

**SYMÉTRIES,
DE GALOIS
AU MONDE QUANTIQUE**

Alain CONNES

Collège de France, 3, rue Ulm, 75005 PARIS

et

I.H.E.S., 35, route de Chartres, 91440 BURES-sur-YVETTE

I Introduction

Cet exposé se propose d'illustrer, par quelques exemples simples, la notion de symétrie en mathématiques, puis de guider le lecteur vers les symétries plus subtiles qui apparaissent dans le monde quantique.

Après une illustration élémentaire des symétries à l'œuvre dans la résolution des équations de degré trois et quatre le passage au degré supérieur sera l'occasion d'évoquer le jeu de l'icosaèdre et les "icosions", définis par le mathématicien William Hamilton au dix-neuvième siècle.

Je terminerai la partie élémentaire par une réflexion sur un théorème de géométrie, démontré par Frank Morley vers 1899, où la symétrie d'un triangle équilatère surgit comme par miracle d'un triangle arbitraire en prenant l'intersection des trisecteurs consécutifs. J'en ai donné, en 1998, une démonstration nouvelle reposant sur le groupe affine, que j'évoquerai ici.

J'en viendrai ensuite au cœur de cet exposé qui est mon travail sur la renormalisation en collaboration avec Dirk Kreimer et la relation que nous avons établie entre renormalisation et problème de Riemann-Hilbert.

Enfin je terminerai en revenant à Galois et en esquissant le rôle que le groupe de renormalisation devrait jouer pour comprendre la composante connexe du groupe des classe d'idèles de la théorie du corps de classe comme un groupe de Galois.

II Symétries et équations algébriques

Commençons par décrire un exemple élémentaire où une "symétrie" est manifestement présente de manière intuitive. Prenons l'organisation de la phase finale des coupes de football, par exemple de la dernière coupe d'Europe. Les équipes se retrouvent par poules de quatre au sein desquelles elles doivent se départager. La France, par exemple, se trouvait dans un groupe de quatre équipes, Danemark, France, Pays-Bas et République Tchèque, (abrégées en D, F, P et T). Pour départager ces quatre

équipes de manière équitable, il faut que chacune d'elles rencontre chacune des trois autres, de sorte que trois journées sont nécessaires. Quand deux équipes se rencontrent, F et D par exemple, les deux autres (P et T) peuvent se rencontrer le même jour et il suffit donc de trois journées pour obtenir toutes les configurations possibles. Dans l'exemple de la coupe d'Europe, les trois journées, chacune voyant se dérouler deux matches, étaient FD et PT pour la première, FT et DP pour la seconde et FP et DT pour la dernière.

Il est facile de percevoir intuitivement qu'une telle organisation est harmonieuse car aucune des quatre équipes n'est privilégiée. Ainsi l'on vérifie que si l'on permute arbitrairement les quatre équipes, par exemple si l'on échange F et D, il en résulte une simple permutation des trois journées (en l'occurrence l'échange des journées 2 et 3).

Nous pouvons visualiser la symétrie qui est à l'œuvre en remplaçant les lettres DFPT par quatre points A, B, C et D du plan. Ces quatre points déterminent deux par deux six droites à condition qu'ils soient en position générale pour éviter qu'elles soient confondues. À chacune des trois journées correspond naturellement un point du plan. Ainsi à AB et CD qui représentent une journée on associe l'intersection α des droites AB et CD et ainsi de suite pour les deux autres couples, de sorte que β est l'intersection des droites AC et BD et γ l'intersection des droites AD et BC .

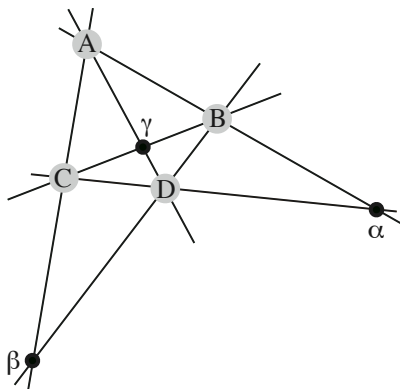


Figure 1

La figure ainsi construite, formée de quatre points et six droites, se nomme *quadrilatère complet*. Elle contient toute l'information dont nous avons besoin. Elle est parfaitement *symétrique* (au sens abstrait, même si des symétries au sens de la géométrie élémentaire classique - symétries par rapport à un point ou une droite - n'y apparaissent pas), puisque chacun des quatre points A, B, C et D joue exactement le même rôle que les trois autres, et qu'il en va de même des trois points α, β et γ .

Après l'avoir visualisée, l'on peut aussi formuler algébriquement la symétrie en question. Ainsi la fonction f qui aux quatre éléments a, b, c et d associe $f(a, b, c, d) = ab + cd$ ne prend que trois déterminations différentes quand on permute a, b, c et d . (les deux autres déterminations sont $g(a, b, c, d) = ac + bd$ et $h(a, b, c, d) = ad + bc$).

Ce fait est à la base de la méthode générale permettant de résoudre par radicaux les équations du quatrième degré, c'est-à-dire d'exprimer les zéros a, b, c et d du polynôme $X^4 + nX^3 + pX^2 + qX + r = (X - a)(X - b)(X - c)(X - d)$ en fonction des coefficients n, p, q, r et de l'extraction de racines.

Pour comprendre cette affirmation, il faut revenir un peu en arrière dans l'Histoire et examiner brièvement les résolutions des équations de degrés inférieurs à quatre.

Si la technique de résolution des équations du second degré remonte à la plus haute

Antiquité (Babyloniens, Egyptiens...), elle n'a pu être étendue au troisième degré que bien plus tard, et ne sera publiée par Girolamo (Jérôme) Cardano qu'en 1545 dans les chapitres 11 à 23 de son livre *Ars magna sive de regulis algebraicis*. Bien que cela n'ait pas été reconnu avant le dix-huitième siècle, la clef de la résolution par radicaux de l'équation générale du troisième degré, $x^3 + nx^2 + px + q = 0$, de racines a, b, c , est l'existence d'une fonction polynomiale $\alpha(a, b, c)$ de a, b, c , qui ne prend que deux déterminations différentes sous l'action des six permutations de a, b, c .

La méthode de Cardan revient à poser $\alpha = ((1/3)(a + bj + cj^2))^3$ où le nombre j est la première racine cubique de l'unité. La permutation circulaire transformant a en b , b en c et c en a laisse manifestement α inchangée et la seule autre détermination de la fonction α sous l'action des six permutations de a, b, c , est obtenue en transposant b et c par exemple, ce qui donne $\beta = ((1/3)(a + cj + bj^2))^3$.

Comme l'ensemble de ces deux nombres α et β est invariant par toutes les permutations de a, b, c , le polynôme du second degré dont α et β sont racines se calcule rationnellement en fonction des coefficients de l'équation initiale $x^3 + nx^2 + px + q = 0$: c'est $X^2 + 2qX - p^3 = (X + q + s)(X + q - s)$ où s est l'une des racines carrées de $p^3 + q^2$ et où pour simplifier les formules l'on a réécrit l'équation initiale sous la forme équivalente $x^3 + 3px + 2q = 0$ débarrassée du terme du deuxième degré en effectuant une translation convenable des racines et où l'on introduit les coefficients 2 et 3.

Un calcul simple montre alors que chacune des racines a, b et c , de l'équation initiale s'exprime comme somme de l'une des trois racines cubiques de α et de l'une des trois racines cubiques de β , ces deux choix étant liés par le fait que leur produit doit être impérativement égal à $-p$ (il n'y a donc que trois couples de choix de ces racines à prendre en compte, ce qui est rassurant, à la place des neuf possibilités que l'on aurait pu envisager *a priori*).

C'est à l'occasion de ces formules que l'utilisation des nombres complexes s'est imposée. En effet, même dans le cas où les trois racines sont réelles, il se peut que $p^3 + q^2$ soit négatif et que α et β soient nécessairement des nombres complexes.

Si la résolution des équations du troisième degré que nous venons d'exposer a été très longue à être mise au point (sans doute pour au moins l'un de ses cas particuliers entre 1500 et 1515 par Scipione del Ferro), celle du quatrième degré a été plus preste à la suivre puisqu'elle figure également dans l'*Ars magna* (chapitre 39) où Cardano l'attribue à son secrétaire Ludovico Ferrari qui l'aurait mise au point entre 1540 et 1545 (René Descartes en publiera une autre en 1637). Et c'est cette résolution qui nous ramène à la première symétrie que nous avons rencontrée, celle de l'organisation des finales, du quadrilatère complet et de la fonction $ab + cd$.

Ici encore, l'on peut partir d'un polynôme débarrassé d'un coefficient, annulé par la même technique que précédemment, disons $X^4 + pX^2 + qX + r = (X - a)(X - b)(X - c)(X - d)$. L'ensemble des trois nombres $\alpha = ab + cd$, $\beta = ac + bd$, $\gamma = ad + bc$ est invariant par chacune des vingt-quatre permutations agissant sur a, b, c et d . Ce sont donc les racines d'une équation du troisième degré dont les coefficients s'expriment rationnellement en fonction de p, q et r . Un calcul simple montre que le polynôme $(X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$ est égal à $X^3 - pX^2 - 4rX + (4pr - q^2)$. Il peut donc être décomposé comme on l'a vu plus haut pour en déduire α, β et γ ; en fait, il suffit même de calculer l'une seulement de ces racines, disons α , pour pouvoir en déduire a, b, c et d (nous connaissons alors en effet la somme α et le produit r des deux nombres ab et cd , donc ces deux nombres eux-mêmes par une équation du second degré, et il ne reste plus qu'à exploiter les égalités $(a + b) + (c + d) = 0$ et $ab(c + d) + cd(a + b) = -q$ pour pouvoir en déduire $a + b$ et

$c + d$, donc enfin a, b, c et d).

