suffit que $\theta = 0$ et $k = 2$.
Or dans cette question $\theta \neq 0$ (sinon, on considère la première question).

Donc $1 + Z_k \neq 0$.
On a donc

$$\frac{1+iz}{1-iz} = Z_k \iff z = \frac{i(1-Z_k)}{1+Z_k} = i\frac{e^{i\frac{\alpha_k}{2}}\left(e^{-i\frac{\alpha_k}{2}} - e^{i\frac{\alpha_k}{2}}\right)}{e^{i\frac{\alpha_k}{2}}\left(e^{-i\frac{\alpha_k}{2}} + e^{i\frac{\alpha_k}{2}}\right)} = i\frac{-2i\sin\frac{\alpha_k}{2}}{2\cos\frac{\alpha_k}{2}} = \tan\frac{\alpha_k}{2}$$

Ainsi, comme $\alpha \neq 0$, $\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^4 = \frac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha} \iff \exists\, k \in [\![0,3]\!]$ tel que $z = \tan\left(\frac{\alpha}{4} + k\frac{\pi}{4}\right)$ /2

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\tan\left(\frac{\alpha}{4} + k\frac{\pi}{4}\right), k \in \{0,1,2,3\}\right\}}$$

.2. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.
On pourra exploiter une récurrence forte.

---

x est un nombre fixé dans tout l'exercice.
Montrons le résultat par récurrence, forte.
Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « $x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$ ».

— $x^0 + \frac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2 \in \mathbb{Z}$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.
$x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$, donc la puissance n-ieme de ce nombre est également entière.
On applique la formule du binôme de Newton :

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \frac{1}{x^{n-k}} = x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} x^{2k-n} + \frac{1}{x^n}$$

Notons que si $h = n - k$, alors $x^{2h-n} = x^{2(n-k)-n} = x^{n-2k} = \frac{1}{x^{2k-n}}$ et $\binom{n}{h} = \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.
Ainsi, on peut arranger ensemble les extrémités de la somme $k = 1$ avec $k = n - 1$, $k = 2$ avec $k = n - 2$...
Il faut ensuite voir ce qui se passe au milieu. Cela dépend de la parité de n.

— Si n est impair, on peut noter $n = 2m + 1$, (il y a $n - 0 + 1 = 2m + 2$ termes additionnés dans la somme), alors

$$\begin{aligned}
\left(x + \frac{1}{x}\right)^n &= x^n + \frac{1}{x^n} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \binom{n}{k} x^{2k-n}}_{i=k} + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{n-1(=2m)} \binom{n}{k} x^{2k-n}}_{i=n-k \Leftrightarrow k=n-i} \\
& x^n + \frac{1}{x^n} + \sum_{i=1}^{m} \binom{n}{i} x^{2i-n} + \sum_{i=1}^{m} \binom{n}{n-i} x^{-2i+n} && \text{car } n - (m+1) = 2m + 1 - m - 1 = m \\
&= x^n + \frac{1}{x^n} + \sum_{i=1}^{m} \binom{n}{i} \left(x^{2i-n} + \frac{1}{x^{2i-n}}\right) && \text{car } \binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}
\end{aligned}$$

Donc $x^n + \frac{1}{x^n} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^n - \sum_{i=1}^{m} \binom{n}{i} \left(x^{2i-n} + \frac{1}{x^{2i-n}}\right)$.
Or, d'après $\mathcal{P}_{2i-n}$, pour i de 1 à m, on a $\left(x^{2i-n} + \frac{1}{x^{2i-n}}\right) \in \mathbb{Z}$,
chaque coefficient binomial est un entier, le produit d'entiers et la sommes d'entier est un entier.
Donc $x^n + \frac{1}{x^n}$ est un entier.

