Devoir surveillé n°3

Sujet donné le mercredi 18 octobre 2023, 3h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Problème 1 - Théorème de Cantor-Bernstein $\approx$ 13 points sur 50

On considère deux ensembles notés E et F.

.1. Pour cette unique question (1), on considère que E et F sont de cardinaux finis.

(a) Montrer que s'il existe $\varphi : E \hookrightarrow F$ injective, alors il existe $\psi : F \twoheadrightarrow E$ surjective.

(b) Montrer que s'il existe $\psi : E \twoheadrightarrow F$ surjective, alors il existe $\varphi : F \hookrightarrow E$ injective.

(c) Montrer que s'il existe $\varphi_1 : E \hookrightarrow F$ et $\varphi_2 : F \hookrightarrow E$ injectives, alors il existe une bijection de E sur F (théorème de Cantor-Bernstein cas fini).

.2. Pour la suite E et F ne sont pas nécessairement de cardinaux finis.

(a) On suppose qu'il existe $\varphi : E \hookrightarrow F$ injective.
Montrer qu'il existe une fonction $\overline{\varphi} : E \to \varphi(E)$ bijective, puis construire une surjection de F sur E.

(b) On suppose qu'il existe $\psi : E \twoheadrightarrow F$ surjective.
Montrer que pour tout $x \in F$, $\psi^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset$. En déduire la construction d'une injection de F sur E.

.3. On cherche à montrer le théorème de Cantor-Bernstein :

« Si il existe $\varphi_1 : E \hookrightarrow F$ et $\varphi_2 : F \hookrightarrow E$ injectives, alors il existe une bijection de E sur F. »

On considère $\psi : E \to E$ injective. On note $A = \psi(E)$ et $B_0 = E \setminus A$.

(a) On définie, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B_k = \psi(B_{k-1})$. Enfin, on définie $B = \displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$.

Décrire avec quantificateur le fait que $x \in B$ et le fait que $x \notin B$.

(b) On définit $\theta : E \to A$, $x \mapsto \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \in B \\ x & \text{si } x \notin B \end{cases}$.
Montrer que θ est bien définie.

(c) Montrer que θ est injective

(d) Montrer que θ est surjective.

(e) (*) Conclure

Problème 2 - Exponentielle sous forme de somme $\approx$ 17 points sur 50

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ et également $f_n : x \mapsto e^{-x} \times T_n(x)$.

.1. Etude de la fonction T_n.

(a) Pourquoi T_n est dérivable ? Exprimer simplement T_n' en fonction des $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $T_n(x) \geqslant 1$.

(c) (*) Montrer, par récurrence, que
— si $n = 2m$ est pair alors T_{2m} est strictement positif sur $\mathbb{R}$.
— si $n = 2m+1$ est impair, alors T_{2m+1} admet une unique racine notée α_m

(d) (**) Montrer que $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

(e) Représenter sur le graphe 1 donné avec l'énoncé les représentations de $y = T_0(x)$, $y = T_1(x)$, $y = T_2(x)$ et $y = T_3(x)$. Représenter également α_0 et α_1.
(En fait $T_0(x) = 1$ n'est pas vraiment défini).

.2. Convergence de $(T_n(x))_n$. Etude de f_n.

(a) Pourquoi la fonction f_n est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = -\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.

(c) Considérons deux réels x_1 et x_2 tels que : $x_1 < 0 < x_2 < n$.
Montrer, en étudiant les variations de f_n' sur $[x_1, 0]$ et sur $[0, x_2]$ que

pour tout $u \in [x_1, 0]$, $|f_n'(u)| \leqslant \dfrac{|x_1|^n}{n!}e^{-x_1}$ et pour tout $u \in [0, x_2]$, $|f_n'(u)| \leqslant \dfrac{x_2^n}{n!}e^{-x_2}$

(d) On admet l'inégalité des accroissements finis, pour tout $a < b \in \mathbb{R}$:
« pour φ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall\ u \in]a, b[, |\varphi'(u)| \leqslant k$ alors $|\varphi(b) - \varphi(a)| \leqslant k \times |b - a|$ »
En déduire, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé et tout entier $n > \lfloor x \rfloor + 1$:

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = |1 - f_n(x)| \times e^x \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n!}$$

(e) On insiste : x est fixé. On note $v_n = \dfrac{|x|^{n+1}}{n!}$.
Evaluer $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, en déduire qu'il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $v_n \leqslant \dfrac{1}{2^{n-N}} v_N$.
Quelle est la limite de (v_n) pour $n \to +\infty$?

(f) En déduire la valeur de la limite de $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!} \right)_{n \in \mathbb{N}}$, limite que l'on notera $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Problème 3 - $a^b = b^a$ $\approx$ 20 points sur 50

Dans tout le problème, on considère $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.

.1. Etude de f.

(a) Quel est l'ensemble de définition et de dérivation de f ?

(b) Etudier les variations de f, ainsi que les limites en 0^+ et $+\infty$.

(c) Tracer $y = f(x)$ sur le graphe donné dans l'énoncé. (On fera apparaitre toutes les informations graphiques trouvées dans la question précédentes).

(d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Donner le nombre de solution de l'équation $x = e^{\lambda x}$ notée (E_λ), en fonction de la valeurs de λ, préciser également dans quel intervalle se trouvent ces solutions / se trouve cette solution.

.2. Equation $a^b = b^a$.

(a) Montrer l'équivalence, pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$: $a^b = b^a \iff f(a) = f(b)$

(b) En déduire deux intervalles, les plus grands possible, I et J disjoints tel qu'on puisse affirmer $\forall\ a \in I$, $\exists\ !b \in J$ tel que $a^b = b^a$.

(c) Démontrer qu'il existe une unique solution entière (i.e. $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$) tel que $a^b = b^a$ et $a < b$.

(d) Comparer $10\,000^{10\,001}$ et $10\,001^{10\,000}$.

.3. Fonctions réciproques.

(a) Montrer que $f_1 :]1, e] \to]0, \frac{1}{e}]$, $x \mapsto f(x)$ est une application bijective.
On note f_1^{-1}, la fonction réciproque.

(b) Montrer que $f_2 : [e, +\infty[\to]0, \frac{1}{e}]$, $x \mapsto f(x)$ est une application bijective.
On note f_2^{-1}, la fonction réciproque.

(c) Montrer que f_1^{-1} et f_2^{-1} sont des fonctions dérivables sur $]0, \frac{1}{e}[$.
Exprimer pour tout $x \in]1, e[$, $\left(f_1^{-1}\right)'(x)$, à l'aide de $f_1^{-1}(x)$.
Exprimer pour tout $x \in]e, +\infty[$, $\left(f_2^{-1}\right)'(x)$, à l'aide de $f_2^{-1}(x)$.

(d) Sur le même graphique que précédemment, représenter les fonctions f_1^{-1} et f_2^{-1}
(On fera apparaitre toutes les informations graphiques connues).