C'est à Joseph Louis Lagrange en 1770 et 1771 (publication en 1772, mais aussi, dans une moindre mesure, à Alexandre Vandermonde dans un mémoire publié en 1774 mais également rédigé vers 1770, ainsi qu'à Edward Waring dans ses *Meditationes algebrae* de 1770 et à Francesco Malfatti) que l'on doit la mise en lumière du rôle fondamental des permutations sur les racines $a, b, c, \dots$ et sur les quantités auxiliaires $\alpha, \beta, \dots$, d'ailleurs aujourd'hui justement appelées "résolvantes de Lagrange".

Ces résolvantes ne sont pas uniques (ainsi aurait-on également pu poser $\alpha = (a + b - c - d)^2$ dans le cas du quatrième degré, ce qui correspond à la solution de Descartes), mais elles fournissent la clef de toutes les résolutions générales par radicaux. Il était normal de désirer aller plus loin : Descartes a certainement essayé et avec lui bien des chercheurs. L'étape suivante est évidemment celle du cinquième degré. Elle a toujours opposé des obstacles infranchissables, et nous savons depuis Évariste Galois, aux alentours de 1830, pourquoi cette quête était vaine.

Descartes par exemple, persuadé qu'il n'existait pas de formule analogue à celle de Cardano, avait proposé en 1637, dans *La Géométrie*, une méthode graphique de résolution grâce à l'intersection de cercles et de cubiques qu'il avait inventées pour l'occasion. Entre 1799 et 1813 (date de l'édition de ses *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebriche generali*), Paolo Ruffini a publié diverses tentatives de démonstrations, de plus en plus affinées, visant à établir l'impossibilité de résoudre l'équation générale du cinquième degré par radicaux. À toute fonction rationnelle des racines, il a eu l'idée juste d'associer le groupe des permutations de ces racines qui la laissent invariante, mais a cru à tort (d'après un rapport de Ludwig Sylow) que les radicaux intervenant dans la résolution de l'équation, comme les racines cubiques de α pour le degré trois, étaient nécessairement des fonctions rationnelles des racines.

Il faudra attendre 1824 pour que Niels Abel justifie l'intuition de Ruffini dans son *Mémoire sur les équations algébriques* et - après avoir cru trouver au contraire une méthode de résolution générale - prouve l'impossibilité de résoudre l'équation générale du cinquième degré par radicaux, en 1826 dans le *Mémoire sur une classe particulière d'équations résolubles algébriquement*, où il amorce une théorie générale qui ne s'épanouira que dans les écrits de Galois, vers 1830. Les travaux de Galois inaugurent une ère nouvelle des mathématiques, où les calculs font place à la réflexion sur leur potentialité, et les concepts, tels celui de groupe abstrait ou d'extension algébrique occupent le devant de la scène.

L'idée lumineuse de Galois consiste d'abord à associer à une équation arbitraire un groupe de permutations qu'il définit de la manière suivante, [17]

Soit une équation donnée, dont $a, b, c, \dots$ sont les m racines. Il y aura toujours un groupe de permutations des lettres $a, b, c, \dots$ qui jouira de la propriété suivante :

1) que toute fonction des racines, invariante par les substitutions de ce groupe, soit rationnellement connue ;

2) réciproquement, que toute fonction des racines, déterminée rationnellement, soit invariante par ces substitutions.

puis à étudier comment ce groupe "d'ambiguïté" se trouve modifié par l'adjonction de quantités auxiliaires considérées comme "rationnelles".

L'impossibilité de réduire l'équation du cinquième degré à des équations de degré inférieur provient alors de la "simplicité" du groupe A_5 des soixantes permutations paires (produits d'un nombre pair de transpositions) des cinq racines a, b, c, d, e d'une

telle équation. Un groupe abstrait fini est "simple" si l'on ne peut le réduire, par un homomorphisme non trivial, à un groupe plus petit. Le groupe A_5 est le plus petit groupe simple non commutatif et il apparaît très souvent en mathématiques. Ce groupe se présente très économiquement, il est engendré par deux éléments u et v vérifiant les relations $u^2 = 1$, $v^3 = 1$ et $(uv)^5 = 1$ ce qui me donne l'occasion d'en venir aux icosions d'Hamilton.

Après avoir découvert les quaternions, William Hamilton a tenté de construire en 1857 une nouvelle algèbre, formée de nombres généralisés qu'il appelait les icosions [20]. Deux d'entre eux notés u et v , qu'il appelait racines noncommutatives de l'unité, devaient vérifier $u^2 = 1$, $v^3 = 1$ et $(uv)^5 = 1$. Il est évident que si u et v commutent, i. e. $uv = vu$ on a $u = v = 1$. Ainsi l'on ne peut représenter u et v dans aucun des groupes S_n , $n \leq 4$. Pour représenter u et v dans le groupe A_5 des permutations paires des cinq lettres (a, b, c, d, e) il suffit de poser $u = (a, c, b, e, d)$, permutation qui laisse fixe a et échange b et c , d et e , et $v = (c, b, e, d, a)$ la permutation qui laisse fixe b et d , et change a en c , c en e et e en a . Le produit uv est alors la permutation cyclique (b, c, d, e, a) qui est bien d'ordre cinq. L'on peut ainsi représenter u et v de cent vingt manières différentes (mais deux à deux isomorphes) dans le groupe A_5 .

Le groupe A_5 est isomorphe au groupe des rotations qui conservent un *icosaèdre* ou, ce qui revient au même, un *dodécaèdre* (ces deux corps sont les plus intéressants des cinq solides platoniciens, qui avec le tétraèdre régulier, le cube et l'octaèdre - formé par les six centres d'un cube - sont les seuls polyèdres réguliers existant dans notre espace usuel).

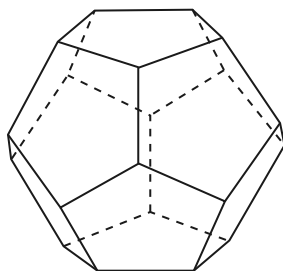


Figure 2 : Dodécaèdre

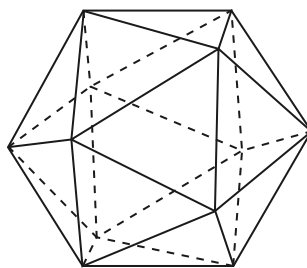


Figure 3 : Icosaèdre

Pour obtenir l'isomorphisme cherché il suffit d'associer à u l'une des quinze rotations d'ordre deux (une symétrie dont l'axe est l'une des quinze médiatrices communes à deux arêtes parallèles) et à v l'une des vingt rotations d'ordre trois (dont l'axe relie l'un des dix couples de deux sommets diamétralement opposés du dodécaèdre ou des centres de deux faces parallèles de l'icosaèdre) de telle sorte que le produit uv soit l'une des vingt-quatre rotations d'ordre cinq (dont l'axe relie l'un des six couples de centres de deux faces parallèles du dodécaèdre ou de deux sommets diamétralement opposés

de l'icosaèdre); Les soixante rotations conservant ce solide peuvent toutes s'exprimer simplement comme produits des générateurs u et v .

Bien que les deux icosiions u, v engendrent le groupe A_5 et vérifient les relations $u^2 = 1$, $v^3 = 1$ et $(uv)^5 = 1$, il n'est pas immédiat que ces relations constituent une présentation de ce groupe, c'est-à-dire que toute autre relation entre u et v s'en déduise. Il y a deux façons de s'en convaincre, l'une par l'algèbre, l'autre par la géométrie.

Commençons par l'algèbre. Le lecteur se convaincra d'abord que les relations plus simples $s^2 = 1$, $t^3 = 1$ et $(st)^3 = 1$ présentent le groupe A_4 des douze permutations paires de quatre lettres. Soit alors G le groupe abstrait de présentation $u^2 = 1$, $v^3 = 1$ et $(uv)^5 = 1$. Posant $k = uv$ l'on vérifiera que $s = u$ et $t = k^{-2}uk$ engendrent un sous groupe $H = A_4$ et que tout élément de G s'écrit de manière unique comme le produit $k^n h$ d'une puissance de k par un élément de H . Il en résulte alors que le groupe G a soixante éléments et est bien le groupe A_5 .

Passons à la géométrie. Le groupe présenté par les relations $u^2 = 1$, $v^3 = 1$ est le groupe $PSL(2, Z)$ des transformations homographiques $g(z) = (az+b)/(cz+d)$, notées $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, où a, b, c, d sont des entiers tels que $ad - bc = 1$. On y représente u et v par les matrices $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

L'on comprend géométriquement le groupe $PSL(2, Z)$ en visualisant son action sur un arbre T (figures 4 et 4bis) dont chaque sommet rencontre trois arêtes.