— Si n est pair, on peut noter $n = 2m$, (il y a $2m + 1$ termes dans la somme) alors

$$\begin{aligned}
\left(x + \frac{1}{x}\right)^n &= x^n + \frac{1}{x^n} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} \binom{n}{k} x^{2k-n}}_{i=k} + \binom{n}{m} x^{2m-m} + \underbrace{\sum_{k=m+1}^{n-1} \binom{n}{k} x^{2k-n}}_{i=n-k \Leftrightarrow k=n-i} \\
&= x^n + \frac{1}{x^n} + \sum_{i=1}^{m-1} \binom{n}{i} x^{2i-n} + \sum_{i=1}^{m-1} \binom{n}{n-i} x^{-2i+n} + \binom{n}{m} && \text{car } n - (m+1) = 2m - m - 1 = m - 1 \\
&= x^n + \frac{1}{x^n} + \sum_{i=1}^{m} \binom{n}{i} \left(x^{2i-n} + \frac{1}{x^{2i-n}}\right) + \binom{n}{m} && \text{car } \binom{n}{i} = \binom{n}{n-i}
\end{aligned}$$

Donc $x^n + \frac{1}{x^n} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^n - \sum_{i=1}^{m-1} \binom{n}{i} \left(x^{2i-n} + \frac{1}{x^{2i-n}}\right) - \binom{n}{m}$.
Or, d'après $\mathcal{P}_{2i-n}$, pour i de 1 à m, on a $\left(x^{2i-n} + \frac{1}{x^{2i-n}}\right) \in \mathbb{Z}$,
chaque coefficient binomial est un entier, le produit d'entiers et la sommes d'entier est un entier.
Donc $x^n + \frac{1}{x^n}$ est un entier.

Dans tous les cas $x^n + \frac{1}{x^n}$ est un entier, donc $\mathcal{P}_n$ est vraie.
On a démontré par récurrence : /3,5

$$\boxed{\text{Si } x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}, \text{ alors pour tout } n \in \mathbb{N},\ x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}.}$$

Problème 1 - Racines quadratiques et géométrie

On se donne deux nombres complexes p et q, affixes des points P et Q du plan complexe, on étudie les racines (=zéros) z_1 et z_2 du trinôme $x^2 - 2px + q$. On note M_1 et M_2 les deux points d'affixe z_1 et z_2 respectivement.
On cherchera durant tout le problème des conditions nécessaires suffisantes en lien avec le nombre $\frac{q}{p^2}$ (complexe, a priori). On supposera pour tout le problème que $\underline{p \neq 0}$. On note O, le point d'affixe 0, centre du repère.

.1. Calculer les racines du polynôme pour $p = \frac{1}{2}(1+i)$ et $q = -4i$

On applique la méthode classique (avec le discriminant) pou calculer les racines de $z^2 - (1+i)z - 4i$.

$\Delta = (1+i)^2 + 16i = 18i$. On cherche $\delta = x+iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$. Cela donne les trois équations : $\begin{cases} |\delta^2| = x^2+y^2 = |\Delta| = 18 \\ \mathrm{Re}(\delta^2) = x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(\Delta) = 0 \\ \mathrm{Im}(\delta^2) = 2xy = \mathrm{Im}(\Delta) = 18 \end{cases}$

On a donc $x^2 = y^2 = 9$ et comme $xy > 0$, on a donc nécessairement : $x = y = 3$ ou $x = y = -3$. /2

$$\boxed{\text{Ainsi les racines du polynômes sont } \frac{-(-(1+i)+3(1+i)}{2} = 2+2i \text{ et } \frac{-(-(1+i)-3(1+i)}{2} = -1-i.}$$

.2. Relation entre coefficients et racines pour $x^2 - 2px + q$.

(a) Calculer Δ, on donnera le résultat factorisé par $\left(1 - \frac{q}{p^2}\right)$.

--- /0,5

$$\boxed{\Delta = (-2p)^2 - 4q = 4p^2\left(1 - \frac{q}{p^2}\right)}$$

(b) Exprimer les relations de Viète pour le polynôme $x^2 - 2px + q = 0$.

---

z_1 et z_2 sont les racines de l'équation polynomiale $ax^2 + bx + c$ si et seulement si $\begin{cases} z_1 + z_2 & = -\frac{b}{a} \\ z_1 \times z_2 & = \frac{c}{a} \end{cases}$.

Pour cette équation, cela donne : /0,5

$$\boxed{z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les racines de l'équation polynomiale } x^2 - 2px + q \text{ si et seulement si } \begin{cases} z_1 + z_2 & = 2p \\ z_1 \times z_2 & = q \end{cases}}$$

(c) A quelle condition nécessaire et suffisante, a-t-on $z_1 = z_2$?
On donnera une condition qui repose sur le nombre $\frac{q}{p^2}$.

