Majorations, minorations, inégalités & encadrements...

Pour l'ensemble de ce TD, nous nous plaçons dans un ensemble ordonné.
Dans la plupart des exercices, il s'agit de comparer des éléments de $\mathbb{R}$.

1 Réflexes de manipulations algébriques

1.1 Comparaisons et manipulations grossières

Les règles de calculs suivantes correspondent aux premiers réflexes à avoir.
On notera que les premières règles ne donnent pas des équivalences entre inégalités. Elles sont parfois suffisantes mais souvent elles doivent être localement améliorées.
Ainsi, lorsqu'après une série de calculs, on obtient une inégalité pas assez précise, il faut penser à revenir aux exploitations de telles règles : c'est toujours là qu'on peut faire mieux !

— $\left\{\begin{array}{l} a \leqslant b \\ a' \leqslant b' \end{array}\right. \Longrightarrow a + a' \leqslant b + b'$

— $\left\{\begin{array}{l} a \leqslant b \\ \lambda > 0 \end{array}\right. \Longrightarrow \lambda a \leqslant \lambda b.$

— Si $a, b > 0$, alors : $a < b \Longleftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.
Si $a, b > 0$, alors : $a < b \Longleftrightarrow a^2 < b^2$.
Si $a, b < 0$, alors : $a < b \Longleftrightarrow a^2 > b^2$.
Si $a, b > 0$, alors : $a < b \Longleftrightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$
Si $a, b < 0$, alors : $a < b \Longleftrightarrow \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$
En revanche, on ne peut rien dire entre $\dfrac{1}{a}$ et $\dfrac{1}{b}$ si $a < 0 < b$.

Ces dernières inégalités seront généralisées plus loin...

▷ **Exercice 1.1.**

1. Si on veut majorer $a - b$, quelles majorations/minoration cherche-t-on à exploiter ?
2. Si on veut majorer λa, avec $\lambda < 0$, quelles majorations/minoration cherche-t-on à exploiter ?
3. Si on veut majorer $\dfrac{a}{b}$, quelles majorations/minoration cherche-t-on à exploiter ?

▷ **Exercice 1.2.**

1. Démontrer que $\left\{\begin{array}{l} 2 \leqslant a \leqslant 3 \\ 1 \leqslant b \leqslant 2 \end{array}\right. \Longrightarrow 2 \leqslant a^2 - \dfrac{2}{b} \leqslant 8$
2. Ordonner les nombres x, x^2, $\sqrt{x}$.
3. Donner l'exemple de nombres $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a < b$ et $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$

▷ **Exercice 1.3.**

1. Donner les propositions équivalentes à $a \leqslant \sqrt{b}$ et à $\sqrt{b} \leqslant a$.
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $x - \sqrt{x^2 + a^2} \leqslant 0$.
3. Quel est le signe de $x + \sqrt{x^2 + a^2}$?
4. Résoudre les inéquations $x - 2 \leqslant \sqrt{x - 1}$ et $\sqrt{x^2 - 4} \leqslant x - 4$.

1.2 Comparaison à zéro

Une première idée, simple, mais à laquelle on ne pense pas souvent : revenir à une comparaison à zéro. Cette règle peut se présenter dans les deux situations suivantes (avec équivalence)

— $a \leqslant b \Longleftrightarrow 0 \leqslant b - a$

— Si $\forall\, i \in \mathbb{N}_k,\, a_i \geqslant 0$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i = 0 \quad (\Leftarrow) \Rightarrow \forall\, i \in \mathbb{N}_k, a_i = 0$

▷ **Exercice 1.4.** Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$.

▷ **Exercice 1.5.** Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, $\dfrac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leqslant \sqrt{xy}$.

▷ **Exercice 1.6.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i^2+b_i^2) \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.
A quelle(s) condition(s) y a-t-il égalité ?

1.3 Inégalités et manipulation de valeurs absolues

On rappelle que pour a réel : $|a| = \max(a, -a)$.