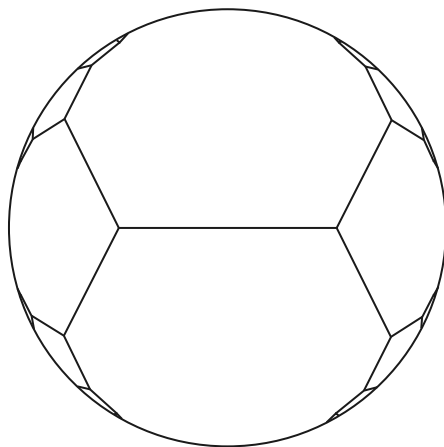


Figure 4 : Arbre dans le modèle de Klein

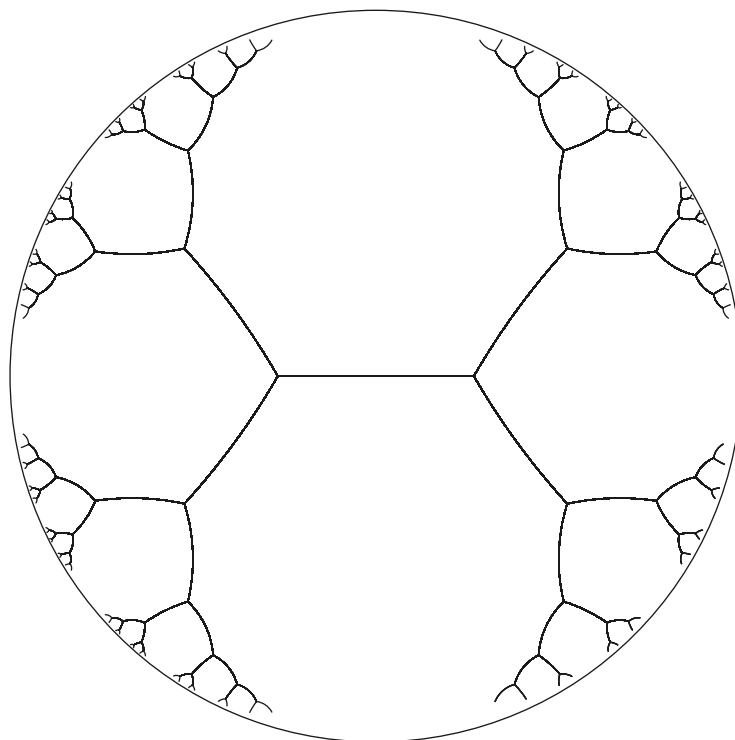


Figure 4bis : Arbre dans le modèle de Poincaré

Imposer la relation supplémentaire $(uv)^5 = 1$ revient à quotienter $PSL(2, Z)$ par le sous-groupe normal Γ engendré par $(uv)^5$. Le quotient de T par Γ n'est autre que le graphe formé par les arêtes du dodécaèdre (figure 5).

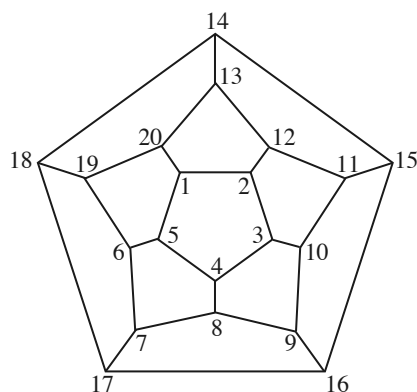


Figure 5 : Squelette du dodécaèdre

C'est à propos de ce même graphe (représenté aplati sur la figure ci-contre, directement inspirée d'Hamilton lui-même) qu'Hamilton mit au point le "jeu de l'icosaèdre" qu'il appelait aussi "jeu des racines non commutatives de l'unité" *. Ce jeu constitue le premier exemple de ce que l'on appelle maintenant la recherche d'un circuit hamiltonien, concept très important dans la théorie moderne des graphes. Il s'agit d'un défi concernant les vingt sommets d'un dodécaèdre, qu'il s'agit de parcourir en suivant les arêtes du polyèdre de façon à passer par chaque sommet une fois et une seule, les sommets de départ et d'arrivée étant eux-mêmes liés par une arête qui permet de fermer le circuit.

*voir le remarquable essai de 1937 d'André Sainte-Laguë Avec des nombres et des lignes, réédité par Vuibert en 1994

Le jeu d'Hamilton consiste à compléter le circuit dont on donne les cinq premiers sommets. En voici deux exemples :

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 19, 18, 14, 15, 16, 17, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 20),

(9, 16, 15, 14, 13, 20, 1, 2, 12, 11, 10, 3, 4, 5, 6, 19, 18, 17, 7, 8).

Pour en revenir à l'algèbre, on montre que le sous-groupe Γ engendré par $(uv)^5 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et ses conjugués est le groupe des matrices congruentes à $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ modulo cinq, de sorte que le quotient G est le groupe $PSL(2, F_5)$ où F_5 est le corps des entiers modulo 5. Bien sûr, ceci nous donne une autre incarnation du groupe A_5 et il amusant d'en donner une autre : $PSL(2, F_4)$ où F_4 est le corps à quatre éléments !

III le théorème de Morley

Il n'y a pas un "ange de la géométrie" en rivalité avec le "diable de l'algèbre" mais une connivence fructueuse entre les aires visuelles du cerveau, qui décèlent d'un coup d'œil l'harmonie d'une configuration, et celles du langage qui la distille en écritures algébriques.

J'en viens à un autre exemple de cette connivence en évoquant le théorème de Morley. Il constitue également un domaine où les symétries, concrètes d'origine géométrique, et abstraites et algébriques quand on le regarde sous un nouvel angle, se conjuguent de façon forte et laissent une réelle impression de beauté. Le mathématicien britannique Frank Morley fut l'un des premiers enseignants des universités américaines. C'est au tournant du siècle précédent qu'à l'occasion de recherches sur les familles de cardioïdes tangentes aux trois côtés d'un triangle donné, il dégagait la propriété suivante : les trois couples de trisectrices intérieures de ses trois angles (c'est-à-dire des droites qui découpent ces angles en trois angles égaux, à la manière des bissectrices bien connues) se coupent en six points dont trois forment un triangle équilatéral.

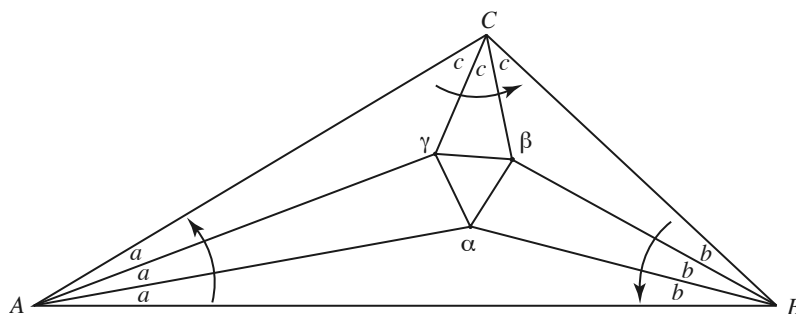


Figure 6

La démonstration originale, assez difficile, est basée sur d'ingénieux calculs à base de géométrie analytique superbement maîtrisée. Il existe de nombreuses preuves de ce résultat, ainsi que des généralisations portant jusqu'à dix-huit, voire vingt-sept (et même davantage) triangles équilatéraux que l'on peut dégager à partir des cent-huit points d'intersections des dix-huit trisectrices obtenues à partir des trisectrices intérieures par des rotations d'angle $\pi/3$. Parmi ces preuves, il en existe par le calcul trigonométrique, mais aussi par la géométrie pure, comme celle qu'a donnée Raoul Bricard en 1922.

Il en existe une de toute autre nature, qui l'éclaire sous un angle intéressant puisqu'elle permet d'étendre ce résultat *a priori* fortement euclidien à la géométrie de la droite

affine sur un corps k arbitraire. Le résultat d'algèbre pure qui contient (et étend) la propriété des trisectrices est d'une telle généralité que sa démonstration devient une simple vérification (un énoncé très général est souvent plus simple à démontrer qu'un cas particulier car le nombre d'hypothèses que l'on doit utiliser est d'autant plus restreint). Il s'énonce ainsi :

Si G est le groupe affine d'un corps commutatif k (c'est-à-dire des applications g de k dans k qui peuvent s'écrire sous la forme $g(x) = ax + b$, où a , noté $\delta(g)$, est non nul), alors pour tout triplet (f, g, h) d'éléments de G tels que $j = \delta(fgh) \neq 1$ et que fg , gh et hf ne soient pas des translations, il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :

a) $f^3g^3h^3 = 1$ (transformation identique)

b) $j^3 = 1$ et $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$ où α est l'unique point fixe de fg , β celui de gh et γ celui de hf .

Reste à montrer comment cette propriété algébrique très abstraite permet de mieux comprendre (et de prouver par la même occasion) le théorème de Morley. Nous prendrons pour k le corps des nombres complexes, pour lequel le groupe affine est celui des similitudes directes, et dont un sous-groupe est celui des rotations (il faut et il suffit que a soit de module 1 pour que g soit une rotation). Nous prendrons pour f, g, h les trois rotations autour des trois sommets du triangle et dont les angles sont les deux tiers des angles au sommet. Ainsi f est la rotation de centre A d'angle $2a/3$, g celle de centre B et d'angle $2b/3$ et h celle de centre C et d'angle $2c/3$. Il est immédiat que le produit des cubes $f^3g^3h^3$ est égal à 1, car f^3 par exemple est le produit de deux symétries par rapport aux cotés de l'angle en A de sorte que ces symétries se simplifient deux à deux dans le produit $f^3g^3h^3$.

L'équivalence ci-dessus montre donc que l'on a $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$, où α, β, γ , sont les points fixes de fg, gh et hf et où le nombre $j = \delta(fgh)$ est la première racine cubique de l'unité, que nous avons déjà rencontrée dans le cours de cet article. La relation $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$ est une caractérisation bien connue des triangles équilatéraux. (Elle peut encore s'écrire sous la forme $\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta} = -j^2$, ce qui montre que l'on passe du vecteur $\overrightarrow{\beta\gamma}$ au vecteur $\overrightarrow{\beta\alpha}$ par une rotation d'angle $\pi/3$).