Pour commencer, procédons par analyse pour trouver une condition nécessaire.
Si $z_1 = z_2$, alors $2p = 2z_1$ et $q = z_1^2$ (car $a = 1$, $b = -2p$ et $c = q$).
On a donc $q = p^2 = z_1^2$, ou $\frac{q}{p^2} = 1$.

Réciproquement, supposons que $q = p^2$.
Le discriminant de l'équation est donc $\Delta = 4p(1 - \frac{q}{p^2}) = 0$.
Ainsi l'équation polynomiale admet une racine double. /1

$$\boxed{\text{On a : } \quad z_1 = z_2 \Longleftrightarrow \frac{q}{p^2} = 1.}$$

Il est tout à fait possible ici de raisonner par équivalence.

.3. Vision géométrique sur les racines de $x^2 - 2px + q$.

(a) Quel est le milieu de $[M_1M_2]$?

Le milieu de $[M_1M_2]$ a pour affixe : $\frac{z_1+z_2}{2} = \frac{2p}{2} = p$.
Or le point P a pour affixe p. /0,5

$$\boxed{\text{Donc le milieu de } [M_1M_2] \text{ est le point } P.}$$

(b) Montrer que pour que les points O, M_1 et M_2 soient alignés, il faut et il suffit que $\dfrac{q}{p^2}$ soit un nombre réel inférieur ou égal à 1.
On montrera que la condition est vérifiée pour l'équation de la question 1.

Les points O, M_1 et M_2 sont alignés si et seulement si $\arg M_1 \equiv \arg M_2[\pi]$ Supposons pour commencer que $\arg M_1 \equiv \arg M_2[\pi]$.

Il existe donc $\rho_1 \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $z_1 = \rho_1 e^{i\theta}$ et il existe $\rho_2 \in \mathbb{R}$ tel que $z_2 = \rho_2 e^{i\theta}$.

($\rho_2 > 0$ signifie que M_1 et M_2 sont du même côté, $\rho_2 < 0$ signifie que O est entre M_1 et M_2).

On a donc
$$\frac{q}{p^2} = 4\frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)^2} = 4\frac{\rho_1\rho_2 e^{2i\theta}}{(\rho_1+\rho_2)^2(e^{i\theta})^2} = \frac{4\rho_1\rho_2}{(\rho_1+\rho_2)^2}$$

Donc $\dfrac{q}{p^2} \in \mathbb{R}$.

Par ailleurs, on la suite d'équivalences :
$$\frac{4\rho_1\rho_2}{(\rho_1+\rho_2)^2} \leqslant 1 \underset{(\rho_1+\rho_2)^2>0}{\Longleftrightarrow} 4\rho_1\rho_2 \leqslant (\rho_1+\rho_2)^2 = \rho_1^2 + 2\rho_1\rho_2 + \rho_2^2 \Longleftrightarrow 0 \leqslant \rho_1^2 - 2\rho_1\rho_2 + \rho_2^2 = (\rho_1-\rho_2)^2$$

Elles sont toutes vraies, comme la dernière, donc $\dfrac{q}{p^2} \leqslant 1$.

Réciproquement, supposons que $\dfrac{q}{p^2} \in]-\infty, 1]$.

On sait que $\Delta = 4\left(1 - \dfrac{q}{p^2}\right)p^2$. Comme $\dfrac{q}{p^2} \in]-\infty, 1]$, alors $1 - \dfrac{q}{p^2} \in \mathbb{R}_+$.

Et donc $4\left(1 - \dfrac{q}{p^2}\right)$ est un réel positif. Notons $u = \sqrt{4\left(1 - \dfrac{q}{p^2}\right)} \in \mathbb{R}_+$.

Alors $\Delta = (up)^2$ et donc les racines du trinôme sont $z_1 = \dfrac{-(-2p)+up}{2} = \dfrac{2+u}{2}p$ et $z_2 = \dfrac{-(-2p)-up}{2} = \dfrac{2-u}{2}p$.

