Devoir à la maison n°1

La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.
A faire à deux !

Exercice 1

Soit $f : x \mapsto x^{x-x^2}$ et $g : x \mapsto \ln x + \dfrac{1-x}{1-2x}$.

1. En étudiant la fonction g (on commencera par l'ensemble de définition), montrer que g s'annule exactement deux fois sur $]0,+\infty[$ en deux points $\alpha < \beta$. Sachant que β est un nombre simple, que vaut-il ?
   On donne pour la suite $\alpha \approx 0,25$
2. Déterminer le domaine de définition de f et ses limites aux bornes.
   Peut-on prolonger f par continuité ? (C'est-à-dire : est-ce qu'il existe deux nombres réels a, b tel que $a \notin \mathcal{D}_f$ et $\lim_a f = b$?)
3. Etudier les variations de f.
4. Déterminer la limite, quand x tend vers 0^+ de $\dfrac{f(x)-1}{x}$. Qu'en déduit-on ?
   On pourra exploiter un encadrement de e^u, valable pour u proche de 0.
5. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2

On veut déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2, f(a+b) = \frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)} \qquad (\star)$$

1. Démontrer que th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.

Soit argth bijection réciproque.

2. Justifier que argth est dérivable sur $]-1,1[$ et montrer que pour tout $x \in]-1,1[$,
   $\operatorname{argth}'(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

On considère une solution f de $(\star)$. - *Raisonnement par analyse*

3. Calculer les valeurs possibles pour $f(0)$.
4. Montrer que s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$.
   Que dire s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = -1$?

On suppose par la suite que : $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq \pm 1$.

5. Calculer $f(x)$ en fonction de $f(\frac{x}{2})$. En déduire que $f(x) \in]-1,1[$.
6. Prouver que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^*$,
   $$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{f(h)}{h}(1-f(a+h)f(a))$$
   En déduire une relation entre $f'(a)$ et $f(a)$.
7. Soit g, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \operatorname{argth}(f(x))$.
   Justifier que g est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, puis prouver que g est une fonction simple.
8. Résoudre le problème posé.