

Coniques

Officiellement, les coniques sont hors-programme en mathématiques de MPSI, alors qu'elles forment un outil important en science physique...

1 Histoire

Antiquité

Par définition, une conique est une courbe que l'on peut obtenir en coupant un cône par un plan dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

Selon l'inclinaison du plan, on obtient des courbes qui semblent très différentes :

- ellipse (*courbe fermée*)
- parabole (*une branche unique*)
- hyperbole (*à deux branches - si le cône à deux parties*)
- ou une conique « dégénérée » : point, droite ou cercle

Même si ces courbes sont issus d'un même processus de construction, les mathématiciens ont souvent étudiés indépendamment ces différentes courbes.

▷ Exercice 1.1.

Faire une figure tri-dimensionnelle qui fait apparaître ces différentes courbes

Renouveau à la renaissance

Après avoir étudié les calculs de Tycho BRAHÉ, Johannes KEPLER annonce que les mouvements des astres solaires ne sont pas des cercles, mais des ellipses et plus largement des coniques.

L'un des exploits du génie de Newton est d'avoir démontré ce résultat.

2 Définition classique

On appelle conique d'excentricité $e \in \mathbb{R}^+$, de foyer $F \in \mathbb{R}^2$ et de directrice $\mathcal{D}$ (droite de $\mathbb{R}^2$), l'ensemble :

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathbb{R}^2 \mid d(M, F) = e \times d(M, \mathcal{D})\}$$

.

2.1 Parabole. $e = 1$

▷ Exercice 2.1.

On se place dans un repère orthonormé.

On considère le point F de coordonnées $(1, 0)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = -1$.

Donner l'équation de la parabole $\mathcal{P} = \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(M, F) = d(M, \mathcal{D})\}$. Tracer $\mathcal{P}$.

2.2 Ellipse. $e < 1$

▷ Exercice 2.2.

On se place dans un repère orthonormé. On considère $e \in]0, 1[$.

On considère également deux autres paramètres $0 < c < d$. On note $a = ed$ et $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. On considère le point F de coordonnées $(c, 0)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = d$.

1. Donner l'équation de l'ellipse $\mathcal{E} = \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(M, F) = ed(M, \mathcal{D})\}$ dans le repère centrée en O tel que $\frac{OF}{OD} = \frac{c}{d} = e^2 \in]0, 1[$
2. Montrer que $M(x, y) \in \mathcal{E}$ si et seulement si $M'(-x, y) \in \mathcal{E}$. Quelle conséquence sur la représentation graphique de $\mathcal{E}$.
Montrer que $M(x, y) \in \mathcal{E}$ si et seulement si $M'(x, -y) \in \mathcal{E}$. Quelle conséquence sur la représentation graphique de $\mathcal{E}$.

3. On note A , le point d'intersection de $\mathcal{E}$ et de demi-droite des abscisses positives. Montrer que A a pour coordonnées $(a, 0)$ On note B , le point d'intersection de $\mathcal{E}$ et de demi-droite des ordonnées positives. Montrer que B a pour coordonnées $(0, b)$. Donner un façon simple de tracer B (connaissant A).
4. On note $F' = (-c, 0)$ le symétrique de F par rapport à O .
Montrer que $\mathcal{E} = \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid MF + MF' = 2a\}$ (définition bifocale du jardinier)
5. Tracer $\mathcal{E}$

2.3 Hyperbole. $e > 1$

► Exercice 2.3.

On se place dans un repère orthonormé. On considère $e > 1$.

On considère également deux autres paramètres $0 < d < c$. On note $a = ed$ et $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ On considère le point F de coordonnées $(c, 0)$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = d$.

1. Donner l'équation de l'hyperbole $\mathcal{H} = \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d(M, F) = ed(M, \mathcal{D})\}$ dans le repère centrée en O tel que $\frac{OF}{OD} = \frac{c}{d} = e^2 (\in]0, 1[)$
2. Montrer que $M(x, y) \in \mathcal{H}$ si et seulement si $M'(-x, y) \in \mathcal{H}$. Quelle conséquence sur la représentation graphique de $\mathcal{E}$.
Montrer que $M(x, y) \in \mathcal{H}$ si et seulement si $M'(x, -y) \in \mathcal{H}$. Quelle conséquence sur la représentation graphique de $\mathcal{H}$.
3. On note A , le point d'intersection de $\mathcal{H}$ et de demi-droite des abscisses positives. Montrer que A a pour coordonnées $(a, 0)$
4. Montrer que $\mathcal{H}$ admet deux asymptotes $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$.
5. Tracer $\mathcal{H}$

3 Unification

DESCARTES unifie par sa méthode les résultats des géomètres grecs de l'antiquité.