1. En premier réflexe, on peut commencer par se débarasser des valeurs absolues :
$$|a| \leqslant h \Longleftrightarrow -h \leqslant a \leqslant h$$
2. On peut aussi rencontre des problèmes du type $|f(x)| \leqslant |g(x)|$, il suffit alors de faire une étude par intervalles : trouver les intervalles $I_{+,+}$ où $f \geqslant 0$ et $g \geqslant 0$, $I_{+,-}$ où $f \geqslant 0$ et $g < 0$, $I_{-,+}$ où $f < 0$ et $g \geqslant 0$ et $I_{-,-}$ où $f < 0$ et $g < 0$. On réalise ensuite une étude sur chacun des intervalles I où l'on remplace $|f|$ par f ou $-f\ldots$
3. Pour une addition (ou soustraction) de plusieurs nombres dans une même valeur absolue, on exploite souvent l'inégalité triangulaire
$$\forall\, a, b \in \mathbb{R}, \qquad \big||a|-|b|\big| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$$
4. Pour un produit, la règle est simple : $|a \times b| = |a| \times |b|$

▷ **Exercice 1.7.** Pour $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$, on note $N_1(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_i|$, $N_2(x) = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}$ et $N_\infty(x) = \displaystyle\max_{i\in\mathbb{N}_n}|x_i|$.
Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $N_\infty(x) \leqslant N_2(x) \leqslant N_1(x) \leqslant nN_\infty(x)$.

▷ **Exercice 1.8.** Résoudre $|x^2+2x-3| + |x+1| \leqslant |x-3|$

▷ **Exercice 1.9.** On suppose que $2 \leqslant |a| \leqslant 4$ et $5 \leqslant |b| \leqslant 6$.
Encadrer $|a+b|$, $|a+2b|$, $|a-2b|$, $\dfrac{a^2|b+1|}{|a-2b|}$.

1.4 Inégalités et parties entières

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand parmi les entiers plus petit que x.
On note $\theta(x) = x - \lfloor x \rfloor$ sa partie décimale (ou fractionnaire). On exploite très souvent l'encadrement :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$
Parfois, il est plus pratique de raisonner sur la partie décimale :
$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad \theta(x) \in [0, 1[$$
Notons l'identification possible (par unicité d'écriture) : si $x = a + b$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in [0, 1[$, alors $a = \lfloor x \rfloor$ et $b = \theta(x)$.

▷ **Exercice 1.10.**

1. Montrer que pour tous réels x : $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
2. Montrer que pour tous réels x, y : $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor$.
3. Montrer que pour tous réels x, y : $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

▷ **Exercice 1.11.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}$.

2 Manipulations fonctionnelles

2.1 Croissance de f

Si f est croissante sur I alors : $a \leqslant b (\in I) \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b)$
Si f est strictement croissante sur I alors : $a < b (\in I) \Longrightarrow f(a) < f(b)$

On peut améliorer en comparant deux fonctions :
Si $(f-g)' \geqslant 0$ sur $I=[a,b]$ et pour $x_0 \in I$, $f(x_0) = g(x_0)$
alors $f(x) \leqslant g(x)$ sur $[a, x_0]$ et $f(x) \geqslant g(x)$ sur $[x_0, b]$.

Pour démontrer ce dernier résultat, on peut exploiter le premier résultat dans le cas $f-g$ croissante sur $[a,b]$, nulle en x_0, donc négative sur $[a, x_0]$ et positive sur $[x_0, b]$.

▷ **Exercice 2.1.** A-t-on l'équivalence : f est croissante sur $I \Longleftrightarrow a \leqslant b (\in I) \Longrightarrow f(a) \leqslant f(b)$

▷ **Exercice 2.2.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$.

2.2 Inégalité des accroissements finis, ou inégalité de la moyenne

Si f est continue sur $I=[a,b]$. Alors $\min\limits_{[a,b]} f \times (b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \max\limits_{[a,b]} f \times (b-a)$
Nous verrons en cours, que si f est continue sur $[a,b]$, alors les notations $\min\limits_{[a,b]} f$ et $\max\limits_{[a,b]} f$ ont bien un sens

De manière presqu'équivalente :
Si f dérivable sur $]a,b[$, continue sur $[a,b]$, et que $m \leqslant f' \leqslant M$, alors $m \times (b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$.
Avec des valeurs absolues :
Si f dérivable sur $]a,b[$, continue sur $[a,b]$, et que $|f'| \leqslant M$, alors $|f(b) - f(a)| \leqslant M|b-a|$.

▷ **Exercice 2.3.** Démontrer que $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \dfrac{1}{k}$.

▷ **Exercice 2.4.** Démontrer que $\forall\ a, b \in \mathbb{R}$, $|\sin a - \sin b| \leqslant |a-b|$.

▷ **Exercice 2.5.** Démontrer que si $0 < a < b$, $\sqrt[3]{1+b} - \sqrt[3]{1+a} \leqslant \dfrac{1}{3}(b-a)$.