.4. $a \to b$?

(a) Montrer que l'équivalence :
$a^b = b^a$ et $a \neq b \iff b = f_2^{-1} \circ f_1(a)$ ou $b = f_1^{-1} \circ f_2(a)$.

(b) On note $\theta :]1, +\infty[\to]1, +\infty[$, $x \mapsto \begin{cases} f_2^{-1} \circ f_1(x) & \text{si } x \in]1, e[\\ e & \text{si } x = e \\ f_1^{-1} \circ f_2(x) & \text{si } x \in]e, +\infty[\end{cases}$
Montrer que θ est une involution (i.e. $\theta \circ \theta = \mathrm{id}_{]1,+\infty[}$)

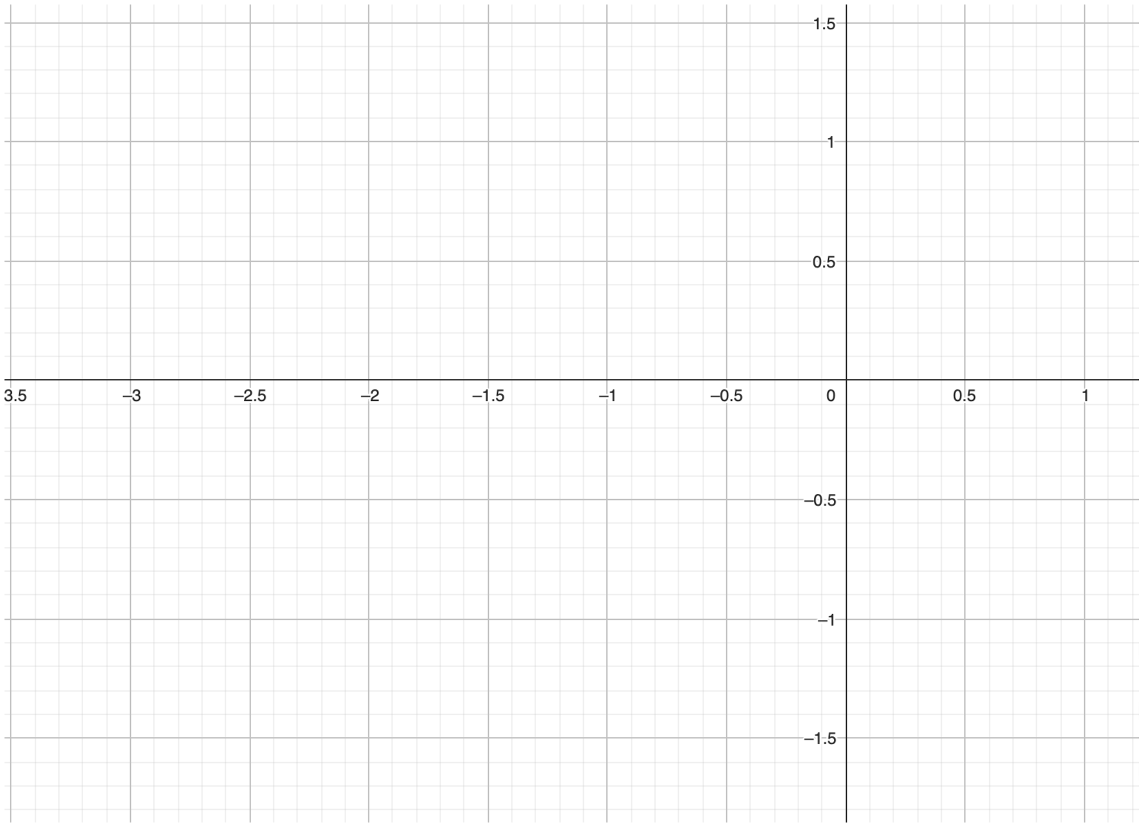
(c) Montrer que θ est continue sur $]1, +\infty[$.

(d) (*) θ est-elle dérivable sur $]1, +\infty[$?

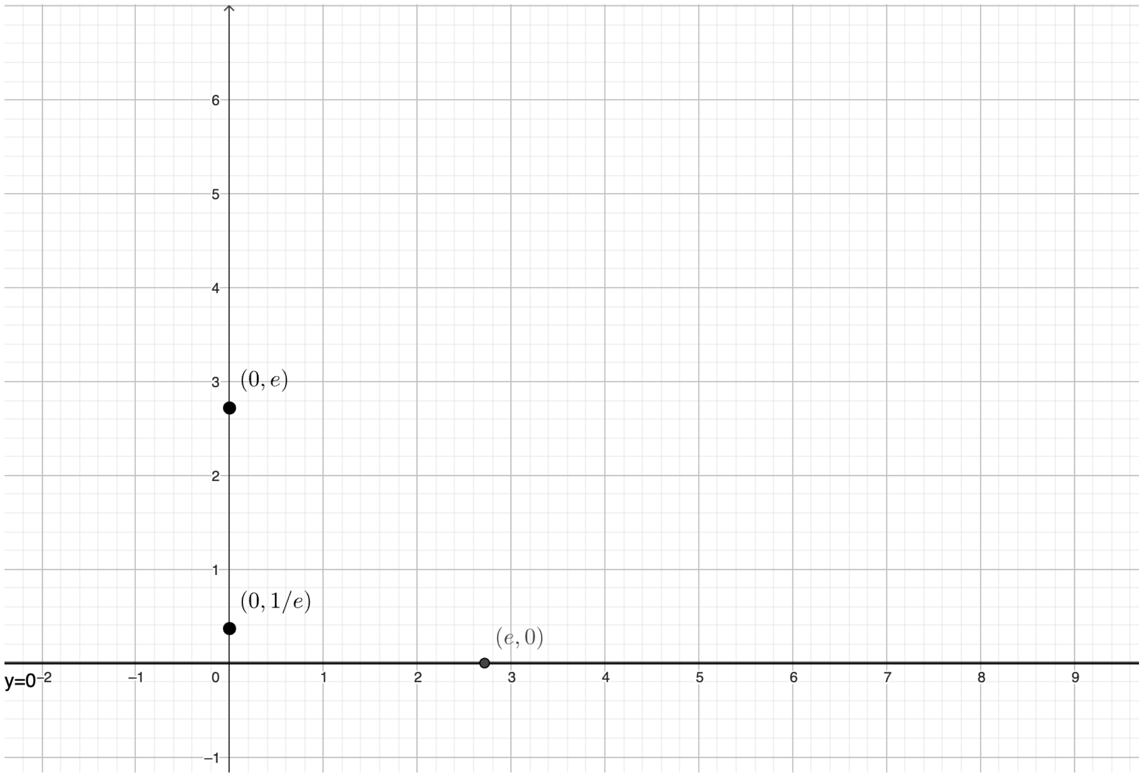
(e) Représenter la courbe d'équation $y = \theta(x)$ sur le même graphe.