Propriétés

Si H est un polynôme de deux variables de degré 2 : $H : (x, y) \mapsto ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$.

Alors la courbe Γ d'équation $H(x, y) = 0$ est une conique (ou un ensemble vide).

Nous allons donc essayer de réduire les équations possibles et retrouver les coniques ou des formes dégénérées (droite, point, cercle) plus simple.

► Exercice 3.1.

Considérons donc $H : (x, y) \mapsto ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$.

1. On pose $\theta = \begin{cases} \frac{1}{2} \arctan \frac{c}{a-b} & \text{si } a \neq b \\ \frac{\pi}{4} & \text{si } a = b \end{cases}$ i.e. : $\tan 2\theta = \frac{c}{a-b}$ ou $+\infty$,

$$\text{puis } \begin{cases} X = x \cos \theta + y \sin \theta \\ Y = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \iff \begin{cases} x = X \cos \theta - Y \sin \theta \\ y = X \sin \theta + Y \cos \theta \end{cases}$$

Montrer que $(X, Y) \in \Gamma$ ssi $a'X^2 + b'Y^2 + d'X + e'Y + f' = 0$ où (X, Y) est obtenue à partir de (x, y) par une rotation d'angle θ .

2. — Si $a' \neq 0$ et $b' \neq 0$. On pose ensuite : $X' = X + \frac{d'}{2a'}$, $Y' = Y + \frac{e'}{2b'}$.
Montrer qu'on obtient ainsi une nouvelle équation du type : $a'(X')^2 + b'(Y')^2 = f''$ où (X', Y') est obtenue à partir de (X, Y) par une translation.
Quelle(s) courbe(s) obtient-on ?
— Si $a' = 0$ et $b' \neq 0$ On pose $Y' = Y + \frac{e'}{2b'}$ et $X' = X - \frac{f' + \frac{e'^2}{4b'}}{d'}$.
Montrer qu'on obtient ainsi une nouvelle équation du type : $d'(X') + b'(Y')^2 = 0$ où (X', Y') est obtenue à partir de (X, Y) par une translation. Quelle(s) courbe(s) obtient-on ? De même ou $b' = 0$ et $a' \neq 0$
— Si $a' = b' = 0$, quelle courbe obtient-on ?
3. Faire un bilan sur la méthode.

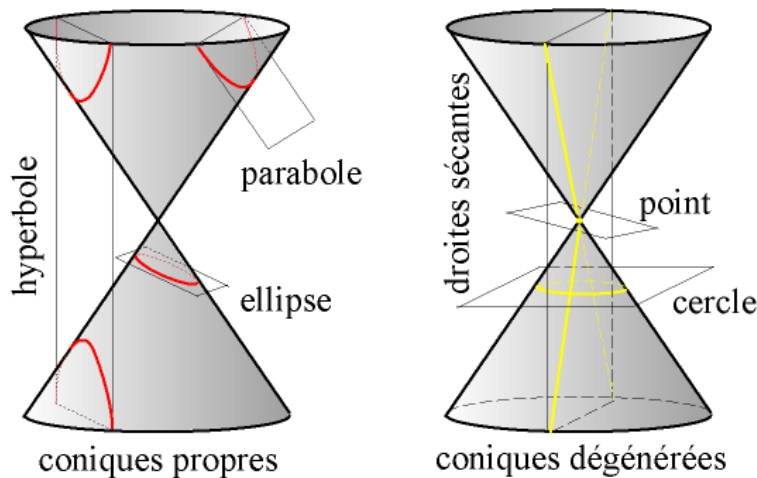
4 Synthèse

Selon les valeurs de e , lié à $\delta = B^2 - 4AC$, trois types de conique peuvent se présenter :