Une très vieille recette, bien connue des personnes ayant reçu une forte imprégnation de géométrie classique, montre que le point α défini par $f(g(\alpha)) = \alpha$ n'est autre que l'intersection de la trisectrice issue de A et de la trisectrice issue de B les plus proches du côté AB . Le lecteur pourra s'en persuader en vérifiant que la rotation g de sommet B et d'angle $2b/3$ transforme ce point d'intersection en son symétrique par rapport au côté AB , et que la rotation f de sommet A et d'angle $2a/3$ le remet exactement à sa place. Il en va de même pour β et γ .

Nous avons donc démontré que le triangle (α, β, γ) est équilatéral. Nous voyons même en prime que, dans cet ordre, il est décrit dans le sens positif (opposé à celui des aiguilles d'une montre). Cette preuve s'applique tout autant aux autres triangles équilatéraux de Morley : les dix-huit trisectrices obtenues à partir des trisectrices intérieures par des rotations d'angle $\pi/3$ permettent de modifier f, g et h sans changer le produit de leurs cubes et donnent de nouvelles solutions de a) et autant de triangles équilatéraux !

La *Revue de Mathématiques de l'Enseignement Supérieur* (ex *Mathématiques Spéciales*, chez Vuibert) publiera, dans l'un de ses numéros de l'année universitaire 2001-2002, un exposé d'André Warusfel sur les configurations de Morley et quelques preuves des symétries sous-tendant ces objets spectaculaires, dont naturellement celles de Morley

lui-même et de l'auteur de cet article.

IV Renormalisation, position du problème

J'en viens maintenant à mon travail sur la renormalisation en collaboration avec Dirk Kreimer et la relation que nous avons établie entre renormalisation et problème de Riemann-Hilbert.

La motivation physique de la renormalisation est très claire et remonte aux travaux de Green au dix-neuvième siècle sur l'hydrodynamique. Pour prendre un exemple simple [†] si l'on calcule l'accélération initiale d'une balle de ping-pong plongée à quelques mètres sous l'eau, l'on obtient en appliquant la loi de Newton $F = ma$ et la poussée d'Archimède $F = (M - m)g$, où m est la masse inerte, et M la masse d'eau occupée, une accélération initiale de l'ordre de $11g$! [‡] En réalité, si l'on réalise l'expérience, l'accélération est de l'ordre de $2g$. En fait la présence du fluide autour de la balle oblige à corriger la valeur m de la masse inerte dans la loi de Newton et à la remplacer par une "masse effective" qui en l'occurrence vaut $m + \frac{1}{2} M$. Dans cet exemple, l'on peut bien sûr déterminer la masse m en pesant la balle de ping-pong hors de l'eau, mais il n'en va pas de même pour un électron dans le champ électromagnétique, dont il est impossible de l'extraire. De plus le calcul montre que, pour une particule ponctuelle comme le demande la relativité, la correction qui valait $\frac{1}{2} M$ ci-dessus est infinie.

Vers 1947 les physiciens ont réussi à utiliser la distinction entre les deux masses qui apparaissent ci-dessus et plus généralement le concept de quantité physique "effective" pour éliminer les quantités infinies qui apparaissent en théorie des champs quantiques (voir [16] pour un aperçu historique).

Une théorie des champs en d dimensions est donnée par une fonctionnelle d'action classique

$$(1) \quad S(A) = \int \mathcal{L}(A) d^d x$$

où A désigne un champ classique et le Lagrangien est de la forme,

$$(2) \quad \mathcal{L}(A) = (\partial A)^2/2 - \frac{m^2}{2} A^2 + \mathcal{L}_{\text{int}}(A)$$

où $\mathcal{L}_{\text{int}}(A)$ est un polynôme en A .

On peut décrire la théorie par les fonctions de Green,

$$(3) \quad G_N(x_1, \dots, x_N) = \langle 0 | T \phi(x_1) \dots \phi(x_N) | 0 \rangle$$

où le symbole T signifie que les $\phi(x_j)$'s sont écrit à temps croissant de droite à gauche. L'amplitude de probabilité d'une configuration classique A est donnée par,

$$(4) \quad e^{i \frac{S(A)}{\hbar}}$$

[†]voir le cours de théorie des champs de Sidney Coleman

[‡]La balle pèse $m = 2,7$ grammes et a un diamètre de 4 cm de sorte que $M = 33,5$ grammes

et si l'on pouvait ignorer les problèmes de renormalisation, on pourrait calculer les fonctions de Green grâce à la formule

$$(5) \quad G_N(x_1, \dots, x_N) = \mathcal{N} \int e^{i \frac{S(A)}{\hbar}} A(x_1) \dots A(x_N) [dA]$$

où $\mathcal{N}$ est un facteur de normalisation requis par,

$$(6) \quad \langle 0 | 0 \rangle = 1.$$

Si l'on pouvait ignorer les problèmes de renormalisation, on pourrait calculer l'intégrale fonctionnelle (5) en théorie des perturbations, en traitant le terme $\mathcal{L}_{\text{int}}$ de (2) comme une perturbation de

$$(7) \quad \mathcal{L}_0(\phi) = (\partial\phi)^2/2 - \frac{m^2}{2} \phi^2.$$

On a ainsi,

$$(8) \quad S(\phi) = S_0(\phi) + S_{\text{int}}(\phi)$$

où l'action libre S_0 définit une mesure Gaussienne $\exp(i S_0(\phi)) [d\phi] = d\mu$.

On obtient alors le développement perturbatif des fonctions de Green sous la forme,

$$(9) \quad G_N(x_1, \dots, x_N) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} i^n/n! \int \phi(x_1) \dots \phi(x_N) (S_{\text{int}}(\phi))^n d\mu \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} i^n/n! \int S_{\text{int}}(\phi)^n d\mu \right)^{-1}.$$

Les termes de ce développement s'obtiennent en intégrant par partie sous la Gaussienne. Cela engendre un grand nombre de termes $U(\Gamma)$, où les paramètres Γ sont les graphes de Feynman Γ , i.e. des graphes dont les sommets correspondent aux termes du Lagrangien de la théorie. En règle générale les valeurs des termes $U(\Gamma)$ sont données par des intégrales divergentes. Les divergences les plus importantes sont causées par la présence dans le domaine d'intégration de moments de taille arbitrairement grande. La technique de renormalisation consiste d'abord à "régulariser" ces intégrales divergentes par exemple en introduisant un paramètre de "cutoff" Λ et en se restreignant à la portion correspondante du domaine d'intégration. Les intégrales sont alors finies, mais continuent bien entendu à diverger quand $\Lambda \rightarrow \infty$. On établit ensuite une dépendance entre les termes du Lagrangien et Λ pour que les choses s'arrangent et que les résultats ayant un sens physique deviennent finis! Dans le cas particulier des théories asymptotiquement libres, la forme explicite de la dépendance entre les constantes nues et le paramètre de régularisation Λ a permis dans des cas très importants ([18]) de mener à bien le programme de la théorie constructive des champs ([19]).

Décrivons maintenant en détail la technique de renormalisation perturbative. Pour faire les choses systématiquement, on rajoute un "contreterme" $C(\Gamma)$ au Lagrangien de départ $\mathcal{L}$, chaque fois que l'on rencontre un diagramme divergent Γ , dans le but d'annuler la divergence correspondante. Pour les théories "renormalisables", les contre-terms dont on a besoin sont tous déjà des termes du Lagrangien $\mathcal{L}$ et ces contorsions peuvent

s'interpréter à partir de l'inobservabilité des quantités numériques qui apparaissent dans $\mathcal{L}$, par opposition aux quantités physiques qui, elles, doivent rester finies.

La principale complication dans cette procédure vient de l'existence de nombreux graphes Γ pour lesquels les divergences de $U(\Gamma)$ ne sont pas locales. La raison étant que ces graphes possèdent déjà des sous-graphes dont les divergences doivent être prises en compte avant d'aller plus loin. La méthode combinatoire précise, due à Bogoliubov-Parasiuk-Hepp et Zimmermann ([3]) consiste d'abord à "préparer" le graphe Γ en remplaçant $U(\Gamma)$ par l'expression formelle,

$$(10) \quad \overline{R}(\Gamma) = U(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma) U(\Gamma/\gamma)$$

où γ varie parmi tous les sous-graphes divergents. On montre alors que le calcul des divergences du graphe "préparé" ne donne que des expressions locales, qui pour les théories renormalisables se trouvent déjà dans le Lagrangien $\mathcal{L}$.

V L'algèbre de Hopf des graphes de Feynman

Dirk Kreimer a eu l'idée remarquable en 97 ([23]) d'utiliser la formule (10) pour définir le coproduit d'une algèbre de Hopf.

En tant qu'algèbre $\mathcal{H}$ est l'algèbre commutative libre engendrée par les graphes "une particule irréductibles" (1PI)[§]

Elle admet ainsi une base indexée par les graphes Γ unions disjointes de graphes 1PI.

$$(11) \quad \Gamma = \bigcup_{j=1}^n \Gamma_j.$$

Le produit dans $\mathcal{H}$ est donné par l'union disjointe,

$$(12) \quad \Gamma \cdot \Gamma' = \Gamma \cup \Gamma'.$$

Pour définir le coproduit,

$$(13) \quad \Delta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$$

il suffit de le donner sur les graphes 1PI, on a

$$(14) \quad \Delta\Gamma = \Gamma \otimes 1 + 1 \otimes \Gamma + \sum_{\gamma \subset \Gamma} \gamma_{(i)} \otimes \Gamma/\gamma_{(i)}$$

Ici γ est un sous-ensemble (non vide et de complémentaire non-vide) $\gamma \subset \Gamma^{(1)}$ de l'ensemble $\Gamma^{(1)}$ des faces internes de Γ dont les composantes connexes γ' vérifient des conditions d'admissibilité détaillées dans la référence [11].