NOM :

Prénom :



Représentation graphique associée au problème 2



Représentation graphique associée au problème 3

Correction

Problème 1 - Théorème de Cantor-Bernstein

On considère deux ensembles notés E et F.

.1. Pour cette unique question (1), on considère que E et F sont de cardinaux finis.

(a) Montrer que s'il existe $\varphi : E \hookrightarrow F$ injective, alors il existe $\psi : F \twoheadrightarrow E$ surjective.

Puisque les ensembles sont de cardinaux finis, on a vu que l'existence d'une fonction injective permet d'affirmer que $\text{card}(E) \leqslant \text{card}(F)$.
Dans le cas surjectif, la réciproque est vraie si $\text{card}(F) \geqslant \text{card}(E)$, alors /0,5

$$\boxed{\text{il existe une surjection de } F \text{ sur } E.}$$

(b) Montrer que s'il existe $\psi : E \twoheadrightarrow F$ surjective, alors il existe $\varphi : F \hookrightarrow E$ injective.

Puisque les ensembles sont de cardinaux finis, on a vu que l'existence d'une fonction surjective permet d'affirmer que $\text{card}(E) \geqslant \text{card}(F)$.
Dans le cas injectif, la réciproque est vraie si $\text{card}(F) \leqslant \text{card}(E)$, alors /0,5

$$\boxed{\text{il existe une injection de } F \text{ sur } E.}$$

(c) Montrer que s'il existe $\varphi_1 : E \hookrightarrow F$ et $\varphi_2 : F \hookrightarrow E$ injectives, alors il existe une bijection de E sur F.

Toujours grâce aux cardinaux, puisque φ_1 est injective : $\text{card}(E) \leqslant \text{card}(F)$.
et puisque φ_2 est injective : $\text{card}(F) \leqslant \text{card}(E)$.
Donc $\text{card}(E) = \text{card}(F)$. Ceci est une condition suffisante (et aussi nécessaire) pour pouvoir affirmer : /0,5

$$\boxed{\text{il existe une bijection de } E \text{ sur } F.}$$

.2. Pour la suite E et F ne sont pas nécessairement de cardinaux finis.

(a) On suppose qu'il existe $\varphi : E \hookrightarrow F$ injective.
Montrer qu'il existe une fonction $\overline{\varphi} : E \to \varphi(E)$ bijective, puis construire une surjection de F sur E.

Soit $x, x' \in E$ tel que $\overline{\varphi}(x) = \overline{\varphi}(x')$, donc $\varphi(x) = \varphi(x')$.
Et comme φ est injective : on a $x = x'$. Et donc $\overline{\varphi}$ hérite de la propriété d'injectivité.
Par ailleurs, $\overline{\varphi}(E) = \varphi(E)$, qui est l'ensemble d'arrivée de $\overline{\varphi}$. Donc $\overline{\varphi}$ est surjective. /0,5

$$\boxed{\text{Donc } \overline{\varphi} \text{ est une bijection de } E \text{ sur } \varphi(E).}$$

Notons ψ la fonction réciproque de $\overline{\varphi}$, définie sur $\varphi(E)$.
Soit $a \in E$ et $G = C_F(\varphi(E))$, le complémentaire de $\varphi(E)$ dans F.
Considérons ensuite $\theta : F \to E$, $x \mapsto \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \in f(E) \\ a & \text{si } x \in G \end{cases}$.
Alors θ est bien définie car tout élément de $F = f(E) \uplus G$.
et pour tout $x \in E$, $\theta(\underbrace{\varphi(x)}_{\in\varphi(E)}) = \psi(\varphi(x)) = x$, donc $x \in E$ admet (au moins) un antécédent $\varphi(x)$ par θ. /1

$$\boxed{\text{Donc } \theta \text{ est bien définie, c'est une surjection de } F \text{ sur } E.}$$

(b) On suppose qu'il existe $\psi : E \twoheadrightarrow F$ surjective.
Montrer que pour tout $x \in F$, $\psi^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset$. En déduire la construction d'une injection de F sur E.

Puisque ψ est surjective, toute élément de F admet au moins un antécédent, donc /0,5

$$\boxed{\forall\, x \in F,\ \psi^{-1}(\{x\}) \neq \emptyset}$$

Notons, pour tout $x \in F$, $\theta(x)$ un élément de l'ensemble $\psi^{-1}(\{x\})$. C'est un élément de E.
Puis considérons $\theta : F \to E$, $x \mapsto \theta(x)$.
La fonction est parfaitement définie. Et par ailleurs, si $x \neq x'$, sont deux éléments de F.
Alors on ne peut avoir $a \in E$ tel que $\psi(a) = x$ et $\psi(a) = x'$, donc $\psi^{-1}(\{x\}) \cap \psi^{-1}(\{x'\}) = \emptyset$.
Et donc $\theta(x) \neq \theta(x')$ (puisqu'ils sont dans des sous-ensembles disjoints de E).
Par conséquent, la fonction θ est injective. /1

$$\boxed{\text{Donc } \theta \text{ est bien définie, c'est une injection de } F \text{ sur } E.}$$

.3. On cherche à montrer le théorème de Cantor-Bernstein :

« Si il existe $\varphi_1 : E \hookrightarrow F$ et $\varphi_2 : F \hookrightarrow E$ injectives, alors il existe une bijection de E sur F. »

On considère A une partie quelconque de E et $\psi : E \to A$ injective. On note $A' = \psi(E)$ et $B_0 = E \setminus A$.

(a) On définie, par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B_k = \psi(B_{k-1})$. Enfin, on définie $B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i$.

Décrire avec quantificateur le fait que $x \in B$ et le fait que $x \notin B$.

$$\boxed{x \in B \iff x \in \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \iff \exists\, i \in \mathbb{N} \text{ tel que } x \in B_i}$$

/1

$$\boxed{x \notin B \iff x \notin \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B_i \iff \forall\, i \in \mathbb{N}, x \notin B_i}$$

(b) On définit $\theta : E \to A$, $x \mapsto \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \in B \\ x & \text{si } x \notin B \end{cases}$.

Montrer que θ est bien définie.

Si $x \in B$, alors $\theta(x) = \psi(x)$. Or $\psi(E) = A' \subset A$ et $x \in E$, donc on a bien $\theta(x) = \psi(x) \in A$.
Si $x \notin B$, alors $\forall\, i \in \mathbb{N}$, $x \notin B_i$. En particulier, $x \notin B_0 = E \setminus A$, donc $\theta(x) = x \in A$.
Dans tous les cas $\theta(x) \in A$, pour le reste, il n'y a pas de soucis de définition : /1

$$\boxed{\theta \text{ est bien définie.}}$$

(c) Montrer que θ est injective

Si $\theta(x_1) = \theta(x_2)$.
Ou bien, x_1 et x_2 sont tous les deux dans B, alors on a $\psi(x_1) = \theta(x_1) = \theta(x_2) = \psi(x_2)$.
Mais ψ est injective donc $x_1 = x_2$.
Ou bien x_1 et x_2 ne sont ni l'un ni l'autre dans B et donc $x_1 = \theta(x_1) = \theta(x_2) = x_2$.
Ou bien, sans perte de généralité, on peut supposer $x_1 \in B$ et $x_2 \notin B$.
Donc il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $x_1 \in B_i$.
Donc $x_2 = \theta(x_2) = \theta(x_1) = \psi(x_1)$, donc $x_2 \in \psi(B_i) = B_{i+1} \subset B$. Impossible.
Ainsi, ce troisième cas n'est pas possible
et les deux autres conduisent à $x_1 = x_2$. /1,5

$$\boxed{\theta \text{ est donc injective.}}$$

(d) Montrer que θ est surjective.