	ELLIPSE	PARABOLE	HYPERBOLE
Définition bifocale	$0 < e < 1$ ou $\delta < 0$ $MF + MF' = 2a$	$e = 1$ ou $\delta = 0$	$e > 1$ ou $\delta > 0$ $ MF - MF' = 2a$
Equations réduites	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $c = \sqrt{a^2 - b^2}$	$y^2 = 2px$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
Distance focale c	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$		$c = \sqrt{a^2 + b^2}$
Relations coefficients	$e = \frac{c}{a}$		$e = \frac{c}{a}$
Foyers	$F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$	$F(\frac{p}{2}, 0)$	$F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$
Sommets	$A(a, 0), A'(-a, 0), B(b, 0)$ et $B'(-b, 0)$	$O(0, 0)$	$S(a, 0)$ et $S'(-a, 0)$
Directrices	$\mathcal{D} : x = \frac{a^2}{c}$ et $\mathcal{D}' : x = -\frac{a^2}{c}$	$\mathcal{D} : x = -\frac{p}{2}$	$\mathcal{D} : x = \frac{a^2}{c}$ et $\mathcal{D}' : x = -\frac{a^2}{c}$ $\Delta : y = \frac{b}{a}x$ et $\Delta' : y = -\frac{b}{a}x$
Asymptotes			

Correction des exercices

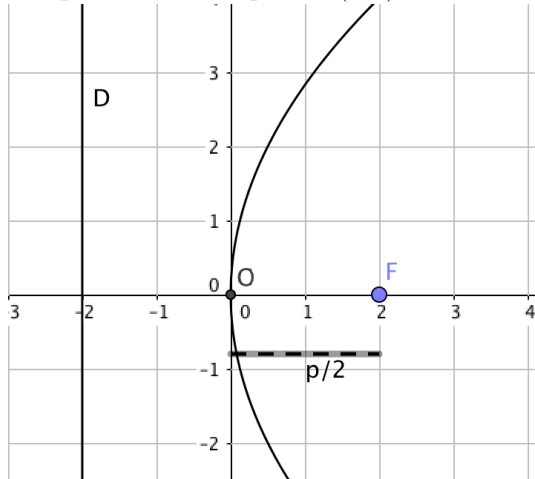
► Corrigé de l'exercice 1.1



► Corrigé de l'exercice 2.1

$d(M, F) = d(M, \mathcal{D}) \iff d^2(M, F) = d^2(M, \mathcal{D}) \iff (x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 \iff -2x + y^2 = 2x$ Comme on raisonne par équivalence, on a bien : $\mathcal{P} = \{M(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 4x\}$.

$\mathcal{P}$ a pour sommet le point $S(0, 0)$.



► Corrigé de l'exercice 2.2

- $d(M, F) = ed(M, \mathcal{D}) \iff d^2(M, F) = e^2 d^2(M, \mathcal{D}) \iff (x-c)^2 + y^2 = e^2(x-d)^2 \iff (1-e^2)x^2 + 2(e^2d-c)x + y^2 = e^2d^2 - c^2$ Or on se place dans le repère centrée en O donc $e^2d = c$, donc $e^2d - c = 0$ et $e^2d^2 - c^2 = (1-e^2)e^2d^2$. Donc : $d(M, F) = ed(M, \mathcal{D}) \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- L'équation précédente, étant paire, elle est invariante par les transformations $(x, y) \mapsto (\pm x, \pm y)$. Graphiquement, cela signifie que $\mathcal{E}$ présente une symétrie d'axe $y = 0$, d'axe $x = 0$ et une symétrie centrale en O .
- A vérifie $(x_A, 0) \in \mathcal{E}$, donc $\frac{x_A^2}{a^2} + 0 = 1$, donc $x_A = a (> 0)$.

De même B vérifie $(0, y_B) \in \mathcal{E}$, donc $0 + \frac{y_B^2}{b^2} = 1$, donc $y_B = b (> 0)$.

Pour tracer B , il suffit d'exploiter le théorème de Pythagore avec une hypoténuse de longueur $d = OD$ et un côté de longueur $c = OF$.

- Faisons le calcul :

$$MF + MF' = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + y^2}$$

- Supposons que $M \in \mathcal{E}$, alors $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$, donc

$$\begin{aligned} MF + MF' &= \sqrt{x^2 - 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} + \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2} \\ &= \frac{1}{a} \sqrt{(a^2 - b^2)x^2 - 2ca^2x + a^2c^2 + a^2b^2} + \frac{1}{a} \sqrt{(a^2 - b^2)x^2 + 2ca^2x + a^2c^2 + a^2b^2} \\ &= \frac{1}{a} \sqrt{c^2x^2 - 2ca^2x + a^4} + \frac{1}{a} \sqrt{c^2x^2 + 2ca^2x + a^4} = \frac{1}{a} (|xc - a^2| + |xc + a^2|) \end{aligned}$$

Or $x \in [-a, a]$, $c > 0$, donc $xc \in [-ca, ca] \subset [-a^2, a^2]$, donc $|xc - a^2| = a^2 - xc$ et $|xc + a^2| = a^2 + xc$.