▷ **Exercice 2.6.** En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer qu'il existe une réel C tel que :

$$\forall\ u \in [0,1[, \qquad \left| \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{\sqrt{2(1-u)}} \right| \leqslant C\sqrt{1-u}$$

2.3 Convexité de f

Si f est convexe (dont une condition suffisante est $f'' > 0$) sur I :
alors $\forall\ a \leqslant b (\in I), \lambda \in [0,1]$, on a $f(\lambda a + (1-\lambda b)) \leqslant \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)$ (Inégalité des cordes)
Si f est convexe, derivable, on a également l'inégalité des tangentes :
alors $\forall\ a, b \in I$, on a $f'(a) \times (b-a) \leqslant f(b) - f(a)$ (Inégalité des tangentes)

▷ **Exercice 2.7.** Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $x \geqslant \ln(1+x)$
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant e^x$
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $x \leqslant \mathrm{sh} x$.

▷ **Exercice 2.8.** Encadrer x^2 sur $[0,1]$ par sa tangente en 1 et sa cordeen 0 et en 1.
Encadrer $\sqrt{1+x}$ sur $[0,1]$ par sa tangente en 0 et sa corde en 0 et en 1.

3 Inégalités avec des suites

3.1 Retour du téléscopage

On rappelle l'inégalité suivante vu sur la fiche du télescopage :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leqslant \alpha_n \qquad \Longrightarrow \qquad u_n \leqslant u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k$$

▷ **Exercice 3.1.** En exploitant une égalité vue plus haut (exercice 2.2), calculer la limite de $(P_n) = \left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right)_n$.

3.2 Conservation de l'inégalité par passage à la limite

(u_n) et (v_n) convergentes et $\forall\ n \geqslant N : u_n \leqslant v_n \Longrightarrow \lim(u_n) \leqslant \lim(v_n)$.

▷ **Exercice 3.2.** On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Démontrer que la suite (S_n) est croissante.
2. Démontrer que pour tout entier $k \geqslant 2$: $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$
3. La suite (S_n) est-elle convergente ?

3.3 Exploiter une inégalités

Cette dernière règle est plutôt « l' » exploitation des inégalités qu'une façon de les démontrer.
(u_n) et (w_n) convergentes et $\forall\ n \geqslant N : u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
Et $\lim(u_n) = \lim(w_n) \Longrightarrow (v_n)$ converge et $\lim(v_n) \leqslant \lim(u_n)$.

▷ **Exercice 3.3.** Soit $u_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$, pour $n \in \mathbb{N}$.
Encadrer u_n et en déduire la convergence de (u_n) et sa limite.

4 Inégalités avec plusieurs variables inconnues

Ce qui caractérise les inégalités suivantes c'est qu'elles reposent sur un grand nombre de points $x_1, x_2, \ldots x_n$, sans que l'un ne soit particulièrement spécifié.

4.1 Retour de la convexité

Si f est convexe sur $I \subset \mathbb{R}$ (cf 2.4.), on a

$$\forall\ x_1 < x_2 < \cdots < x_n \in I, \forall\ (\lambda_1, \ldots \lambda_n) \in [0,1]^n \text{ tel que } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \quad f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

On appelle cette inégalité, l'inégalité de Jensen.
Elle peut se démontrer, par récurrence à partir de l'inégalité de convexité simple.
On rappelle que si f est dérivable deux fois, il faut et il suffit que $f'' \geqslant 0$ sur I pour affirmer que f est convexe.

▷ **Exercice 4.1.** Démontrer l'inégalité de Jensen

▷ **Exercice 4.2.** Soient $p, r \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1. En exploitant la concavité du logarithme, démontrer l'inégalité de Hölder :

$$\forall\ (a_1, \ldots a_n, b_1, \ldots b_n) \in \mathbb{R}_+^{2n} \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

2. En déduire, par récurrence sur n l'inégalité de Minkowski :

$$\forall\ (x_1,\dots x_n,y_1,\dots y_n)\in\mathbb{R}_+^{2n}\qquad \left(\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^p\right)^{1/p}\leqslant\left(\sum_{i=1}^n x_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^n y_i^p\right)^{1/p}$$

4.2 Inégalités classiques

Voici trois inégalités assez classiques. La première est, d'une certaine façon la mère de toutes. Seules les deux suivantes figurent au programme de MPSI/MP.

