MPSI 3 - Fermat
2022-2023

Le 15.09.22

Devoir à la maison n°1
CORRECTION

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto x^{x-x^2}$ et $g : x \mapsto \ln x + \dfrac{1-x}{1-2x}$.

1. La fonction g est définie sur $\mathcal{D}_g = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0, 1-2x \neq 0\} =]0, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$.
   Elle est également dérivable sur ce même ensemble. Et pour tout $x \in \mathcal{D}_g$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{-(1-2x)-(-2)(1-x)}{(1-2x)^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{(1-2x)^2}$$

   On notera qu'il s'agit de l'addition de deux nombres positifs sur $\mathcal{D}_g$, donc g est croissante sur $]0, \frac{1}{2}[$ et sur $]\frac{1}{2}, +\infty[$.
   Par ailleurs :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 0} \frac{1-x}{1-2x} = 1 \text{ donc par addition : } \lim_{x\to 0^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{1-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}-2} = \frac{1}{2} \text{ donc par addition : } \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \ln x = -\ln 2 \text{ et } \lim_{x\to(\frac{1}{2})^-} \frac{1-x}{1-2x} = \lim_{x\to(\frac{1}{2})^-} \frac{\frac{1}{2}}{2(\frac{1}{2}-x)} = +\infty \text{ donc par addition : } \lim_{x\to(\frac{1}{2})^-} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \ln x = -\ln 2 \text{ et } \lim_{x\to(\frac{1}{2})^+} \frac{1-x}{1-2x} = \lim_{x\to(\frac{1}{2})^+} \frac{\frac{1}{2}}{-2(x-\frac{1}{2})} = -\infty \text{ donc par addition : } \lim_{x\to(\frac{1}{2})^+} g(x) = -\infty$$

   La fonction g est continue strictement croissante donc bijective de $]0, \frac{1}{2}[$ sur $]-\infty, +\infty[$,
   $0 \in]-\infty, +\infty[$, donc il existe un unique $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   La fonction g est continue strictement croissante donc bijective de $]\frac{1}{2}, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$,
   $0 \in]-\infty, +\infty[$, donc il existe un unique $\beta \in]\frac{1}{2}, +\infty[$ tel que $g(\beta) = 0$.
   Il ne peut y avoir d'autres racines sur $\mathbb{R}_+^*$. Enfin, on note que $g(1) = \ln 1 + \dfrac{0}{-1} = 0$, donc $\beta = 1$.
   On peut tout résumer dans le tableau de variations :

x	0		α		$\frac{1}{2}$		$\beta = 1$		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$+$		$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$	

2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Et pour tout $x > 0$, $f(x) = \exp\big((x-x^2)\ln x\big)$
   Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} (x-x^2)\ln x = -\infty$, donc par composition : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
   C'est une formule du cours : $\lim\limits_{x\to 0} (x-x^2)\ln x = \lim\limits_{x\to 0} x\ln x - \lim\limits_{x\to 0} x^2 \ln x = 0 - 0 = 0$. Par composition : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = e^0 = 1$.

$$\boxed{\text{On peut prolonger } f \text{ par continuité, en posant } f(0) = 1.}$$

3. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, c'est une composition de fonctions dérivables.
   $\forall\, x > 0$, $f'(x) = [(1-2x)\ln x + (1-x)]\exp\big((x-x^2)\ln x\big) = (1-2x) \times g(x) \times f(x)$.
   f est toujours positif, on a donc le tableau de signes suivant, qui se prolonge en tableau de variations de f :

x	0		α		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$(1-2x)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
f	1	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$	0

4. On se souvient que pour $u \in]-1,1[$, $1+u \leqslant e^u \leqslant \dfrac{1}{1-u}$.
Donc, en prenant $u=(x-x^2)\ln x$ qui tend bien vers 0 lorsque x tend vers 0,
pour x suffisamment proche de 0 et positif (après soustraction par 1 et division par x) :

$$\frac{(x-x^2)\ln x}{x} \leqslant \frac{e^{(x-x^2)\ln x}-1}{x} \leqslant \frac{(x-x^2)\ln x}{x(1-(x-x^2)\ln x)}$$

