CPGE MPSI Le 07.01.17
2016-2017

# Devoir Surveillé n°5

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un exercice et d'un problème.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole ($*$) voire ($**$)
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

---

## Exercice /15

Les expériences de Michelson (1881) puis Morley (1887) ont donné l'assurance aux physiciens que la vitesse de la lumière est toujours la même dans tous les référentiels galiléens. Les transformations du groupe de Lorentz permettent de justifier mathématiquement ce fait.
Pour faciliter les calculs nous allons nous restreindre au cas unidimensionnel (d'espace). On considère les ensembles $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{G} = ]-c, c[$ et l'ensemble $G$, des applications $\varphi_v : E \to E$.
Chacun des éléments de $G$ est une application $\varphi_v$ de $E$ sur $E$,
paramétrée par un élément $v \in \mathcal{G}$ (vitesse), (avec $|v| < c$) et définie par :

$$\varphi_v : (x,t) \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(x - vt, t - \frac{1}{c^2}vx\right)$$

1. Soit $\gamma : v \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, définie pour $v$, variable réelle.
   (a) Quel est l'ensemble de définition de $\gamma$. Montrer que $\gamma$ est paire.
   (b) Etudier les variations de $\gamma$ et tracer la courbe représentative de $\gamma$ (on prendra $c = 4$) (On présentera les asymptotes et la tangente en $v = 0$).
   (c) Ecrire le développement limité de $\gamma(v)$ à l'ordre 9 au voisinage de $v = 0$.
   (d) Montrer que : $[\gamma(v)]^2 = 1 + [\gamma(v)]^2 \frac{v^2}{c^2}$.
   Vérifier que le développement limité trouvé vérifie bien (on se limitera à l'ordre 6) :

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \times \left(\underbrace{\sum_{k=0}^{6} a_k v^k + o(v^6)}_{=\mathrm{DL}_6(\gamma)(0)}\right)^2 = 1 + o(v^6) \text{ pour } v \to 0$$

2. Montrer que pour tout $v \in \mathcal{G}$, pour tout $(x,t) \in E$,

$$\text{Si} \quad (X,T) = \varphi_v(x,t) \quad \text{alors} \quad c^2T^2 - X^2 = c^2t^2 - x^2$$

3. Montrer que pour tout $v$, $v' \in \mathcal{G}$,

$$\varphi_v \circ \varphi_{v'} = \varphi_V \text{ où } V = \frac{v+v'}{1+\frac{v\times v'}{c^2}}$$

4. On définit donc sur l'ensemble $\mathcal{G}$, la loi

$$v \oplus v' = \frac{v+v'}{1+\frac{v\times v'}{c^2}}$$

   Montrer que l'ensemble $(\mathcal{G}, \oplus)$ est un groupe. Est-il commutatif ?
5. Quelle est la limite de $V = v \oplus v'$, si $v \to c$ ? Qu'en pensez-vous ?

Le groupe de Lorentz, isomorphe à $\mathcal{G}$, est le groupe qui régit les transformation relative d'un référentiel galiléen à un autre.
Au premier ordre (pour $\|\vec{v}\| << c$), il est équivalent au groupe de Galilée rencontré dans les premiers cours de mécanique.

## Problème

Soient $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $a < b$ et $f$ une fonction de $]a, b[$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a, b[$.
$f$ est dite absolument monotone (en abrégé) AM si : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in ]a, b[$, $f^{(n)}(x) \geqslant 0$.
$f$ est dite complètement monotone (en abrégé) CM si : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in ]a, b[$, $(-1)^n f^{(n)}(x) \geqslant 0$.

**A. Régularité et exemples** **/13**

1. Soient $f$ et $g$ deux fonctions AM définies sur $]a, b[$.
   Montrer que $f + g$ et $f \times g$ sont AM. Qu'en est-il si $f$ et $g$ sont des fonctions CM ?
2. Soient $f : ]a, b[ \to \mathbb{R}$ et $g : ]-b, -a[ \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(-x)$.
   Montrer que $f$ est AM sur $]a, b[$ si et seulement si $g$ est CM sur $]-b, -a[$.
3. Exemples.
   (a) Vérifier que la fonction $-\ln$ est CM sur $]0, 1[$.
   (b) Montrer que la fonction tan est AM sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.
4. Prolongement de classe $\mathcal{C}^\infty$ en $a^+$.
   (a) On suppose dans cette question que $a \in \mathbb{R}$ $(a \neq -\infty)$ et $f$ est AM sur $]a, b[$.
   Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\lambda = \lim_{a^+} f$.
   (b) On prolonge $f$ en posant $f(a) = \lambda$.
   Montrer que $f$ est dérivable à droite en $a$, et que $f'$ est continue à droite en $a$.
   (c) Plus généralement, montrer que $f$ est indéfiniment dérivable à droite en $a$ avec des dérivées positives ou nulles.
   (d) Le même phénomène se produit-il en $b$ ?