Soit $y \in A$.
Ou bien $y \notin B$ et donc $\theta(y) = y$. y admet un antécédent par θ (lui-même).
Ou bien $y \in B$, et donc il existe i tel que $y \in B_i$.
Si $i \geqslant 1$, $B_i = \psi(B_{i-1})$ et donc $\exists\, x \in B_{i-1} \subset B$ tel que $y = \psi(x) = \theta(x)$.
Si $i = 0$, alors $y \in E \setminus A$. Mais $y \in A$. Ceci est donc impossible.
Donc y admet un antécédent par θ. /1,5

$$\boxed{\theta \text{ est surjective.}}$$

(e) Conclure

On reprend les hypothèses avec $\varphi_1 : E \hookrightarrow F$ et $\varphi_2 : F \hookrightarrow E$.
Notons $A = \varphi_2(F) \subset E$ et $\psi : E \to A$, $x \mapsto \varphi_2 \circ \varphi_1$.
Par composition de deux applications injectives, ψ est injective (cours).
On peut donc alors construire une bijection (θ), de E sur A ($\subset E$, quelconque non nécessairement égale à $\psi(E)$).
L'application $\overline{\varphi_2} : F \to A$, $x \to \varphi_2(x)$ est injective (par restriction de l'application injective φ_2)
et est surjective par définition de $A = \varphi_2(E)$. Elle est donc bijective.
On peut donc définir : $E \to F$, $x \mapsto (\overline{\varphi_2})^{-1} \circ \theta^{-1}(x)$. Elle est bijective de E sur F. /2,5

$$\boxed{\text{On a démontré le théorème de Cantor-Bernstein : il existe une bijection de } E \text{ sur } F.}$$

Problème 2 - Exponentielle sous forme de somme

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ (sauf en questions 1.(c)).

On note $T_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$. On considère également $f_n : x \mapsto e^{-x} \times T_n(x)$.

.1. Etude de la fonction T_n.

(a) Pourquoi T_n est dérivable ? Exprimer simplement T_n' en fonction des $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

$\boxed{T_n \text{ est une fonction polynomiale, donc dérivable sur } \mathbb{R}.}$

On a alors, par dérivation d'une combinaison linéaire : /1

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R},\ T_n'(x) = 0 + \sum_{k=1}^{n} k \times \frac{x^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{x^h}{h!} = T_{n-1}(x)}$$

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $T_n(x) \geqslant 1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x^n \geqslant 0$, donc par addition de nombre positif : $\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \geqslant 0$.

Enfin, en ajoutant 1 : /0,5

$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}_+,\ T_n(x) \geqslant 1.}$

(c) Montrer, par récurrence, que
— si $n = 2m$ est pair alors T_{2m} est positif sur $\mathbb{R}$.
— si $n = 2m+1$ est impair, alors T_{2m+1} admet une unique racine notée α_m

---

La question n'est pas triviale. Soit on fait une récurrence à deux termes, soit on fait un distinction de cas.
Pour la correction, nous proposons cette seconde méthode.
Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$: « Si $n = 2m$ alors T_{2m} est positif sur $\mathbb{R}$, si $n = 2m+1$ alors T_{2m+1} est négatif sur $]-\infty, \alpha_m]$ puis positif sur $[\alpha_m, +\infty[$. ».
— $T_0 = 1$. C'est un polynôme strictement positif. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
— Nous allons démontrer $\mathcal{P}_1$, mais ce n'est pas nécessaire.
  $T_1 : x \mapsto 1 + x$, c'est un polynôme qui admet une unique racine $\alpha_0 = -1$.
— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
  - Supposons que n est pair, il peut s'écrire $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$.
    Comme $\mathcal{P}_n$ est vraie et n pair, alors T_n est positif sur $\mathbb{R}$.
    Puis comme $T_{n+1}' = T_n$ d'après la question 1.(a), alors T_{n+1} est strictement croissant sur $\mathbb{R}$.
    Par ailleurs, $T_{n+1}(0) = 1$ et $T_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\left(1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{n!x^{n+1-k}}\right)$.
    alors $\frac{(n+1)!}{n!x^{n+1-k}} \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ et par addition finie : $\left(1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+1)!}{n!x^{n+1-k}}\right) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 1$ et donc $T_{n+1}(x)) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
    Par le théorème des valeurs intermédiaires : il existe $\alpha_m \in \mathbb{R}_-$ tel que $T_{n+1}(\alpha_m) = T_{2m+1}(\alpha_m) = 0$.
  - Supposons que n est impair, il peut s'écrire $n = 2m+1$ avec $m \in \mathbb{N}$.
    Comme $\mathcal{P}_n$ est vraie et $n = 2m+1$ impair, alors T_n est négatif sur $]-\infty, \alpha_m]$ puis positif sur $[\alpha_m, +\infty[$.
    Or $T_{n+1}' = T_n$. Donc T_{n+1} est décroissante sur $]-\infty, \alpha_m]$ et croissante sur $[\alpha_m, +\infty[$.
    Notons par ailleurs que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $T_{n+1}(x) = T_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
    Or α_m racine de T_n, donc $T_{n+1}(\alpha_m) = \frac{(\alpha_m)^{2m+2}}{(2m+2)!} > 0$.
    Par conséquent, le point minimal de T_{n+1} est positif, et donc T_{n+1} est positif sur $\mathbb{R}$.

  Ainsi, dans tous les cas (n pair ou impair), on a l'hérédité : $\mathcal{P}_n \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$.

La récurrence est démontrée : /2,5

- si $n = 2m$ est pair alors T_{2m} est positif sur $\mathbb{R}$.
- si $n = 2m+1$ est impair, alors T_{2m+1} admet une unique racine notée α_m

---

(d) Montrer que $(\alpha_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $m \in \mathbb{N}$, $T_{2m+3}(x) = T_{2m+1}(x) + \frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!} + \frac{x^{2m+3}}{(2m+3)!}$.
On rappelle que α_m est la racine de T_{2m+1} et α_{m+1} est celle de T_{2m+3}.
On rappelle également que pour tout $x \geqslant \alpha_m$ $T_{2m+1}(x) \geqslant 0$ et tout $x \leqslant \alpha_m$, $T_{2m+1}(x) \leqslant 0$.