Et donc $\arg z_1 \equiv \arg p \equiv \arg z_2[\pi]$ car $\dfrac{2+u}{2}$ et $\dfrac{2-u}{2}$ sont des nombres réels

Par conséquent : O, M_1 et M_2 sont alignés. /2,5

$$\boxed{\text{Les points } O,\ M_1 \text{ et } M_2 \text{ soient alignés, il faut et il suffit que } \frac{q}{p^2} \in]-\infty, 1].}$$

Pour l'équation de la question 1, on a $\dfrac{q}{p^2} = \dfrac{-4i}{\left(\frac{1}{2}(1+i)\right)^2} = -8 \in]-\infty, 1]$, et les racines sont $2(1+i)$ et $-(1+i)$, alignées avec O.

L'inégalité démontrée ici est une inégalité classique appelé : inégalité arithmético-géométrique. Elle est à connaître et à savoir démontrée.

(c) A quelle condition nécessaire et suffisante, les deux zéros du trinôme étudié ont-ils le même argument principal ?

La question est plus précise que précédemment. Par exemple dans l'exemple de la question 1, les points M_1 et M_2 n'ont pas le même argument principal, mais un décallage de π.

On reprend la même analyse, mais avec nécessairement ici : $\rho_2 > 0$.

Les points O, M_1 et M_2 sont alignés si et seulement si $\arg M_1 \equiv \arg M_2[2\pi]$ Supposons pour commencer que $\arg M_1 \equiv \arg M_2[2\pi]$.

Il existe donc $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que $z_1 = \rho_1 e^{i\theta}$ et $z_2 = \rho_2 e^{i\theta}$.

On a donc
$$\frac{q}{p^2} = 4\frac{z_1 z_2}{(z_1+z_2)^2} = 4\frac{\rho_1\rho_2 e^{2i\theta}}{(\rho_1+\rho_2)^2(e^{i\theta})^2} = \frac{4\rho_1\rho_2}{(\rho_1+\rho_2)^2}$$

Donc $\dfrac{q}{p^2} \in \mathbb{R}_+$ et on a vu $\dfrac{q}{p^2} \leqslant 1$.

Réciproquement, supposons que $\dfrac{q}{p^2} \in [0, 1]$.

Alors avec la même notation qu'à la question précédente : $4(1 - \dfrac{q}{p^2}) \leqslant 4$ et donc $u \in [0, 2]$.

Et donc $\dfrac{2+u}{2} \geqslant 0$ et $\dfrac{2-u}{2} \geqslant 0$. Donc $\arg z_1 \equiv \arg p \equiv \arg z_2[2\pi]$.

Et donc z_1 et z_2 ont le même argument principal. /2

$$\boxed{\text{Les deux zéros du trinôme ont le même argument principal si et seulement si } \frac{q}{p^2} \in [0, 1].}$$

(d) Montrer que, pour que les zéros aient le même module, il faut et il suffit que $\dfrac{q}{p^2}$ soit un nombre réel supérieur ou égal à 1.

Supposons que z_1 et z_2 ont le même module.

Alors il existe $\varphi(\equiv \arg z_2 - \arg z_1) \in [0, 2\pi]$ tel que $z_2 = z_1 e^{i\varphi}$.

On a donc, d'après les formules de Viète :

$$\frac{q}{p^2} = \frac{z_1 z_2}{\left(\frac{z_1+z_2}{2}\right)^2} = 4\frac{z_1^2 e^{i\varphi}}{z_1^2(1+e^{i\varphi})^2} = \frac{4e^{i\varphi}}{\left(e^{i\varphi/2}(e^{-i\varphi/2}+e^{i\varphi/2})\right)^2} = \frac{1}{\cos^2\frac{\varphi}{2}} \geqslant 1$$

car $\cos^2\frac{\varphi}{2} \in]0,1]$ (Par hypothèse, $p \neq 0$, donc $\cos\varphi_2 \neq 0$) Réciproquement, supposons que $\frac{q}{p^2} \geqslant 1$.

On rappelle (même calcul que précédemment) que $\Delta = 4\left(1-\frac{q}{p^2}\right)p^2$.

Par hypothèse, ici, $\left(1-\frac{q}{p^2}\right) \leqslant 0$. Notons $v = \sqrt{-\left(1-\frac{q}{p^2}\right)}$.