Donc $MF + MF' = \frac{1}{a}(a^2 - xc + a^2 + xc) = 2a$.

Réciproquement, supposons que $MF + MF' = 2a$ et montrons que $M \in \mathcal{E}$.

Par symétrie, on peut se concentrer sur les $x, y \geq 0$.

Si $x > a$, alors $MF' > a + c$ et $MF > a - c$, donc $MF + MF' > 2a$. Impossible.

On a donc $x \in [0, a]$ et $y \geq 0$. Soit y' tel que $M'(x, y') \in \mathcal{E}$.

On a donc, d'après la première partie de la démonstration : $M'F + M'F' = 2a$.

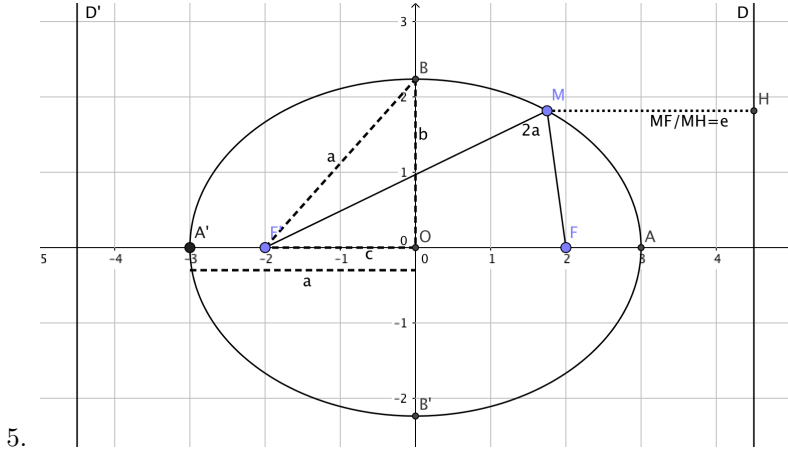
Comme M et M' ont même abscisse :

ou bien $y > y'$, et alors $MF + MF' > M'F + M'F' = 2a$

ou bien $y < y'$, et alors $MF + MF' < M'F + M'F' = 2a$

ou bien $y = y'$, et alors $MF + MF' = M'F + M'F' = 2a$.

Donc si $MF + MF' = 2a$, alors $y = y'$ et $M = M' \in \mathcal{E}$.



5.

► Corrigé de l'exercice 2.3

1. $d(M, F) = ed(M, \mathcal{D}) \iff d^2(M, F) = e^2 d^2(M, \mathcal{D}) \iff (x - c)^2 + y^2 = e^2(x - d)^2 \iff (1 - e^2)x^2 + 2(e^2d - c)x + y^2 = e^2d^2 - c^2$ Or on se place dans le repère centrée en O donc $e^2d = c$, donc $e^2d - c = 0$ et $e^2d^2 - c^2 = (1 - e^2)e^2d^2$. Donc : $d(M, F) = ed(M, \mathcal{D}) \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2. L'équation précédente, étant paire, elle est invariante par les transformations $(x, y) \mapsto (\pm x, \pm y)$. Graphiquement, cela signifie que $\mathcal{E}$ présente une symétrie d'axe $y = 0$, d'axe $x = 0$ et une symétrie centrale en O .

3. A vérifie $(x_A, 0) \in \mathcal{E}$, donc $\frac{x_A^2}{a^2} + 0 = 1$, donc $x_A = a$ (> 0).

De même B vérifie $(0, y_B) \in \mathcal{E}$, donc $0 + \frac{y_B^2}{b^2} = 1$, donc $y_B = b$ (> 0).

Pour tracer B , il suffit d'exploiter le théorème de Pythagore avec une hypoténuse de longueur $d = OD$ et un côté de longueur $c = OF$.

4. On a donc $\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1$.

On a alors $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}$. Et donc si $x, y \rightarrow +\infty$ ou $x, y \rightarrow -\infty$, alors $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \rightarrow 0$.

et donc $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ pour $x, y \rightarrow +\infty$ ou $x, y \rightarrow -\infty$.

On a alors $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{\frac{x}{a} - \frac{y}{b}}$. Et donc si $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow -\infty$ ou $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow +\infty$, alors $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \rightarrow 0$.

et donc $\frac{x}{a} = -\frac{y}{b}$ pour $x \rightarrow +\infty, y \rightarrow -\infty$ ou $x \rightarrow -\infty, y \rightarrow +\infty$.