On a donc l'équivalence : $x \leqslant \alpha_m \iff x \leqslant \alpha_m$.

On a alors

$$T_{2m+3}(\alpha_m) = T_{2m+1}(\alpha_m) + \frac{(\alpha_m)^{2m+2}}{(2m+2)!} + \frac{(\alpha_m)^{2m+3}}{(2m+3)!} = 0 + \frac{(\alpha_m)^{2m+2}}{(2m+3)!}\left((2m+3)+\alpha_m\right)$$

Or

$$T_{2m+1}(-(2m+3)) = \sum_{k=0}^{2m+1} \frac{(-(2m+3))^k}{k!} = \sum_{h=0}^{m}\left(\frac{(-2m-3)^{2h}}{(2h)!} + \frac{(-2m-3)^{2h+1}}{(2h+1)!}\right) = \sum_{h=0}^{m} \underbrace{\frac{(2m+3)^{2h}}{(2h+1)!}}_{\geqslant 0} \underbrace{(2h+1-2m-3)}_{<0}$$

Donc $T_{2m+1}(-(2m+3)) < 0$,

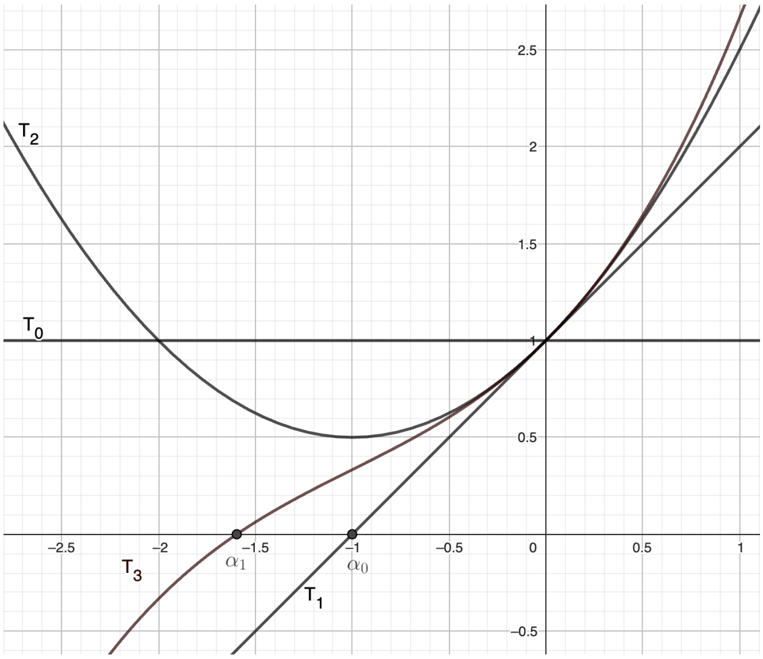
donc d'après la remarque préliminaire : $-(2m+3) < \alpha_m$ et donc $\alpha_m + 2m + 3 > 0$.

Par conséquent $T_{2m+3}(\alpha_m) > 0$.

Et d'après la remarque (mais pour T_{2m+3}) cela signifie que $\alpha_m > \alpha_{m+1}$. /2

$$\boxed{\text{La suite } (\alpha_m) \text{ est donc décroissante.}}$$

(e) Représenter sur le graphe 1 donné avec l'énoncé les représentations de $y = T_0(x)$, $y = T_1(x)$, $y = T_2(x)$ et $y = T_3(x)$. Représenter également α_0 et α_1.
(En fait $T_0(x) = 1$ n'est pas vraiment défini).



/1,5

.2. Convergence de $(T_n(x))_n$. Etude de f_n.

(a) Pourquoi la fonction f_n est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

---

f_n est le produit de la fonction $x \mapsto \exp(-x)$, une fonction exponentielle dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la fonction polynomiale T_n, dérivable sur $\mathbb{R}$ également.
Le produit de deux fonctions dérivables est dérivable. /0,5

$$\boxed{\text{Donc } f_n \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = -\dfrac{x^n}{n!}e^{-x}$.

On a alors (dérivation d'un produit) :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f_n'(x) = -e^{-x}T_n(x) + e^{-x}T_n'(x) = e^{-x}\left(-T_n(x) + T_{n-1}(x)\right)$$

Et donc d'après la question 1.(a) : /1

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) = -\frac{x^n}{n!}e^{-x}.}$$

(c) Considérons deux réels x_1 et x_2 tels que : $x_1 < 0 < x_2 < n$.
Montrer, en étudiant les variations de f_n' sur $[x_1, 0]$ et sur $[0, x_2]$ que pour tout $u \in [x_1, 0]$, $|f_n'(u)| \leqslant \frac{|x_1|^n}{n!}e^{-x_1}$ et pour tout $u \in [0, x_2]$, $|f_n'(u)| \leqslant \frac{x_2^n}{n!}e^{-x_2}$

La fonction f_n' est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[x_1, 0]$ et sur $[0, x_2]$.

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \qquad f_n''(x) = -\frac{nx^{n-1}}{n!}e^{-x} + \frac{x^n}{n!}e^{-x} = e^{-x}\left(\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right) = \underbrace{e^{-x}}_{\geqslant 0}\frac{x^{n-1}}{n!}\underbrace{(x-n)}_{\leqslant 0}$$

La fonction f_n'' ne peut s'annuler en changeant de signe qu'en $x = n$ et $x = 0$ (si n pair).

- Etudions d'abord le cas de l'intervalle $[x_1, 0]$.
  Alors $f_n''(x)$ est négatif sur $[x_1, 0]$ (si $n-1$ est pair donc n impair) et est négatif sur $[x_1, 0]$ (si n pair).
  Ainsi, f_n' est décroissante sur $[x_1, 0]$ si n impair et croissante sur $[x_1, 0]$ si n pair.
  Puis comme $f_n'(0) = 0$ et $f_n'(x_1) = -\frac{x_1^n}{n!}e^{-x_1}$,
  on a pour tout $x \in [x_1, 0]$: $-\frac{x_1^n}{n!}e^{x_1} \geqslant f_n'(x) \geqslant 0$ si n impair et $-\frac{x_1^n}{n!}e^{x_1} \leqslant f_n'(x) \leqslant 0$ si n pair.
  Dans tous les cas : /1,5

$$\boxed{\forall\ x \in [x_1, 0],\ \left|f_n'(x)\right| \leqslant \frac{|x_1|^n}{n!}e^{-x_1}}$$

- Etudions le cas de l'intervalle $[0, x_2]$ (on rappelle que $n > x_2$).
  Dans tous les cas $f_n''(x) \leqslant 0$ sur $[0, x_2]$, donc f_n' est décroissante sur $[0, x_2]$.
  Donc pour tout $x \in [0, x_2]$, $0 = f_n'(0) \geqslant f_n'(x) \geqslant f_n'(x_2) = -\frac{x_2^n}{n!}e^{-x_2}$. /1

$$\boxed{\forall\ x \in [0, x_2],\ \left|f_n'(x)\right| \leqslant \frac{|x_2|^n}{n!}e^{-x_2}}$$