**B. Lien avec le développement de Tayor** **/21**

On suppose dans cette partie que : $-\infty < a < 0 < b \leqslant +\infty$.
On commence par démontrer une formule dont on aura besoin en 2.(a).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $]a, b[$,
   montrer la formule de Taylor avec reste intégral :

$$\forall\, x \neq t \in ]a, b[, f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(t-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \int_0^1 \frac{(t-x)^{n+1}(1-v)^n}{n!} f^{(n+1)}\big(x + (t-x)v\big)\mathrm{d}v$$

   *On pourra dériver la fonction* $\varphi : x \mapsto f(x) + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(t-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \int_x^t \frac{(t-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u)du$
   *puis faire un changement de variable dans l'intégrale...*
2. Soit $f$ une fonction AM sur $]a, b[$. Notons, pour tout $x \in ]a, b[$ :

$$R_n(f, x) = f(x) - f(0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

   (a) Montrer que, pour $n$ fixé, la fonction

$$x \mapsto \frac{R_n(f, x)}{x^n}$$

   est croissante sur $]0, b[$ et possède une limite nulle quand $x$ tend vers 0.
   (b) On note alors pour tout $x \in [0, b[$, $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.
   Montrer que la suite $\big(S_n(x)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
   On note $g(x)$ sa limite. Montrer que $g \leqslant f$ sur $[0, b[$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que $g = f$ sur $[0, b[$.
   *On pourra prendre* $0 < x < y < b$ *et montrer que :* $0 \leqslant R_n(f, x) \leqslant \left(\frac{x}{y}\right)^n f(y)$
3. En suivant les indications de la question A.5., on prolonge $f$ en $a$.
   Montrer que pour tout $x \in [a, b[$,

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}$$

4. Montrer que si $f$ s'annule en $x_0 \in ]a, b[$, alors $f$ est nulle.
   Donner l'ensemble des fonctions $f$ AM sur ]a,b[ telles que, pour un $p \in \mathbb{N}$ fixé, $f^{(p)}$ possède un zéro dans $]a, b[$.

**C. Différences finies** /19

On suppose dans cette partie que $-\infty < a < b < +\infty$.

Etant donné $h \in \mathbb{R}_+^*$, on définit sur l'ensemble des fonctions réelles d'une variable réelle les applications $\Delta_h^n$ par :

$$\Delta_h(f) = f(x+h) - f(x), \qquad \text{puis } \Delta_h^{n+1} = \Delta_h \circ \Delta_h^n \qquad \big(\text{ on a } \Delta_h^0(f)(x) = f(x)\big)$$

1. On suppose $f$ définie sur $]a, b[$.
   Quel est l'ensemble de définition de $\Delta_h^n(f)$ ?
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$\Delta_h^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh)$$
3. On suppose que $f$ est définie et AM sur $]a, b[$.
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_h^n(f) \geqslant 0$.
   *On pourra poser $X(h) = \Delta_h^{n+1} f(x)$ et exprimer $X'(h)$ en fonction de $\Delta_h^n(f')(x+h)$*
4. On considère les fonctions $f$ totalement monotones (en abrégé) TM c'est-à-dire définies sur $]a, b[$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ et telles que :
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, h \in \left]0, \frac{b-a}{n}\right[, \forall\, x \in [a, b-nh[, \Delta_h^n(f)(x) \geqslant 0$$
   (a) Montrer qu'une fonction TM est positive et croissante
   (b) On pose $\psi(t) = (e^t - 1)^n$ et
   $$\forall\, j \in \mathbb{N}, P_j = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{k^j}{j!}$$
   Déduire du calcul des dérivées successives de $\psi$ en 0 que $P_j$ vaut 0 si $j < n$ et que $P_n$ vaut 1.
   (c) Montrer que toute fonction TM est AM