1. Inégalité de réarrangement.
   Pour tout $a=(a_1,\dots a_n)\in\mathbb{R}_+^n$, $b=(b_1,\dots b_n)\in\mathbb{R}_+^n$, rangés dans <u>l'ordre croissant</u>.

   Pour tout permutation σ de $\mathbb{N}_n$: $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_kb_{n-k}\leqslant\sum_{k=1}^n a_kb_{\sigma(k)}\leqslant\sum_{k=1}^n a_kb_k$.

2. Inégalité arithmético-géométrique.
   Pour tout $a=(a_1,\dots a_n)\in\mathbb{R}_+^n$, $\displaystyle\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$.

3. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

   Pour tout $a=(a_1,\dots a_n)\in\mathbb{R}^n$, $b=(b_1,\dots b_n)\in\mathbb{R}^n$, $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$.

   Pour tout $f,g\in\mathcal{C}(I)$, $\displaystyle\int_I f(t)g(t)\mathrm{d}t\leqslant\sqrt{\int_I f^2(t)\mathrm{d}t}\sqrt{\int_I g^2(t)\mathrm{d}t}$.

▷ **Exercice 4.3.** Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
On considère deux suites finies de réels **positifs** : $a_1,a_2,\dots,a_n$ et b_1,b_2,b_n.
On suppose que ces suites sont ordonnées : $a_1<a_2<a_3\cdots<a_{n-1}<a_n$ et $b_1<b_2<b_3\cdots<b_{n-1}<b_n$.
On considère une permutation de (b_i), que l'on note (c_i).
Autrement écrit ; à tout i de $[\![1,n]\!]$, correspond un unique j de $[\![1,n]\!]$ tel que $b_i=c_j$
Avec les (c_i), nous avons *perdu* l'ordre de (b_i).

Par la suite, on considère : $\displaystyle S_c=\sum_{i=1}^n a_ic_i=a_1c_1+a_2c_2+\cdots+a_nc_n$

1. Combien existe-t-il de telles suites (c_i) possible ?
2. On suppose que i et j sont tels que $b_n=c_j$ et $b_i=c_n$.
   Quel est le signe de $a_jc_j+a_nc_n-a_nb_n-a_jb_i$?
3. On considère la permutation (c'_i) obtenue à partir de (b_i) par : $\forall\ h\notin\{j,n\}$, $c'_h=c_h$, $c'_j=b_i$ et $c'_n=b_n$.
   (Il s'agit bien d'une permutation, car comme $h\neq n$, $c_h\neq c_n=b_i$. On peut prendre $c'_j=b_i$).

   Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^n a_kc_k<\sum_{k=1}^n a_kc'_k$
4. (*) Démontrer alors, par récurrence sur $n\geqslant 2$, le résultat suivant :
   pout toute permutation (c_i) de (b_i), on a

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n a_ib_{n-i+1}}_{=S_{-b}}<\underbrace{\sum_{i=1}^n a_ic_i}_{=S_c}<\underbrace{\sum_{i=1}^n a_ib_i}_{=S_b}$$

▷ **Exercice 4.4.** Démonter l'inégalité de Tchebychev : $\displaystyle\frac{\sum_{k=1}^n a_kb_k}{n}\leqslant\frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n}\times\frac{\sum_{k=1}^n b_k}{n}$, pour $(a_1,\dots a_n)\in\mathbb{R}^n$, $(b_1,\dots b_n)\in\mathbb{R}^n$, rangés dans l'ordre croissant

▷ **Exercice 4.5.** Démontrer l'inégalité arithmético-géométrique à partir de l'inégalité de réarrangement, en prenant $c=\sqrt[n]{x_1\dots x_n}$, puis $\displaystyle a_k=\frac{x_1x_2\dots x_k}{c^k}$ et $\displaystyle b_k=\frac{1}{a_k}$.

▷ **Exercice 4.6.** Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à partir de l'inégalité de réarrangement

On verra une démonstration plus classique au cours de l'année.

5 Problèmes d'application

▷ **Exercice 5.1.** Montrer que pour tout $(t,x) \in [0,1] \times [-1,1]$, $2 - x - xt^2 \geqslant \frac{3}{2}(1-x)$

▷ **Exercice 5.2.** Soit (u_n) une suite réelle. On définit la suite (v_n) par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$.

1. Montrer que si (u_n) est croissante, alors (v_n) est également croissante.
2. Montrer que si (u_n) est majorée, alors (v_n) est également majorée.
3. Montrer que si (u_n) est bornée, alors (v_n) est également bornée.