(d) On admet l'inégalité des accroissements finis, pour tout $a < b \in \mathbb{R}$:
« pour φ continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, et $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall\ u \in]a, b[, |\varphi'(u)| \leqslant k$ alors $|\varphi(b) - \varphi(a)| \leqslant k \times |b - a|$ »
En déduire, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé et tout entier $n > \lfloor x \rfloor + 1$:

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| = |1 - f_n(x)| \times e^x \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n!}$$

Notons d'abord :

$$e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} = e^x\left(1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right) = e^x\left(1 - f_n(x)\right) = e^x\left(f_n(0) - f_n(x)\right)$$

Appliquons ensuite l'inégalité des accroissements finis, dans le cas $x < 0$, avec $a \leftarrow x$ et $b \leftarrow 0$, $\varphi \leftarrow f_n$:
D'après la question précédente, $\forall\ u \in [x, 0]$, $|f_n'(u)| \leqslant \frac{e^{-x}}{n!}|x|^n$, donc

$$|f_n(x) - f_n(0)| \leqslant \frac{e^{-x}}{n!}|x|^n \times |0 - x| = \frac{e^{-x}}{n!}|x|^{n+1}$$

Appliquons enfin l'inégalité des accroissements finis, dans le cas $x > 0$, avec $a \leftarrow 0$ et $b \leftarrow x$, $\varphi \leftarrow f_n$:
D'après la question précédente, $\forall\ u \in [0, x]$, $|f_n'(u)| \leqslant \frac{e^{-x}}{n!}|x|^n$, donc

$$|f_n(x) - f_n(0)| \leqslant \frac{e^{-x}}{n!}|x|^n \times |x - 0| = \frac{e^{-x}}{n!}|x|^{n+1}$$

Donc /1,5

$$\boxed{\left|e^x - \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| = |f_n(0) - f_n(x)| \times e^x \leqslant \frac{e^{-x}|x|^{n+1}}{n!}e^x = \frac{|x|^{n+1}}{n!}}$$

(e) On insiste : x est fixé. On note $v_n = \frac{|x|^{n+1}}{n!}$.
Evaluer $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, en déduire qu'il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $v_n \leqslant \frac{1}{2^{n-N}}v_N$.
Quelle est la limite de (v_n) pour $n \to +\infty$?

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{|x|^{n+2}}{(n+1)!}\frac{n!}{|x|^{n+1}} = \frac{|x|}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc il existe un entier N tel que pour tout $n \geqslant N$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$.
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, v_n est positif, on a par telescopage, pour tout $n > N$,

$$\frac{v_n}{v_N} = \prod_{k=N}^{n-1} \frac{v_{k+1}}{v_k} \leqslant \prod_{k=N}^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{n-1-N+1}} = \frac{1}{2^{n-N}}$$

Ainsi, puisque $v_N \geqslant 0$, /2

$$\boxed{v_n \leqslant \frac{1}{2^{n-N}} v_N \text{ et par comparaison : } (v_n) \to 0}$$

(f) En déduire la valeur de la limite de $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!} \right)_{n\in\mathbb{N}}$, limite que l'on notera $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Par encadrement, puisque $\dfrac{|x|^{n+1}}{n!}$ converge vers 0,

$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^n}{n!} \right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } e^x}$$

Ce résultat est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$ (la convergence est assurée à partir du rang $n \geqslant \lfloor x \rfloor$). /1

Problème 3 - $a^b = b^a$

Dans tout le problème, on considère $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$.

.1. Etude de f.

(a) Quel est l'ensemble de définition et de dérivation de f ?

$$\boxed{\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0, x \neq 0\} = \mathbb{R}_+^*}$$

f est la division de deux fonctions dérivables sur leur ensemble de définition, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$. /0,5

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

(b) Etudier les variations de f, ainsi que les limites en 0^+ et $+\infty$.

On a alors, pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.
On a alors les équivalences (pour $x > 0$) :

$$f'(x) \geqslant 0 \iff 1 - \ln x \geqslant 0 \iff 1 \geqslant \ln x \iff x \leqslant e^1 = e \qquad \text{par croissance de exp.}$$

Ensuite : $f(e) = \dfrac{\ln(e)}{e} = \dfrac{1}{e}$.
Enfin, il n'y a pas de forme indéterminée (pour $x \to 0$) : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.
alors que pour $x \to +\infty$, il y a a priori une forme indéterminée, mais elle est levé dans le cours : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.
Tout ceci se résume dans le tableau de variation suivant : /1,5

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

(c) Tracer $y = f(x)$ sur le graphe donné dans l'énoncé. (On fera apparaitre toutes les informations graphiques trouvées dans la question précédentes).

Voir le graphe à la fin /1

(d) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Donner le nombre de solution de l'équation $x = e^{\lambda x}$ notée (E_λ), en fonction de la valeurs de λ, préciser également dans quel intervalle se trouvent ces solutions / se trouve cette solution.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{\lambda x} > 0$, donc si x est solution de (E_λ), nécessairement $x > 0$.
Considérons donc $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a les équivalences (en composant par ln injective sur $\mathbb{R}_+^*$) :

$$x = e^{\lambda x} \iff \ln x = \lambda x \iff f(x) = \lambda$$

Or les questions précédentes permettent de connaitre l'image par f de $\mathbb{R}_+^*$: $f(\mathbb{R}_+^*) =]-\infty, \dfrac{1}{e}]$.

- Par ailleurs, la fonction f est continue et strictement croissante de $]0, e]$ sur $]-\infty, \dfrac{1}{e}]$,
  elle établit donc une bijection de $]0, e]$ sur $]-\infty, \dfrac{1}{e}]$,
  donc $\forall\ \lambda \in]-\infty, \dfrac{1}{e}]$, $\exists\ !x \in]0, e]$ tel que $f(x) = \lambda$ donc tel que $x = e^{\lambda x}$.

Par ailleurs, notons que $f(1) = 0$.

- Par ailleurs, la fonction f est continue et strictement décroissante de $[e, +\infty[$ sur $]0, \dfrac{1}{e}]$,
  elle établit donc une bijection de $[e, +\infty[$ sur $]0, \dfrac{1}{e}]$,
  donc $\forall\ \lambda \in]0, \dfrac{1}{e}]$, $\exists\ !x \in [e, +\infty[$ tel que $f(x) = \lambda$ donc tel que $x = e^{\lambda x}$.