On a donc $(iv)^2 = -(1) \times -\left(1-\frac{q}{p^2}\right) = \left(1-\frac{q}{p^2}\right)$ et donc $(2piv)^2 = \Delta$.

Les racines de l'équations sont donc $z_1 = p + piv = p(1+i)v$ et $z_2 = p(1-i)v$.

On a alors $|z_1| = |p| \times |1+i| \times v = v\sqrt{2}|p| = |p| \times |1-i| \times v = |z_2|$ /1,5

$$\boxed{\text{les zéros aient le même module, il faut et il suffit que } \frac{q}{p^2} \geqslant 1.}$$

(e) A quelle condition le triangle OM_1M_2 est-il rectangle et isocèle en O ?
A quelle condition ce triangle est-il équilatéral ?

Le triangle OM_1M_2 est-il rectangle et isocèle en O si et seulement si $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \pm\frac{\pi}{2}$ et que $OM_1 = OM_2$.

donc si et seulement si $z_1 - 0 = i(z_2 - 0)$ ou $z_1 - 0 = -i(z_2 - 0)$

donc si et seulement si $z_1 = iz_2$ ou $z_1 = -iz_2$

Supposons que $z_1 = iz_2$ alors $\frac{q}{p^2} = \frac{4z_1z_2}{(z_1+z_2)^2} = \frac{4iz_2^2}{(1+i)^2z_2^2} = \frac{4i}{2i} = 2$.

Supposons que $z_1 = -iz_2$ alors $\frac{q}{p^2} = \frac{4z_1z_2}{(z_1+z_2)^2} = \frac{-4iz_2^2}{(1-i)^2z_2^2} = \frac{-4i}{-2i} = 2$.

Dans les deux cas, on trouve comme condition nécessaire : $\frac{q}{p^2} = 2$.

Réciproquement, supposons que $\frac{q}{p^2} = 2$ (pour voir si la condition est suffisante).

Alors $\Delta = 4p^2(1-2) = -4p^2$, donc $z_1 = \frac{2p-2pi}{2} = p(1-i)$ et $z_2 = p(1+i)$ (ou l'inverse).

Et on a $iz_1 = p(i+1) = z_2$ (donc $z_1 = -iz_2$). Dans le cas d'interversion z_1 et z_2, on a $iz_2 = z_1$.

$$\boxed{\text{Le triangle } OM_1M_2 \text{ est rectangle et isocèle en } O \text{ si et seulement si } \frac{q}{p^2} = 2.}$$

Le triangle OM_1M_2 est-il équilatéral si et seulement si $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) = \pm\frac{\pi}{3}$ et que $OM_1 = OM_2$.

donc si et seulement si $z_1 - 0 = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_2 - 0)$ ou $z_1 - 0 = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z_2 - 0)$

donc si et seulement si $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}z_2$ ou $z_1 = e^{-i\frac{\pi}{3}}z_2$

Supposons que $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}z_2$ alors :

$$\frac{q}{p^2} = \frac{4z_1z_2}{(z_1+z_2)^2} = \frac{4e^{i\frac{\pi}{3}}z_2^2}{(1+e^{i\frac{\pi}{3}})^2z_2^2} = \frac{4e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}(e^{-i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{6}})^2} = \frac{4}{4\cos^2\frac{\pi}{6}} = \frac{4}{3}$$

car $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Supposons que $z_1 = e^{-i\frac{\pi}{3}}z_2$ alors :

$$\frac{q}{p^2} = \frac{4z_1z_2}{(z_1+z_2)^2} = \frac{4e^{-i\frac{\pi}{3}}z_2^2}{(1+e^{-i\frac{\pi}{3}})^2z_2^2} = \frac{4e^{-i\frac{\pi}{3}}}{e^{-i\frac{\pi}{3}}(e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{-i\frac{\pi}{6}})^2} = \frac{4}{4\cos^2\frac{\pi}{6}} = \frac{4}{3}$$

Dans les deux cas, on trouve comme condition nécessaire : $\frac{q}{p^2} = \frac{4}{3}$.

Réciproquement, supposons que $\frac{q}{p^2} = \frac{4}{3}$.