▷ **Exercice 5.3.** 1. Démontrer que pour tout $x \in [0,1]$, $x(1-x) \in [0, \frac{1}{4}]$.

2. Soit a un réel positif. Quel est le maximum du produit xy, où x et y sont deux réels positifs dont la somme vaut a ?
3. Soient $a \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, x_2, \ldots x_n) \in [0,a]^n$. Montrer que l'un au moins des produits $P_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$ et $Q_n = \prod_{i=1}^{n}(a - x_i)$ est inférieur à $\left(\frac{a}{2}\right)^n$

▷ **Exercice 5.4.** On note pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^n}{n!} - \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

1. Calculer $M_n = \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} f_n(x)$. Quelle est la limite de (M_n) ?
2. On fixe $A > 0$. Calculer $R_n = \sup\limits_{x \in [0,A]} f_n(x)$. Quelle est la limite de (R_n) ?

▷ **Exercice 5.5.** 1. Démontrer que pour tout réel positif x et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant x - n\ln(1 + \frac{x}{n}) \leqslant \frac{x^2}{2n}$.

2. Démontrer que, pour tout couple (u,v) de réels tels que $u \leqslant v$, $0 \leqslant e^v - e^u \leqslant (v-u)e^v$.
3. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant e^x - (1 + \frac{x}{n})^n \leqslant \frac{x^2}{2n}e^x$.
4. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

▷ **Exercice 5.6.** Minimiser $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{(x+y)(y+z)(x+z)}$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^3$.

▷ **Exercice 5.7.** Montrer que, pour $a,b,c,d > 0$, $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \geqslant \sqrt[3]{\dfrac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$.

6 Exercices supplémentaires

Correction des exercices

▷ Corrigé de l'exercice 1.1

1. Il faut majorer a et minorer b afin de majorer $-b$.
   Puis on applique la règle de l'addition.
2. Comme $\lambda < 0$, le sens de l'inégalité sera inversé lors de la multiplication par λ.
   Donc on cherche à minimise a.
3. L'application $b \mapsto \frac{a}{b}$ est décroissante donc, il faut minorer b par b^prime (par exemple) et majorer a par B.
   On a alors $\frac{a}{b} \leqslant \frac{a}{b'} \leqslant \frac{A}{b'}$.

▷ Corrigé de l'exercice 1.2 emph

1. On a donc, puisque a est positif $(a \geqslant 2 > 0)$: $4 \leqslant a^2 \leqslant 9$.
   De même : b est positif $(b \geqslant 1 > 0)$: $1 \geqslant \frac{1}{b} \geqslant \frac{1}{2}$ et donc $-2 \leqslant -\frac{2}{b} \leqslant -\frac{2}{2} = -1$.
   Par addition : $4 - 2 = 2 \leqslant a^2 - \frac{2}{b} \leqslant 9 - 1 = 8$
2. Si $x > 1$: $x^2 > x > \sqrt{x}$.
   Si $x \in]0, 1[$: $x^2 < x < \sqrt{x}$.
   Si $x < 0$, alors $x < 0 < x^2$ et $\sqrt{x}$ n'a pas de sens.
3. Par décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$, pour trouver une solution, nous ne pouvons pas nous placer uniquement sur l'un ou l'autre de ces intervalles.
   Donc prenons $a < 0 < b$, on a alors $\frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$

▷ Corrigé de l'exercice 1.3

1. Sans information supplémentaire sur le signe de a et b, on peut supposer $b > 0$, sinon on ne pourrait pas écrire $\sqrt{b}$ (pour les deux questions-.
   On a alors la première équivalence : $a \leqslant \sqrt{b} \iff a^2 \leqslant b$ ou $a < 0$.
   En effet, il suffit que $a < 0$ pour avoir $a \leqslant \sqrt{b}$ et sinon, on compose par $x \mapsto x^2$, croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   Et la seconde équivalence : $\sqrt{b} \leqslant a \iff b \leqslant a^2$ et $0 \leqslant a$.
   En effet, cette dernière condition est nécessaire. Et elle est suffisante pour pouvoir composer par $\sqrt{\cdot}$.
2. Si $x < 0$, alors $x - \sqrt{x^2 + a^2}$ est l'addition de deux nombres négatifs. Donc ce nombre est négatif.
   Si $x \geqslant 0$, alors $\sqrt{x^2 + a^2} \geqslant \sqrt{x^2} = x$, donc $x - \sqrt{x^2 - a^2} \leqslant 0$.
3. $\sqrt{x^2 + a^2} \geqslant \sqrt{x^2} = |x|$, donc $\sqrt{x^2 + a^2} + x \geqslant |x| + x \geqslant -x + x = 0$
4. • Pour la première équation, l'ensemble de définition est $[1, +\infty[$.
   Si $x > 2$, alors $x - 2 < 0$ et donc nécessairement $x - 2 \leqslant \sqrt{x - 1}$.
   Si $1 \leqslant x \leqslant 2$, on a l'équivalence : $x - 2 \leqslant \sqrt{x - 1} \Longrightarrow (x - 2)^2 \leqslant x - 1$,
   par composition avec $u \mapsto u^2$, croissante sur $\mathbb{R}_+$. Et donc :