On peut faire un bilan : /1,5

$\forall\ \lambda \in]-\infty, 0]$, l'équation (E_λ) admet une unique solution, elle se trouve dans $]0, 1]$.
$\forall\ \lambda \in]-0, \dfrac{1}{e}[$, l'équation (E_λ) admet deux solutions, l'une est dans $]1, e[$, l'autre dans $]e, +\infty[$.
Pour $\lambda = \dfrac{1}{e}$, l'équation (E_λ) admet une unique solution : $x = e$.
$\forall\ \lambda \in]\dfrac{1}{e}, +\infty[$, l'équation (E_λ) n'admet aucune solution.

.2. Equation $a^b = b^a$.

(a) Montrer l'équivalence, pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$: $a^b = b^a \iff f(a) = f(b)$

Soient $a, b > 0$. On a les équivalences (en composant par ln injective) :

$$a^b = b^a \iff b \ln a = a \ln b \iff \frac{\ln a}{a} = \frac{\ln b}{b} \iff f(a) = f(b)$$

/0,5

$$\boxed{\text{Pour tout } a, b \in \mathbb{R}_+^* : a^b = b^a \iff f(a) = f(b).}$$

(b) En déduire deux intervalles, les plus grands possible, I et J disjoints tel qu'on puisse affirmer $\forall\ a \in I$, $\exists\ !b \in J$ tel que $a^b = b^a$.

Pour que $a^b = b^a$, il faut et il suffit donc qu'il existe un même $\lambda \in \mathbb{R}$ image identique par f de a et de b.
Cela nécessite donc que (E_λ) admette deux racines distinctes. Et cela est suffisant.
Or d'après l'étude 1.(d), cela nécessite donc que $\lambda \in]0, \frac{1}{e}[$ et dans ce cas $a \in]1, e[$ et $b \in]e, +\infty[$.
On peut donc prendre $I =]1, e[$ et $J =]e, +\infty[$ (ou l'interversion).
Il n'est pas possible de prendre des intervalles plus grand d'après 1.(d). /1

$$\boxed{\text{Avec } I =]1, e[\text{ et } J =]e, +\infty[, \text{ on peut affirmer : } \forall\ a \in I, \exists\ !b \in J \text{ tel que } a^b = b^a.}$$

(c) Démontrer qu'il existe une unique solution entière (i.e. $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$) tel que $a^b = b^a$ et $a < b$.

Pour cette solution, on peut considérer $a \in I$, mais a est également entier. Donc $a \in]1, e[\cap \mathbb{Z} = \{2\}$.
Donc nécessairement $a = 2$. Il y a au plus un seul couple d'entiers (a, b) qui répond à a question.
Il existe un unique nombre b, peut-être non entier, tel que $b^2 = 2^b$.

Essayons par un processus comparable à de la dichotomie d'encadrer b.
Par exemple $3^2 = 9$, alors que $2^3 = 8$. Il faut donc choisir un nombre plus grand que 3.
Par exemple $5^2 = 25$, alors que $2^5 = 32$. Il faut donc choisir un nombre plus petit que 5.
Enfin : $2^4 = 16 = 4^2$. /1,5

$$\boxed{\text{Il existe une unique solution d'entiers } (a, b) \text{ tel que } a^b = b^a \text{ et } a < b : \text{c'est } a = 2 \text{ et } b = 4.}$$

(d) Comparer $10\,000^{10\,001}$ et $10\,001^{10\,000}$.

Au hasard, écrivons des équivalences. Par croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$10\,000^{10\,001} < 10\,001^{10\,000} \iff 10\,001 \ln(10\,000) < 10\,000 \ln(10\,001) \iff f(10\,000) < f(10\,001)$$

Or la fonction f est décroissante sur $]e, +\infty[$.
Donc cette dernière inégalité est fausse. Par équivalence : /1

$$\boxed{10\,001^{10\,000} < 10\,000^{10\,001}}$$

.3. Fonctions réciproques.

(a) Montrer que $f_1 :]1, e] \to]0, \frac{1}{e}]$, $x \mapsto f(x)$ est une application bijective.
On note f_1^{-1}, la fonction réciproque.

Comme en 1.(d) que f_1 est bijective car elle est continue et strictement croissante de $]1, e]$ à valeurs dans $]\lim_1 f, f(e)] =]0, \frac{1}{e}]$. /0,5

$$\boxed{f_1 :]1, e] \to [0, \frac{1}{e}], x \mapsto f(x) \text{ est une application bijective.}}$$

(b) Montrer que $f_2 : [e, +\infty[\to]0, \frac{1}{e}]$, $x \mapsto f(x)$ est une application bijective.
On note f_2^{-1}, la fonction réciproque.

Comme en 1.(d) que f_2 est bijective car elle est continue et strictement décroissante de $[e, +\infty[$ dans $]\lim_{+\infty} f, f(e)] =]0, \frac{1}{e}]$. /0,5

$$\boxed{f_2 : [e, +\infty[\to [0, \frac{1}{e}], x \mapsto f(x) \text{ est une application bijective.}}$$

(c) Montrer que f_1^{-1} et f_2^{-1} sont des fonctions dérivables sur $]0, \frac{1}{e}[$.
Exprimer pour tout $x \in]1, e[$, $\left(f_1^{-1}\right)'(x)$, à l'aide de $f_1^{-1}(x)$.
Exprimer pour tout $x \in]e, +\infty[$, $\left(f_2^{-1}\right)'(x)$, à l'aide de $f_2^{-1}(x)$.

Pour connaitre l'ensemble de dérivation d'une fonction réciproque, il faut étudier les racines de la dérivée de la fonction initiale.
$f_1' : x \mapsto \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Elle s'annule en $x = e$. Donc f_1^{-1} n'est pas dérivable en $y = f_1(e) = \frac{1}{e}$.
Elle est dérivable par ailleurs, donc sur $\left]0, \frac{1}{e}\right] \setminus \left\{\frac{1}{e}\right\} = \left]0, \frac{1}{e}\right[=]0, e^{-1}[$.

$$\boxed{\text{Et pour tout } x \in]0, e^{-1}[\,:\, \left(f_1^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f_1'(f_1^{-1}(x))} = \frac{[f_1^{-1}(x)]^2}{1 - \ln(f_1^{-1}(x))}.}$$

De même, comme $f_2' : x \mapsto \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Elle s'annule en $x = e$. Donc f_2^{-1} n'est pas dérivable en $y = f_2(e) = \frac{1}{e}$.
Elle est dérivable par ailleurs, donc sur $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[\setminus \left\{\frac{1}{e}\right\} = \left]0, \frac{1}{e}\right[=]0, e^{-1}[$. /2

$$\boxed{\text{Et pour tout } x \in]0, e^{-1}[\,:\, \left(f_2^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f_2'(f_2^{-1}(x))} = \frac{[f_2^{-1}(x)]^2}{1 - \ln(f_2^{-1}(x))}.}$$

(d) Sur le même graphique que précédemment, représenter les fonctions f_1^{-1} et f_2^{-1}
(On fera apparaitre toutes les informations graphiques connues).

Voir le graphe à la fin /2

.4. $a \to b$?