Alors $\Delta = 4p^2(1-\frac{4}{3}) = -\frac{4}{3}p^2$, donc $z_1 = \frac{2p - i\frac{2}{\sqrt{3}}\pi}{2} = p\left(1 - i\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $z_2 = p\left(1+i\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (ou l'inverse).

Et on a $e^{i\frac{\pi}{3}}z_1 = \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)p\left(1-i\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = p\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+i\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = p\left[1+i\frac{3-1}{2\sqrt{3}}\right] = z_2$.

On a donc $z_1 = e^{-i\frac{\pi}{3}}z_2$. Dans le cas d'inversion z_1 et z_2, on a $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}z_3$. /1,5

$$\boxed{\text{Le triangle } OM_1M_2 \text{ est équilatéral si et seulement si } \frac{q}{p^2} = \frac{4}{3}.}$$

Problème 2 - Lemme des pics

On note indifféremment : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, v ou (v_n), selon le contexte une même suite.
Notons, en revanche que v_n ne désigne pas la suite, mais la valeur prise par cette suite en n, précisément.

On rappelle quelques résultats de terminale :

- la suite (v_n) est croissante, si $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \geqslant v_n$.
- la suite (v_n) est décroissante, si $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \leqslant v_n$.
- la suite (v_n) est majorée, si il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant A$.
- la suite (v_n) est minorée, si il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant B$.
- la suite (v_n) est bornée, si (v_n) est majorée et minorée.

On rappelle que toute suite de réels, croissante et majorée, est convergente dans $\mathbb{R}$.
On rappelle que toute suite de réels, décroissante et minorée, est convergente dans $\mathbb{R}$.
On admet également que toute partie F de $\mathbb{N}$, non vide, admet un plus petit élément, c'est-à-dire
$\exists\ m \in F$ tel que $\forall\ x \in F$, $m \leqslant x$.

On considère dans tout le problème une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée.
On note $E(u) = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall\ p \geqslant n, u_p \geqslant u_n\}$. C'est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$

.1. Exemple d'ensemble E, selon des cas particuliers de suite u.

(a) Que vaut $E((n)_{n\in\mathbb{N}})$, si la suite $(u_n) = (n)$?

La suite (u_n) est ici croissante. Fixons n.
Pour tout $p \geqslant n$, on a $u_p = p \geqslant n = u_n$, donc $n \in E(u)$.
Et ceci est vrai pour tout entier n. /0,5

$$\boxed{E(u) = \mathbb{N}}$$

(b) Que vaut $E\big(\dfrac{1}{n}\big)$, si la suite $(u_n) = (\dfrac{1}{n})$?

La suite (u_n) est décroissante. Cela est donc immédiat /0,5

$$\boxed{E(u) = \emptyset}$$

(c) Que vaut $E\big(((-1)^n)\big)$, si la suite $(u_n) = ((-1)^n)$?

La suite (u_n) alterne les signes. On a $u_n = 1$ si n pair et $u_n = -1$ si n impair.
Fixons n.
Si n est pair, $u_n = (-1)^n = 1$ et donc avec $p = n+1 \geqslant n$, $u_p = (-1)^{n+1} = -1 \leqslant u_n$.
Donc $n \notin E$.
Si n est impair, $u_n = (-1)^n = -1$ et donc pour $p \geqslant n$, $u_p \in \{-1, 1\}$, donc $u_p \geqslant u_n$.
Donc $n \in E$. /1

$$\boxed{E(u) = 2\mathbb{N}+1 \text{ (notation pour désigner l'ensemble des nombres impairs)}}$$

(d) Que vaut $E\big((\dfrac{(-1)^n}{n})\big)$, si la suite $(u_n) = \left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$?

La suite (u_n) alterne les signes de la même façon. Les nombres pairs ne sont pas dans E.
Et comme précédemment, dans le cas où n est impair, alors si $p \geqslant n$,
si p est pair, $u_p \geqslant 0 \geqslant u_n$ si p est impair $u_p = \dfrac{-1}{p} \geqslant \dfrac{-1}{n} = u_n$ car $\dfrac{1}{p} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
Dans tous les cas $u_p \geqslant u_n$. /1

$$\boxed{E(u) = 2\mathbb{N}+1 \text{ (notation pour désigner l'ensemble des nombres impairs)}}$$

.2. Que signifie, formellement, $n \notin E(u)$?