Donc :

$$(1-x)\ln x \leqslant \frac{f(x)-1}{x} \leqslant \frac{(1-x)\ln x}{(1-(x-x^2)\ln x)}$$

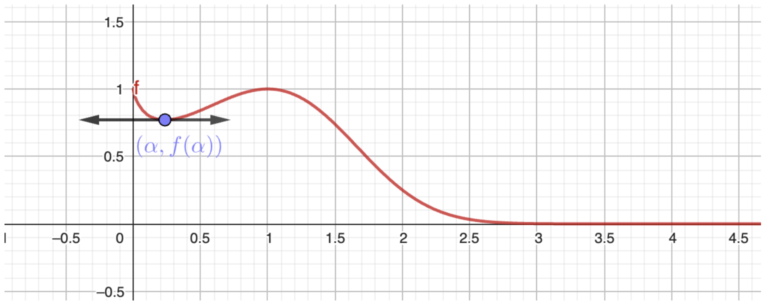
Or ces deux termes convergent vers $-\infty$ pour $x\to 0$.

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x}=-\infty}$$

Cela signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ présente une demi-tangente infinie, orientée vers le bas pour $x\to 0$ (et $f(x)\to 1$).
On aurait pu également noter que

$$\frac{f(x)-1}{x} = \underbrace{\frac{e^{(x-x^2)\ln x}-1}{(x-x^2)\ln x}}_{\underset{x\to 0}{\to}1,\text{ par composition}} \times \underbrace{\frac{(x-x^2)\ln x}{x}}_{\underset{x\to 0}{\to}-\infty,\text{ après simplification par } x}$$

5.



Exercice 2

On veut déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\ (a,b)\in\mathbb{R}^2, f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)} \qquad (\star)$$

1. th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x)=1-\mathrm{th}^2(x)=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}>0$.
Donc th est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante, donc

$$\boxed{\text{elle établit une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]\lim_{-\infty}\mathrm{th}, \lim_{+\infty}\mathrm{th}[=]-1,1[.}$$

Soit argth bijection réciproque.

2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{th}'(x)=\dfrac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}=\neq 0$.
Donc argth est dérivable sur son ensemble de définition : $]-1,1[$.
Et pour tout $x\in]-1,1[$,

$$\mathrm{argth}'(x)=\frac{1}{\mathrm{th}'(\mathrm{argth}(x))}=\frac{1}{1-\mathrm{th}^2(\mathrm{argth}(x))}=\frac{1}{1-x^2}$$

$$\boxed{\text{argth est dérivable sur }]-1,1[\text{ et pour tout } x\in]-1,1[,\ \mathrm{argth}'(x)=\frac{1}{1-x^2}.}$$

On considère une solution f de $(\star)$. - *Raisonnement par analyse*

3. Avec $a \leftarrow 0$ et $b \leftarrow 0$: $f(0) = \dfrac{2f(0)}{1+f(0)^2}$.

   Donc $f(0)[1+f(0)^2-2] = 0$, ainsi $f(0)[f(0)^2-1] = f(0)\times(f(0)-1)\times(f(0)+1) = 0$.

$$\boxed{\text{Les valeurs possibles pour } f(0) \text{ sont } -1,\ 0 \text{ et } 1.}$$

4. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 1$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f\big(a + (x-a)\big) = \frac{f(a)+f(x-a)}{1+f(a)f(x-a)} = \frac{1+f(x-a)}{1+f(x-a)} = 1$$

$$\boxed{\text{S'il existe } a \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(a) = 1, \text{ alors pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1.}$$

   De même : s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = -1$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f\big(a + (x-a)\big) = \frac{f(a)+f(x-a)}{1+f(a)f(x-a)} = \frac{-1+f(x-a)}{1-f(x-a)} = -1$$

$$\boxed{\text{S'il existe } a \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(a) = -1, \text{ alors pour tout } x \in \mathbb{R},\ f(x) = -1.}$$

On suppose par la suite que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq \pm 1$.