Le coproduit Δ défini par (14) sur les graphes 1PI se prolonge de manière unique en un homomorphisme de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. On a alors ([23],[11])

THÉORÈME *Le couple $(\mathcal{H}, \Delta)$ est une algèbre de Hopf.*

[§] Un graphe de Feynman Γ est "une particule irréductible" (1PI) si il est connexe et le reste après avoir enlevé n'importe laquelle de ses faces

VI L'algèbre de Lie des graphes, le groupe G et sa structure.

J'avais à la même époque, dans les calculs de Géométrie Noncommutative de l'indice transverse pour les feuilletages, montré, avec Henri Moscovici, ([14]) que la complexité extrême de ces calculs conduisait à introduire une algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{cm}$, qui n'est ni commutative ni cocommutative mais est intimement reliée au groupe des difféomorphismes, dont l'algèbre de Lie apparaît en appliquant le théorème de Milnor-Moore à une sous-algèbre commutative.

Après l'exposé de Dirk à l'IHES en février 98, nous avons tous les deux été intrigués par la similarité apparente entre ces deux algèbres de Hopf et notre collaboration a commencé par l'application du théorème de Milnor-Moore à l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$. Le théorème de Milnor-Moore montre qu'elle est duale de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie graduée $\underline{G}$ dont une base est donnée par les graphes 1-particule irréductibles. Le crochet de Lie de deux graphes est obtenu par insertion d'un graphe dans l'autre. Le groupe de Lie correspondant G est le groupe des caractères de $\mathcal{H}$.

Nous avons ensuite analysé le groupe G et montré qu'il est produit semi-direct d'un groupe abélien par un groupe très relié au groupe des difféomorphismes des constantes de couplage sans dimension de la théorie des champs (voir section IX).

L'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ admet plusieurs graduations naturelles. Il suffit de donner le degré des graphes 1PI puis de poser en général,

$$(15) \quad \deg(\Gamma_1 \dots \Gamma_e) = \sum \deg(\Gamma_j), \quad \deg(1) = 0$$

On doit vérifier que,

$$(16) \quad \deg(\gamma) + \deg(\Gamma/\gamma) = \deg(\Gamma)$$

pour tout sous-graphe admissible γ .

Les deux graduations les plus naturelles sont

$$(17) \quad I(\Gamma) = \text{nombre de faces internes } \Gamma$$

et

$$(18) \quad v(\Gamma) = V(\Gamma) - 1 = \text{nombre de sommets } \Gamma - 1.$$

On a aussi la combinaison importante

$$(19) \quad L = I - v = I - V + 1$$

qui est le nombre de boucles du graphe.

Soit G un graphe 1PI avec n faces externes indexées par $i \in \{1, \dots, n\}$, on spécifie sa structure externe en donnant une distribution σ définie sur un espace convenable de fonctions test $\mathcal{S}$ sur

$$(20) \quad \left\{ (p_i)_{i=1, \dots, n} ; \sum p_i = 0 \right\} = E_G.$$

Ainsi σ est une forme linéaire continue,

$$(21) \quad \sigma : \mathcal{S}(E) \rightarrow \mathbb{C}.$$

A un graphe Γ de structure externe σ correspond un élément de $\mathcal{H}$ et on a

$$(22) \quad \delta_{(\Gamma, \lambda_1 \sigma_1 + \lambda_2 \sigma_2)} = \lambda_1 \delta_{(\Gamma, \sigma_1)} + \lambda_2 \delta_{(\Gamma, \sigma_2)}.$$

Nous appliquons alors le théorème de Milnor-Moore à l'algèbre de Hopf bigraduée $\mathcal{H}$. Ce théorème donne une structure d'algèbre de lie sur,

$$(23) \quad \bigoplus_{\Gamma} \mathcal{S}(E_{\Gamma}) = L$$

où pour chaque graphe 1PI Γ , on définit $\mathcal{S}(E_{\Gamma})$ comme dans (20). Soit $X \in L$ et soit Z_X la forme linéaire sur $\mathcal{H}$ donnée, sur les monomes Γ , par

$$(24) \quad \langle \Gamma, Z_X \rangle = 0$$

sauf si Γ est connexe et 1PI, et dans ce cas par,

$$(25) \quad \langle \Gamma, Z_X \rangle = \langle \sigma_{\Gamma}, X_{\Gamma} \rangle$$

où σ_{Γ} est la distribution qui donne la structure externe de Γ et X_{Γ} la composante correspondante de X . Par construction Z_X est un caractere infinitésimal de $\mathcal{H}$ ainsi que les commutateurs,

$$(26) \quad [Z_{X_1}, Z_{X_2}] = Z_{X_1} Z_{X_2} - Z_{X_2} Z_{X_1}.$$

Le produit étant obtenu par transposition du coproduit de $\mathcal{H}$, i.e. par

$$(27) \quad \langle Z_1 Z_2, \Gamma \rangle = \langle Z_1 \otimes Z_2, \Delta \Gamma \rangle.$$

Soient Γ_j , $j = 1, 2$ des graphes 1PI et $\varphi_j \in \mathcal{S}(E_{\Gamma_j})$ les fonctions test correspondantes. Pour $i \in \{0, 1\}$, soit $n_i(\Gamma_1, \Gamma_2; \Gamma)$ le nombre de sous-graphes de Γ isomorphes à Γ_1 et tels que

$$(28) \quad \Gamma / \Gamma_1(i) \simeq \Gamma_2.$$

Soit (Γ, φ) l'élément de L associé à $\varphi \in \mathcal{S}(E_{\Gamma})$, le crochet de Lie de (Γ_1, φ_1) et (Γ_2, φ_2) est donné par,

$$(29) \quad \sum_{\Gamma, i} \sigma_i(\varphi_1) n_i(\Gamma_1, \Gamma_2; \Gamma) (\Gamma, \varphi_2) - \sigma_i(\varphi_2) n_i(\Gamma_2, \Gamma_1; \Gamma) (\Gamma, \varphi_1).$$

THÉORÈME ([11]) *L'algèbre de Lie L est produit semi-direct d'une algèbre de Lie Abélienne L_0 par L_c où L_c admet une base canonique indexée par les graphes $\Gamma^{(i)}$ avec*

$$[\Gamma, \Gamma'] = \sum_v \Gamma \circ_v \Gamma' - \sum_{v'} \Gamma' \circ_{v'} \Gamma$$

où $\Gamma \circ_v \Gamma'$ est obtenu en greffant Γ' sur Γ en v .

VII Renormalisation et problème de Riemann-Hilbert

Le problème de Riemann-Hilbert vient du 21^{ème} problème de Hilbert qu'il formulait ainsi ;

“Montrer qu'il existe toujours une équation différentielle Fuchsienne linéaire de singularités et monodromies données.”

Sous cette forme il admet une réponse positive due à Plemelj et Birkhoff (cf. [2] pour un exposé détaillé). Quand on le reformule pour les systèmes linéaires de la forme,

$$(30) \quad y'(z) = A(z) y(z) , \quad A(z) = \sum_{\alpha \in S} \frac{A_\alpha}{z - \alpha} ,$$

où S est l'ensemble fini donné des singularités, $\infty \notin S$, et les A_α sont des matrices complexes telles que

$$(31) \quad \sum A_\alpha = 0$$

pour éviter les singularités à ∞ , la réponse n'est pas toujours positive [4], mais la solution existe quand les matrices de monodromie M_α sont suffisamment proches de 1. On peut alors l'écrire explicitement sous la forme d'une série de polylogarithmes [25]. Une autre formulation du problème de Riemann-Hilbert, intimement liée à la classification des fibrés vectoriels holomorphes sur la sphère de Riemann $P_1(\mathbb{C})$, est en termes de la décomposition de Birkhoff

$$(32) \quad \gamma(z) = \gamma_-(z)^{-1} \gamma_+(z) \quad z \in C$$

où $C \subset P_1(\mathbb{C})$ désigne une courbe simple, C_- la composante connexe du complément de C contenant $\infty \notin C$ et C_+ la composante bornée.

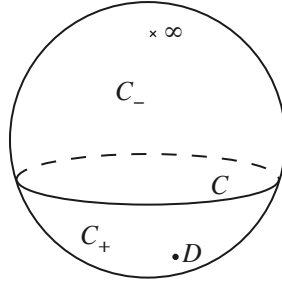


Figure 7

Les trois lacets γ et $\gamma_\pm$ sont à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$,

$$(33) \quad \gamma(z) \in G = GL_n(\mathbb{C}) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

et $\gamma_\pm$ sont les valeurs au bord d'applications holomorphes

$$(34) \quad \gamma_\pm : C_\pm \rightarrow GL_n(\mathbb{C}) .$$

La condition $\gamma_-(\infty) = 1$ assure l'unicité de la décomposition (32) si elle existe.