--- /0,5

$$\boxed{n \notin E(u) \iff \exists\ p \geqslant n \text{tel que } u_p < u_n}$$

.3. On suppose que $E(u)$, ensemble infini et dénombrable s'écrit $\{n_1, n_2, \dots n_k, \dots\}$
avec la convention que $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $n_k \leqslant n_{k+1}$.
On définie la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_k = u_{n_k}$.

(a) Montrer que la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

Soit $k \in \mathbb{N}$, alos $n_k \in E$, alors $\forall\, p \geqslant n_k$, $u_p \geqslant u_{n_k}$, par définition de E.
Puis E est écrit par ordre croissant, donc $n_{k+1} \geqslant n_k$,
il vérifie donc la même propriété que le p générique. Donc $v_{k+1} = u_{n_{k+1}} \geqslant u_{n_k} = v_k$.
Ceci est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc /1,5

$$\boxed{(v_k)_{k\in\mathbb{N}} = (u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} = (u_h)_{h\in E} \text{ est une suite croissante.}}$$

(b) En déduire que la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $n_k \in \mathbb{N}$, donc $v_k = u_{n_k}$ vérifie : $B \leqslant u_{n_k} \leqslant A$.
Donc la suite (v_k) est croissante et majorée (par A), donc elle est convergente d'après le résultat rappelé dans l'énoncé. /1

$$\boxed{\text{la suite } (v_k)_{k\in\mathbb{N}} = (u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ est une suite convergente.}}$$

.4. On suppose que $E(u)$ n'est pas infini (donc est fini).

(a) Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geqslant N$, $\exists\, p \geqslant n$ tel que $u_p < u_n$.

L'ensemble $E(u)$ est fini, il est donc majoré. Ainsi, il existe $N = \max(E) + 1$ tel que :
$\forall\, n \geqslant N$, $n \notin E(u)$.
Et donc d'après le formalisme trouvé en question 2. /1,5

$$\boxed{\text{Il existe } N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall\, n \geqslant N,\ \exists\, p \geqslant n \text{ tel que } u_p < u_n.}$$

(b) Montrer que pour tout $n \geqslant N$, $F_n := \{p \in \mathbb{N} \cap]n, +\infty[\mid u_p < u_n\}$ admet un plus petit élément noté $\varphi(n)$.

D'après la question précédente, F_n n'est pas vide, sinon $n \in E$ (ce qui est faux car $n \geqslant N$).
Tout ensemble d'entiers non vide admet un plus petit élément (d'après ce qui est rappelé dans l'énoncé). /1,5

$$\boxed{\text{Notons } \varphi(n) = \min F_n.}$$

(c) On note $n_0 = N$ et par récurrence pour $k \in \mathbb{N}^*$, $n_k = \varphi(n_{k-1})$.
Montrer que $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers et que $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} := (u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

$n_{k+1} = \varphi(n_k) = \min F_{n_k}$.
Or par définition de F_{n_k}, $F_{n_k} \subset]n_k, +\infty[\cap \mathbb{N}$,
donc tous les éléments de F_{n_k} sont des entiers supérieurs strictement à n_k.
Ainsi $n_{k+1} > n_k$.
De plus $n_{k+1} \in F_{n_k}$, donc il vérifie (comme le p de la définition) : $u_{n_{k+1}} < u_{n_k}$ /1

$$\boxed{(n_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est une suite croissante d'entiers et que } (v_k)_{k\in\mathbb{N}} = (u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ est une suite décroissante.}}$$

(d) En déduire que la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}} = (u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente.

Comme en question 3.(b), la suite (u_{n_k}) est bornée, et en particulier minorée par A.
Il s'agit donc d'une suite décroissante et minorée, donc convergente. /1

$$\boxed{\text{La suite } (v_k)_{k\in\mathbb{N}} = (u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ est une suite convergente.}}$$

.5. Qu'avez-vous démontré ?

On a démontré que pour tout suite bornée (u) , selon que $E(u)$ est infini ou non, (u) admet une sous-suite convergence (croissante ou décroisante).
C'est un démonstration du theorème de Bolzano-Weiestrass : /1

$$\boxed{\text{Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.}}$$