En particulier, puisque $f(0) \in \{-1, 0, 1\}$, on a nécessairement $f(0) = 0$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f\Big(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\Big) = \frac{2f\big(\frac{x}{2}\big)}{1+f\big(\frac{x}{2}\big)^2}$$

   Puis, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $(1-s)^2 \geqslant 0$, donc $1+s^2 \geqslant 2s$ ou encore : $\dfrac{2s}{1+s^2} \leqslant 1$, car $1+s^2 > 0$.

   de même $(1+s)^2 \geqslant 0$, donc $1+s^2 \geqslant -2s$ ou encore : $\dfrac{2s}{1+s^2} \geqslant -1$, car $1+s^2 > 0$

$$\boxed{\text{Donc nécessairement, en prenant } s = f(\tfrac{x}{2}), \text{ on a : } f(x) \in]-1,1[.}$$

6. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\frac{f(a)+f(h)}{1+f(a)f(h)} - f(a)\right) = \frac{f(h)(1-f(a)^2)}{h(1+f(a)f(h))} = \frac{f(h)}{h}\frac{1-f(a)^2}{1+f(a)f(h)}\\ &= \frac{f(h)}{h}\frac{1+f(a)f(h)-f(a)(f(h)+f(a))}{1+f(a)f(h)} = \frac{f(h)}{h}\left(1 - f(a)\times\frac{f(a)+f(h)}{1+f(a)f(h)}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Donc pour tout } a \in \mathbb{R},\ h \in \mathbb{R}^*,\ \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(h)}{h}(1-f(a+h)f(a)).}$$

   Faisons ensuite tendre h vers 0, comme par hypothèse f est dérivable, cela est possible :

$$\frac{f(h)}{h} = \frac{f(h)-f(0)}{h} \to f'(0)$$

   Et par continuité de f : $1-f(a+h)f(a) \to 1-f(a)^2$.

$$\boxed{\forall\, a \in \mathbb{R},\ f'(a) = f'(0)\times(1-f(a)^2)}$$

7. Soit g, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \operatorname{argth}(f(x))$.

   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-1,1[$ et argth est dérivable sur $]-1,1[$,

   donc par composition :

$$\boxed{g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$$

   et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = f'(x)\times\operatorname{argth}'(f(x)) = f'(x)\times\frac{1}{1-f(x)^2} = f'(0)\times(1-f(x)^2)\frac{1}{1-f(x)^2} = f'(0)$$

   Donc g' est une fonction constante.

   Ainsi, il existe $A(=f'(0))$ et $B \in \mathbb{R}$ tel que $g : x \mapsto Ax+B$.

   Si l'on compose par th la relation précédente :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = (\operatorname{th}\circ\operatorname{argth}\circ f)(x) = \operatorname{th}(g(x)) = \operatorname{th}(Ax+B)$$

Notons qu'il est nécessaire que $f'(0) = A$. Or avec cette écriture, on trouve :

$$f'(x) = A \times \left(1 - \text{th}^2(Ax + B)\right) \Rightarrow f'(0) = A \times (1 - \text{th}^2(B))$$

Il faut donc que $\text{th}(B) = 0$, donc $B = 0$. Nécessairement :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \text{th}(Ax)}$$

8. Réciproquement (synthèse). Soit $A \in \mathbb{R}$.
Considérons $f : x \mapsto \text{th}(Ax)$, alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$f(a + b) = \text{th}(Aa + Ab) = \frac{\text{th}(Aa) + \text{th}(Ab)}{1 + \text{th}(Aa)\text{th}(Ab)} = \frac{f(a) + f(b)}{1 + f(a)f(b)}$$

Les fonctions dérivables qui vérifient $(\star)$ sont exactement les applications : $x \mapsto \text{th}(Ax)$ où A est un réel quelconque.