L'existence de la décomposition de Birkhoff (32) est équivalente à l'annulation,

$$(35) \quad c_1(L_j) = 0$$

des nombres de Chern $n_j = c_1(L_j)$ des fibrés en droites holomorphes de la décomposition de Birkhoff-Grothendieck,

$$(36) \quad E = \oplus L_j$$

où E est le fibré vectoriel holomorphe sur $P_1(\mathbb{C})$ associé à γ , i.e. d'espace total :

$$(37) \quad (C_+ \times \mathbb{C}^n) \cup_\gamma (C_- \times \mathbb{C}^n).$$

La discussion ci-dessus pour $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ s'étend au groupes de Lie complexes arbitraires.

Quand G est un groupe de Lie complexe nilpotent et simplement connexe l'existence (et l'unicité) de la décomposition de Birkhoff (32) est vraie pour tout γ . Quand le lacet $\gamma : C \rightarrow G$ se prolonge en un lacet holomorphe $: C_+ \rightarrow G$, la décomposition de Birkhoff est donnée par $\gamma_+ = \gamma$, $\gamma_- = 1$. En général, pour $z \in C_+$ l'évaluation,

$$(38) \quad \gamma \rightarrow \gamma_+(z) \in G$$

donne un principe naturel pour extraire une valeur finie à partir de l'expression singulière $\gamma(z)$. Cette extraction de partie finie est une division par la partie polaire pour un lacet méromorphe γ en prenant pour C un cercle infinitesimal centré en z_0 .

Soit G un groupe de Lie complexe pro-nilpotent, $\mathcal{H}$ son algèbre de Hopf de coordonnées (graduée). Rappelons la traduction entre langages algébriques et géométriques, en désignant par $\mathcal{R}$ l'anneau des fonctions méromorphes, $\mathcal{R}_-$ le sous anneau des polynômes en $(z - z_0)^{-1}$ et $\mathcal{R}_+$ celui des fonctions régulières en z_0 ,

<u>Homomorphismes de $\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{R}$</u>	<u>Lacets de C dans G</u>
$\phi(\mathcal{H}) \subset \mathcal{R}_-$	γ se prolonge en une application holomorphe de $\mathbb{C} \setminus \{z_0\} \rightarrow G$ avec $\gamma(\infty) = 1$.
$\phi(\mathcal{H}) \subset \mathcal{R}_+$	γ se prolonge en une application holomorphe définie en $z = z_0$.
$\phi = \phi_1 \star \phi_2$	$\gamma(z) = \gamma_1(z)\gamma_2(z), \forall z \in \mathbb{C}$.
$\phi \circ S$	$z \rightarrow \gamma(z)^{-1}$.

(7.1)

Pour $X \in \mathcal{H}$ notons le coproduit sous la forme

$$\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X + \sum X' \otimes X''$$

La décomposition de Birkhoff d'un lacet s'obtient de manière récursive grâce au théorème suivant,

THÉORÈME ([11]) *Soit $\phi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{R}$, un homomorphisme d'algèbres. La décomposition de Birkhoff du lacet correspondant est donnée de manière récursive par les égalités,*

$$\begin{aligned} \phi_-(X) &= -T \left(\phi(X) + \sum \phi_-(X') \phi(X'') \right) \\ \phi_+(X) &= \phi(X) + \phi_-(X) + \sum \phi_-(X') \phi(X''). \end{aligned}$$

Ici T désigne la projection sur $\mathcal{R}_-$ parallèlement à $\mathcal{R}_+$.

La clef de notre travail avec Dirk Kreimer réside dans l'identité entre ces formules et celles qui gouvernent la combinatoire des calculs de graphes. Nous avons déjà vu la formule qui définit la préparation d'un graphe,

$$(39) \quad \overline{R}(\Gamma) = U(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma) U(\Gamma/\gamma)$$

Celle qui donne le contreterme $C(\Gamma)$ est alors,

$$(40) \quad C(\Gamma) = -T(\overline{R}(\Gamma)) = -T \left(U(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma) U(\Gamma/\gamma) \right)$$

et celle qui donne la valeur renormalisée du graphe est,

$$(41) \quad R(\Gamma) = \overline{R}(\Gamma) + C(\Gamma) = U(\Gamma) + C(\Gamma) + \sum_{\gamma \subset \Gamma} C(\gamma) U(\Gamma/\gamma)$$

Il est alors clair en posant $\phi = U$, $\phi_- = C$, $\phi_+ = R$ que ces équations sont identiques à celles du théorème donnant la construction récursive de la décomposition de Birkhoff.

Décrivons plus en détails ce résultat. Etant donnée une théorie renormalisable en dimension D la théorie nonrenormalisée donne en utilisant la régularisation dimensionnelle un lacet γ d'éléments du groupe G associé à la théorie dans la section VI. Le paramètre z du lacet $\gamma(z)$ est une variable complexe et $\gamma(z)$ est méromorphe dans un voisinage de D . Notre résultat principal est que la théorie renormalisée est donnée par l'évaluation à $z = D$ de la partie nonsingulière γ_+ de la décomposition de Birkhoff ,

$$(42) \quad \gamma(z) = \gamma_-(z)^{-1} \gamma_+(z)$$

de γ .

Les règles de Feynman et la régularisation dimensionnelle associent un nombre,

$$(43) \quad U_\Gamma(p_1, \dots, p_N) = \int d^d k_1 \dots d^d k_L I_\Gamma(p_1, \dots, p_N, k_1, \dots, k_L)$$

à chaque graphe Γ . Nous les utilisons en métrique Euclidienne pour éviter les facteurs imaginaires.

Pour respecter les dimensions physiques des quantités impliquées quand on écrit ces règles en dimension d , il faut introduire une unité de masse μ et remplacer partout la constante de couplage par $\mu^{3-d/2} g$. On normalise ainsi les calculs par,

$$(44) \quad U(\Gamma) = g^{(2-N)} \mu^{-B} \langle \sigma, U_\Gamma \rangle$$

où $B = B(d)$ est la dimension de $\langle \sigma, U_\Gamma \rangle$.

On étend la définition (44) aux réunions disjointes de graphes 1PI Γ_j par,

$$(45) \quad U(\Gamma = \cup \Gamma_j) = \prod U(\Gamma_j).$$

Le résultat principal est alors le suivant :

THÉORÈME ([11]) a) *Il existe une unique application méromorphe $\gamma(z) \in G$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq D$ dont les Γ -coordonnées sont données par $U(\Gamma)_{d=z}$.*

b) *La valeur renormalisée d'une observable physique $\mathcal{O}$ est obtenue en remplaçant $\gamma(D)$ dans le développement perturbatif de $\mathcal{O}$ par $\gamma_+(D)$ où*

$$\gamma(z) = \gamma_-(z)^{-1} \gamma_+(z)$$

est la décomposition de Birkhoff du lacet $\gamma(z)$.

VIII Le groupe de renormalisation

Nous montrons comment le groupe de renormalisation apparait très simplement de notre point de vue.

Comme nous l'avons vu ci-dessus, la régularisation dimensionnelle implique le choix arbitraire d'une unité de masse μ et l'on constate d'abord que la partie singulière de la décomposition de Riemann-Hilbert de γ est en fait indépendante de ce choix. Il en résulte une contrainte très forte sur cette partie singulière et le groupe de renormalisation s'en déduit immédiatement. Nous en déduisons également une formule de scattering pour l'action nue. On montre d'abord, en se limitant à la théorie φ_6^3 pour simplifier les notations, que bien que le lacet $\gamma(d)$ dépende du choix de l'unité de masse μ ,

$$(46) \quad \mu \rightarrow \gamma_\mu(d),$$

la partie singulière $\gamma_{\mu-}$ de la décomposition de Birkhoff,

$$(47) \quad \gamma_\mu(d) = \gamma_{\mu-}(d)^{-1} \gamma_{\mu+}(d)$$

est en fait indépendante de μ ,

$$(48) \quad \frac{\partial}{\partial \mu} \gamma_{\mu-}(d) = 0.$$

Cet énoncé découle immédiatement de l'analyse dimensionnelle.

De plus, par construction le groupe de Lie G est gradué, avec le groupe à un paramètre d'automorphismes,

$$(49) \quad \theta_t \in \text{Aut } G, \quad t \in \mathbb{R},$$

associé à la graduation de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ donnée par le nombre de boucles,

$$(50) \quad L(\Gamma) = \text{nombre de boucles } \Gamma$$

pour tout graphe 1PI Γ .

On a l'égalité

$$(51) \quad \gamma_{e^t \mu}(d) = \theta_{t\varepsilon}(\gamma_\mu(d)) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon = D - d$$

Il en résulte que les lacets γ_μ associés à la théorie nonrenormalisée satisfont la propriété suivante : la partie singulière de leur décomposition de Birkhoff est inchangée par l'opération,

$$(52) \quad \gamma(\varepsilon) \rightarrow \theta_{t\varepsilon}(\gamma(\varepsilon)),$$

En d'autres termes, si l'on remplace $\gamma(\varepsilon)$ par $\theta_{t\varepsilon}(\gamma(\varepsilon))$ on ne change pas la partie singulière de la décomposition de Birkhoff. On a posé

$$(53) \quad \varepsilon = D - d \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Nous donnons une caractérisation complète des lacets $\gamma(\varepsilon) \in G$ vérifiant cette propriété. Cette caractérisation n'implique que la partie singulière $\gamma_-(\varepsilon)$ qui vérifie par hypothèse,

$$(54) \quad \gamma_-(\varepsilon) \theta_{t\varepsilon}(\gamma_-(\varepsilon)^{-1}) \text{ est convergent pour } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Il est facile de voir que la limite de (54) pour $\varepsilon \rightarrow 0$ définit un sous-groupe à un paramètre,

$$(55) \quad F_t \in G, \quad t \in \mathbb{R}$$

et que le générateur $\beta = \left(\frac{\partial}{\partial t} F_t\right)_{t=0}$ de ce sous-groupe est relié au *résidue* de γ

$$(56) \quad \text{Res}_{\varepsilon=0} \gamma = - \left(\frac{\partial}{\partial u} \gamma_- \left(\frac{1}{u} \right) \right)_{u=0}$$

par l'équation,

$$(57) \quad \beta = Y \text{ Res } \gamma,$$

où $Y = \left(\frac{\partial}{\partial t} \theta_t\right)_{t=0}$ est la graduation.