(a) Montrer que l'équivalence :
$a^b = b^a$ et $a \neq b \Longleftrightarrow b = f_2^{-1} \circ f_1(a)$ ou $b = f_1^{-1} \circ f_2(a)$.

On exploite les résultats de la question 2.(b).
On a les équivalences :

$$a^b = b^a \text{ et } a \neq b \Longleftrightarrow f(a) = f(b) \text{ et } (a \in I, b \in J \text{ ou } a \in J, b \in I)$$

Dans le cas où $a \in I$ et $b \in J$, avec $f(a) = f(b)$, on a en exploitant les fonctions définies plus haut :
$f(a) = f_1(a)$ et $f(b) = f_2(b)$, donc $f_1(a) = f_2(b)$, ou encore $b = (f_2^{-1} \circ f_1)(a)$.
Dans le cas où $a \in J$ et $b \in I$, avec $f(a) = f(b)$, on a en exploitant les fonctions définies plus haut :
$f(a) = f_2(a)$ et $f(b) = f_1(b)$, donc $f_2(a) = f_1(b)$, ou encore $b = (f_1^{-1} \circ f_2)(a)$.
Finalement : /1

$$\boxed{a^b = b^a \text{ et } a \neq b \Longleftrightarrow b = f_2^{-1} \circ f_1(a) \text{ (cas } a \in I, b \in J) \text{ ou } b = f_1^{-1} \circ f_2(a) \text{ (cas } a \in J, b \in I)}$$

(b) On note $\theta :]1, +\infty[\to]1, +\infty[$, $x \mapsto \begin{cases} f_2^{-1} \circ f_1(x) & \text{si } x \in]1, e[\\ e & \text{si } x = e \\ f_1^{-1} \circ f_2(x) & \text{si } x \in]e, +\infty[\end{cases}$
Montrer que θ est une involution (i.e. $\theta \circ \theta = \mathrm{id}_{]1,+\infty[}$)

- Si $x \in]1, e[$, alors $\theta(x) = f_2^{-1}(f_1(x)) \in]e, +\infty[$ car $f_2 : [e, +\infty[\to]0, e^{-1}]$, donc $f_2^{-1} :]0, e^{-1}] \to [e, +\infty[$.
  et par ailleurs, $f_2^{-1}(f_1(x)) \neq e$, sinon, cela signifierait que $f_1(x) = e^{-1}$ et donc $x = e$.
  et donc par associativité de la loi $\circ$

$$\theta(\theta(x)) = \left(f_1^{-1} \circ f_2\right) \circ \left(f_2^{-1} \circ f_1\right)(x) = [f_1^{-1}(f_2 \circ f_2^{-1})f_1](x) = f_1^{-1} \circ f_1(x) = x$$

- Si $x = e$, alors $\theta(\theta(e)) = \theta(e) = e$.
- Si $x \in]e, +\infty[$, alors $\theta(x) = f_1^{-1}(f_2(x)) \in]1, e[$ car $f_1 :]1, e] \to]0, e^{-1}]$, donc $f_2^{-1} :]0, e^{-1}] \to]1, e]$.
  et par ailleurs, $f_1^{-1}(f_2(x)) \neq e$, sinon, cela signifierait que $f_2(x) = e^{-1}$ et donc $x = e$.
  et donc par associativité de la loi $\circ$

$$\theta(\theta(x)) = \left(f_1^{-1} \circ f_2\right) \circ \left(f_2^{-1} \circ f_1\right)(x) = [f_1^{-1}(f_2 \circ f_2^{-1})f_1](x) = f_1^{-1} \circ f_1(x) = x$$

Ainsi /1

$$\boxed{\forall\, x \in]1, +\infty[,\ \theta(\theta(x)) = x, \text{ donc } \theta \circ \theta = \mathrm{id}_{]1,+\infty[}, \text{ i.e. } \theta \text{ est une involution.}}$$

(c) Montrer que θ est continue sur $]1,+\infty[$.

Les applications f_1, f_2 et aussi f_1^{-1} et f_2^{-1} sont continues sur leur ensemble de définition,
donc θ est bien continue sur $]1,e[$ et sur $]e,+\infty[$.
Ensuite, par continuité de ces fonctions (ou composition des limites) :

$$\lim_{t \xrightarrow{<} e} \theta(t) = \lim_{t \xrightarrow{<} e} f_2^{-1}(f_1(t)) = \lim_{u \xrightarrow{>} \frac{1}{e}} f_2^{-1}(u) = e$$

$$\lim_{t \xrightarrow{>} e} \theta(t) = \lim_{t \xrightarrow{>} e} f_1^{-1}(f_2(t)) = \lim_{u \xrightarrow{<} \frac{1}{e}} f_1^{-1}(u) = e$$

Ainsi, θ est également continue en e avec pour valeur $\theta(e) = e$. /1,5

$$\boxed{\text{Donc } \theta \text{ est continue sur }]1,+\infty[.}$$

(d) θ est-elle dérivable sur $]1,+\infty[$?

Avec le théorème du cours, comme nous l'avons pour le moment, nous ne pouvons écrire que :
Par composition de fonctions dérivables $f_2^{-1} \circ f_1$ n'est pas dérivable en e,
car f_2^{-1} n'est pas dérivable en $\frac{1}{e}$ et que $f_1(e) = \frac{1}{e}$. /1,5

$$\boxed{\text{Donc } \theta \text{ n'est } \textit{a priori} \text{ pas dérivable en } e, \text{ donc non dérivable sur }]1,+\infty[.}$$

En revanche (ce n'est pas demandé), θ est dérivable par composition sur $]1,e[$ et sur $]e,+\infty[$.
On trouve alors, par exemple pour $x \in]1,e[$,

$$\theta'(x) = f_1'(x) \times (f_2^{-1})'(f_1(x)) = \frac{1-\ln x}{x^2} \frac{\theta^2(x)}{1-\ln(\theta(x))}$$

Mais alors, pour $x \to e^-$, $\theta(x) \to e^+$, donc $\frac{\theta^2(x)}{x^2} \to 1$ mais $\frac{1-\ln x}{1-\ln(\theta(x))} \to -1$. Donc $\theta'(x) \underset{x\to e^-}{\longrightarrow} -1$.
Et de même (en inversant $1 \leftrightarrow 2$) : $\theta'(x) \underset{x\to e^+}{\longrightarrow} -1$.
On verra un théorème, qui n'est pas un théorème de prolongement de la dérivée, qu'ainsi θ est en réalité dérivable en e et de dérivée égale à $\theta'(e) = -1$.

(e) Représenter la courbe d'équation $y = \theta(x)$ sur le même graphe.

On ne connait pas formellement θ. On notera néanmoins que /3
— $\theta(e) = e$, avec une pente égale à -1,
— que θ est involutive donc égale à sa symétrique par rapport à l'axe $y = x$.
— que la courbe admet deux asymptote : $y = 1$ (pour $x \to +\infty$) et $x = 1$.