Ceci est immédiat mais notre résultat ([12]) donne la formule suivante (59) qui exprime $\gamma_-(\varepsilon)$ en fonction de β . Introduisons le produit semi-direct de l'algèbre de Lie G (des éléments primitifs de $\mathcal{H}^*$) par la graduation. On a donc un élément Z_0 tel que

$$(58) \quad [Z_0, X] = Y(X) \quad \forall X \in \text{Lie } G.$$

La formule pour $\gamma_-(\varepsilon)$ est alors

$$(59) \quad \gamma_-(\varepsilon) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t(\frac{\beta}{\varepsilon} + Z_0)} e^{tZ_0}.$$

Les deux facteurs du terme de droite appartiennent au produit semi-direct du groupe G par sa graduation, mais leur rapport (59) appartient au groupe G .

Cette formule montre que toute la structure des divergences est uniquement déterminée par le résidu et donne une forme forte des relations de t'Hooft [21].

IX Le groupe G et les difféomorphismes

Bien entendu, on pourrait facilement objecter aux développements précédents en disant que le mystère de la renormalisation n'est pas complètement éclairci car le groupe G construit à partir des graphes de Feynman apparaît également mystérieux. Cette critique est complètement levée par la merveilleuse relation, basée sur la physique entre les algèbres de Hopf $\mathcal{H}$ des graphes et $\mathcal{H}_{cm}$ des difféomorphismes. Nous montrons, dans le cas de masse nulle, que la formule qui donne la constante de couplage effective,

$$(60) \quad g_0 = g Z_1 Z_3^{-3/2}$$

où $g Z_1 = g + \delta g$ et la constante de renormalisation du champ Z_3 sont considérées comme des séries formelles (en g) d'éléments de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$, définit en fait un homomorphisme d'algèbres de Hopf de l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}_{cm}$ des coordonnées sur le groupe des difféomorphismes formels de $\mathbb{C}$ tels que,

$$(61) \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = \text{id}$$

vers l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ de la théorie de masse nulle.

Il en résulte en transposant, une action formelle du groupe G sur la constante de couplage. Nous montrons en particulier que l'image par ρ de $\beta = Y \text{ Res } \gamma$ est la fonction β de la constante de couplage g .

Nous obtenons ainsi un corollaire du théorème principal qui se formule sans faire intervenir ni le groupe G ni l'algèbre de Hopf $\mathcal{H}$.

THÉORÈME [12] *Considérons la constante de couplage effective nonrenormalisée $g_{\text{eff}}(\varepsilon)$ comme une série formelle en g et soit $g_{\text{eff}}(\varepsilon) = g_{\text{eff}+}(\varepsilon) (g_{\text{eff}-}(\varepsilon))^{-1}$ sa décomposition de Birkhoff (opposée) dans le groupe des difféomorphismes formels. Alors le lacet $g_{\text{eff}-}(\varepsilon)$ est la constante de couplage nue et $g_{\text{eff}+}(0)$ la constante de couplage renormalisée.*

Comme la décomposition de Birkhoff d'un lacet à valeurs dans le groupe des difféomorphismes (formels) est évidemment liée à la classification des fibrés (non-vectoriels) holomorphes, ce résultat suggère qu'un tel fibré ayant pour base un voisinage de la dimension d de l'espace temps et pour fibre les valeurs (compléxifiées) des constantes de couplage devrait donner une interprétation géométrique de l'opération de renormalisation. Il faut tout de même noter que la décomposition de Birkhoff a lieu ici relativement à un cercle infinitésimal autour de d et qu'il s'agit de difféomorphismes formels.

Les résultats ci-dessus montrent qu'au niveau des développements perturbatifs le procédé de renormalisation admet une interprétation géométrique simple grâce au groupe G et à la décomposition de Riemann-Hilbert. Le problème essentiel consiste à passer du développement perturbatif à la théorie non-perturbative.

X Le groupe de renormalisation et la théorie de Galois aux places archimédiennes

Je terminerai cet exposé en revenant à Galois et en esquissant le rôle que le groupe de renormalisation devrait jouer pour comprendre la composante connexe du groupe des classes d'idèles de la théorie du corps de classe comme un groupe de Galois.

Pour formuler cette question de l'interprétation de la composante connexe du groupe des classes d'idèles comme un groupe de Galois, il faut remonter au rôle clef de la loi de réciprocité quadratique dans l'histoire de la théorie des nombres. Elle est démontrée en 1801 par Gauss dans ses "Disquisitiones" mais son énoncé était déjà connu d'Euler et de Legendre. La loi de réciprocité exprime, étant donnés deux nombres premiers p et q , une symétrie entre p et q dans la résolution de l'équation $x^2 = p$ modulo q . Elle montre par exemple que pour savoir si l'équation $x^2 = 5$ admet une solution modulo un nombre premier q il suffit de connaître le dernier chiffre de q dans son développement décimal, (par exemple 19 et 1999, ou 7 et 1997 donnent le même résultat) de sorte que les nombres premiers ainsi sélectionnés se répartissent en classes. Il a fallu plus d'un siècle pour comprendre conceptuellement la loi de réciprocité quadratique dont Gauss avait donné cinq ou six démonstrations, sous la forme de la théorie du corps de classe qui permet de calculer à partir de classes de nombres idéaux le groupe de Galois de l'extension Abélienne maximale d'un corps de nombres.

Plus généralement, soit k un corps *global*, i.e. un sous-corps discret cocompact d'un anneau localement compact (non discret) semi-simple et commutatif A . (Cf. Iwasawa *Ann. of Math.* **57** (1953).) L'anneau topologique A est canoniquement associé à k et s'appelle l'anneau des Adeles de k , on a,

$$(62) \quad A = \prod_{\text{res}} k_v,$$

où le produit est le produit restreint des corps locaux k_v indexés par les places de k . Les k_v sont les corps localement compacts obtenus comme complétions de k .

Quand la caractéristique de k est $p > 1$ i.e. quand k est un corps de fonctions sur $\mathbb{F}_q$, on a

$$(63) \quad k \subset k_{\text{un}} \subset k_{\text{ab}} \subset k_{\text{sep}} \subset \bar{k},$$

où $\bar{k}$ désigne une clôture algébrique de k , k_{sep} la clôture algébrique séparable, k_{ab} l'extension abélienne maximale et k_{un} , extension non ramifiée maximale, est obtenu en adjoignant à k les racines de l'unité d'ordre premier à p .

On définit le groupe de Weil W_k comme le sous-groupe de $\text{Gal}(k_{\text{ab}} : k)$ formé par les automorphismes de $(k_{\text{ab}} : k)$ qui induisent sur k_{un} une puissance entière de l'automorphisme de "Frobénius", θ ,

$$(64) \quad \theta(\mu) = \mu^q \quad \forall \mu \text{ racine de l'unité d'ordre premier à } p.$$

Le résultat principal de la théorie du corps de classe global est l'existence d'un isomorphisme canonique,

$$(65) \quad W_k \simeq C_k = GL_1(A)/GL_1(k),$$

de groupes localement compacts.

Quand k est de caractéristique nulle, i.e. un corps de nombres, on a un isomorphisme canonique,

$$(66) \quad \text{Gal}(k_{\text{ab}} : k) \simeq C_k/D_k,$$

où D_k est la composante connexe de l'élément neutre dans le groupe des classes d'idèles $C_k = GL_1(A)/GL_1(k)$, mais à cause des places Archimédiennes de k l'on n'a pas d'interprétation de C_k analogue au cas des corps de fonctions. Citons A. Weil [29], "La recherche d'une interprétation pour C_k si k est un corps de nombres, analogue en quelque

manière à l'interprétation par un groupe de Galois quand k est un corps de fonctions, me semble constituer l'un des problèmes fondamentaux de la théorie des nombres à l'heure actuelle ; il se peut qu'une telle interprétation renferme la clef de l'hypothèse de Riemann ...".

Cela signifie qu'aux places Archimédiennes (i.e. aux complétions de k qui donnent soit les nombres réels soit les nombres complexes), il devrait y avoir un groupe continu de symétries secrètement présent.

Mon intérêt pour ce problème vient de mon travail sur la classification des facteurs qui indiquait clairement que l'on possédait là, l'analogie de la théorie de Brauer qui est l'une des clefs de la théorie du corps de classe local.

Les groupes de Galois sont par construction des limites projectives de groupes finis attachés à des extensions finies. Pour obtenir des groupes connexes il faut évidemment relaxer cette condition de finitude, qui est la même que la restriction en théorie de Brauer aux algèbres simples centrales de dimension finie. Comme ce sont les places Archimédiennes de k qui sont à l'origine de la composante connexe D_k , il est naturel de considérer la question préliminaire suivante,

"Existe'il une théorie de Brauer non-triviale d'algèbres simples centrales sur $\mathbb{C}$."

J'ai montré dans [6] que la classification des facteurs *approximativement finis* sur $\mathbb{C}$ donnait une réponse satisfaisante à cette question. Ils sont classifiés par leur module,

$$(67) \quad \text{Mod}(M) \subseteq \mathbb{R}_+^*,$$

qui est un sous-groupe (virtuel) fermé de $\mathbb{R}_+^*$.

Ce groupe joue un rôle analogue dans le cas Archimédien au module des algèbres simples centrales sur un corps local nonarchimédien. Dans ce dernier cas le module se définit très simplement par l'action du groupe multiplicatif d'une algèbre simple centrale sur la mesure de Haar du groupe additif. La définition de $\text{Mod}(M)$ pour les facteurs est beaucoup plus élaborée.

Pour poursuivre l'analogie, le pas suivant consiste à trouver des exemples naturels de construction de facteurs comme produit croisé d'un corps K , extension transcendante de $\mathbb{C}$ par un groupe d'automorphismes. Dans nos recherches sur les variétés sphériques noncommutatives [7], avec M. Dubois-Violette, l'algèbre de Sklyanin ([27]) est apparue comme solution en dimension 3, du problème de classification formulé dans [13]. La représentations "régulière" de cette algèbre engendre une algèbre de von-Neumann intégrale directe de facteurs approximativement finis de type II_1 , tous isomorphes au facteur hyperfini R . Les homomorphismes correspondants de l'algèbre de Sklyanin ([28]) vers le facteur R se factorisent miraculeusement à travers le produit croisé du corps K_q des fonctions elliptiques, où le module $q = e^{2\pi i \tau}$ est réel, par l'automorphisme de translation par un nombre réel (mais en général irrationnel). On obtient ainsi le facteur R comme produit croisé de K_q par un sous-groupe du groupe de Galois, ([26]) en parfaite analogie avec la construction des algèbres simples centrales sur un corps local. Il reste à obtenir une construction semblable et naturelle du facteur R_∞ de type III_1 . Il est sans doute prématuré d'essayer d'identifier le corps K correspondant, qui devrait jouer le rôle de l'extension nonramifiée maximale $\mathbb{C}_{un}$ de $\mathbb{C}$ et être doté d'une action naturelle du groupe multiplicatif $\mathbb{R}_+^*$.

Ce corps K pourrait être relié à l'observation suivante concernant les "constantes" qui interviennent en théorie des champs. En fait les calculs des physiciens regorgent

d'exemples de "constantes" telles les constantes de couplage g des interactions (electromagnétiques, faibles et fortes) qui n'ont de "constantes" que le nom. Elles dépendent en réalité du niveau d'énergie μ auquel les expériences sont réalisées et sont donc des fonctions $g(\mu)$.

Le générateur du groupe de renormalisation est simplement $\mu\partial/\partial\mu$. L'on peut mettre l'exemple plus simple du corps K_q des fonctions elliptiques sous la même forme en passant aux fonctions loxodromiques, c'est à dire en posant $\mu = e^{2\pi iz}$ de sorte que la première périodicité (en $z \rightarrow z + 1$) est automatique alors que la deuxième s'écrit $g(q^2\mu) = g(\mu)$. Le groupe des automorphismes de la courbe elliptique est alors engendré par $\mu\partial/\partial\mu$.

Il est bien connu des physiciens que le groupe de renormalisation joue le rôle d'un groupe d'ambiguïté, l'on ne peut distinguer deux théories physiques qui appartiennent à la même orbite de ce groupe. Le parallèle avec Galois est alors évident si l'on se souvient ([26]) de la préface aux œuvres complètes de Galois dans laquelle Émile Picard écrivait

"Il aurait édifié dans ses parties essentielles, la théorie des fonctions algébriques d'une variable telle que nous la connaissons aujourd'hui. Les méditations de Galois portèrent encore plus loin ; il termine sa lettre en parlant de l'application à l'analyse transcendante de la théorie de l'ambiguïté. On devine à peu près ce qu'il entend par là, et sur ce terrain qui, comme il le dit est immense, il reste encore aujourd'hui bien des découvertes à faire".

Les points fixes du groupe de renormalisation sont les scalaires ordinaires, mais il se pourrait que la physique quantique conspire pour nous empêcher d'espérer une théorie physique construite comme point fixe du groupe de renormalisation. Les interactions fortes sont asymptotiquement libres et on peut les décrire ainsi à très hautes énergies, mais la présence du secteur électrodynamique montre qu'il est vain de vouloir s'en tenir à de tels points fixes pour décrire une théorie qui incorpore l'ensemble des forces observées. Le problème est le même dans le domaine infrarouge où les rôles des interactions fortes et électrodynamiques sont inversés.

Finalement l'idée ci-dessus est en accord avec la relation entre l'algèbre de Hopf des graphes et celles des nombres d'Euler-Zagier.

Je remercie vivement André Warusfel et Vincent Rivasseau pour leur aide dans l'élaboration de ce texte.

XI Références

- [1] M. ARTIN, J. TATE, M. VAN DEN BERGH, *Some algebras associated to automorphisms of elliptic curves*, *The Grothendieck Festschrift* Birkhauser (1990).
- [2] A. BEAUVILLE, *Monodromie des systèmes différentiels linéaires à pôles simples sur la sphère de Riemann*, *Séminaire Bourbaki* 45ème année, 1992-1993, n.765.
- [3] N. N. BOGOLIUBOV, O. PARASIUK *Acta Math.* **97**, 227 (1957) ;
K. HEPP, *Commun.Math.Phys.* **2**, 301 (1966).

- [4] A. BOLIBRUCH, *Fuchsian systems with reducible monodromy and the Riemann-Hilbert problem*, *Lecture Notes in Math.***1520**, 139-155(1992).
- [5] J. COLLINS, *Renormalization*, *Cambridge monographs in math. physics*, Cambridge University Press (1984).
- [6] A. CONNES, *Noncommutative Geometry and the Riemann Zeta Function* Mathematics : Frontiers and perspectives, IMU 2000 volume.
- [7] A. CONNES, M. DUBOIS-VIOLETTE, Noncommutative finite-dimensional manifolds. I. spherical manifolds and related examples. *Math QA/0107070*
- [8] A. CONNES, D. KREIMER, *Commun. Math. Phys.* **199**, 203 (1998); hep-th/9808042.
- [9] A. CONNES, D. KREIMER, Hopf algebras, renormalization and Noncommutative geometry *Comm.Math.Phys.*199 (1998) 203-242.
- [10] A. CONNES, D. KREIMER, Renormalization in Quantum Field Theory and the Riemann-Hilbert problem *J.High Energy Phys.* 09, 024 (1999).
- [11] A. CONNES, D. KREIMER, Renormalization in Quantum Field Theory and the Riemann-Hilbert problem I *Comm.Math.Phys.*210 (2000).
- [12] A. CONNES, D. KREIMER, Renormalization in quantum field theory and the Riemann-Hilbert problem II, the β function, diffeomorphisms and the renormalization group; hep-th/0003188 *Comm.Math.Phys.* (2001).
- [13] A. CONNES, G. LANDI, *Noncommutative manifolds, the instanton algebra and isospectral deformations*, *math.QA/0011194*.
- [14] A. CONNES, H. MOSCOVICI, Hopf algebras, cyclic cohomology and the transverse index theorem *Comm. Math. Phys.* 198 (1998) 199-246.
- [15] A. CONNES, H. MOSCOVICI, Cyclic Cohomology and Hopf Algebras, *Letters Math. Phys.* 48 (1999) 97-108.
- [16] M. DRESDEN, *Renormalization in historical perspective - The first stage*, in *Renormalization*, ed. L. Brown, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1994).
- [17] É. GALOIS, *Écrits et mémoires mathématiques d'Évariste Galois*. Gauthier Villars, Paris, London (1962).
- [18] K. GAWEDZKI, A. KUPIAINEN, *Exact renormalization of the Gross-Neveu model of quantum fields*, *Phys. Rev. Lett.***54**(1985);
J. Feldman, J. Magnen, V. Rivasseau, R. Seneor, *Massive Gross-Neveu model : a rigorous perturbative construction*, *Phys. Rev. Lett.***54**(1985).
- [19] J. GLIMM, A. JAFFE, *Quantum Physics*, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1987).

- [20] T. L. HANKINS, *Sir William Rowan Hamilton*. John Hopkins University Press, Baltimore, London (1980).
- [21] G. 'T HOOFT, *Nuclear Physics* **B 61** 455 (1973).
- [22] T. KRAJEWSKI, R. WULKENHAAR, *Eur.Phys.J.* **C7**, 697-708 (1999); hep-th/9805098.
- [23] D. KREIMER, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2.2**, 303 (1998); q-alg/9707029;
A. Connes, D. Kreimer, *Lett. Math. Phys.* **48**, 85 (1999); hep-th/9904044.
- [24] D. KREIMER, *Adv. Theor. Math. Phys.* **3.3** (1999); hep-th/9901099.
- [25] I. LAPPO-DANILEVSKII, *Mémoires sur la théorie des systèmes des équations différentielles linéaires*, Chelsea, New York (1953).
- [26] J. P. RAMIS, *Séries divergentes et théories asymptotiques*, Panoramas et synthèses, S. M. F. (1993), Tome **121**.
- [27] E.K. SKLYANIN, *Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation*, *Func. Anal. Appl.* **16** (1982), 263-270.
- [28] E.K. SKLYANIN, *Some algebraic structures connected with the Yang-Baxter equation. Representation of quantum algebras*, *Func. Anal. Appl.* **17** (1983), 273-284.
- [29] A. WEIL, *Sur la théorie du corps de classe*, *J. Math. Soc. Japan*, **3**, (1951).