$$\begin{aligned} x - 2 \leqslant \sqrt{x - 1} \quad &\iff x^2 - 4x + 4 \leqslant x - 1 \iff x^2 - 5x + 5 = \left(x - \frac{5 - \sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{5 + \sqrt{5}}{2}\right) \leqslant 0 \\ &\iff x \in [\frac{5 - \sqrt{5}}{2}; \frac{5 + \sqrt{5}}{2}] \cap [1, 2] = [\frac{5 - \sqrt{5}}{2}; 2] \end{aligned}$$

   car $\frac{5 - \sqrt{5}}{2} \leqslant 2 \iff 5 - \sqrt{5} \leqslant 4 \iff 1 \leqslant \sqrt{5} \leqslant$ VRAI
   car $\frac{5 + \sqrt{5}}{2} \geqslant 2 \iff 5 + \sqrt{5} \geqslant 4 \iff 1 \geqslant -\sqrt{5} \leqslant$ VRAI
   L'ensemble des solutions est donc $[\frac{5 - \sqrt{5}}{2}; 2] \cup [2; +\infty[= [\frac{5 - \sqrt{5}}{2}; +\infty[$
   • Pour la seconde équation, l'ensemble de définition est $] - \infty, -2] \cup [2, +\infty[$.
   Si $x < 4$, alors $x - 4 < 0$ et donc nécessairement $\sqrt{x^2 - 4} \geqslant x - 4$.
   Si $x \geqslant 4$, on a l'équivalence : $\sqrt{x^2 - 4} \leqslant x - 4 \iff x^2 - 4 \leqslant (x - 4)^2 = x^2 - 8x + 16 \iff 8x \leqslant 20$,
   par composition avec $u \mapsto u^2$, croissante sur $\mathbb{R}_+$. Et donc $x \in [4, +\infty[\cap] - \infty; \frac{5}{2}] = \emptyset$:
   L'ensemble des solutions est donc $\emptyset$

▷ **Corrigé de l'exercice 1.4** Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$,

$$\sqrt{xy} \leqslant \frac{x+y}{2} \iff 0 \leqslant x + y - 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$$

▷ **Corrigé de l'exercice 1.5** Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+$, en composant par $t \mapsto \dfrac{2}{t}$ décroissante sur $\underline{\mathbb{R}_+}$

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leqslant \sqrt{xy} \iff \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geqslant \frac{2}{\sqrt{xy}} \iff \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 \geqslant 0$$

▷ **Corrigé de l'exercice 1.6** Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $a_i^2 + b_i^2 - 2a_ib_i = (a_i - b_i)^2$.

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 + b_i^2) \geqslant \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \iff \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i^2 - 2a_ib_i + b_i^2)\right) \iff \sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2 \geqslant 0$$

La somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls : $\forall\, i \in \mathbb{N}_n$, $a_i - b_i = 0$ i.e. $a_i = b_i$

▷ **Corrigé de l'exercice 1.7**

Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $|x_i| \leqslant N_\infty(x)$ et donc en sommant : $N_1(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n} N_\infty(x) = nN_\infty(x)$.

$N_1(x)^2 = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 + 2\sum_{i<j}|x_i||x_j| \geqslant \sum_{i=1}^{n}|x_i|^2 = N_2(x)^2$.

On peut composer par $\sqrt{\cdot}$ croissante sur $\mathbb{R}_+$: $N_2(x) \leqslant N_1(x)$.

Enfin, il existe i_0 tel que $|x_{i_0}| = N_\infty(x)$, on a donc $N_2(x)^2 \geqslant |x_{i_0}|^2 = N_\infty(x)^2$.

On peut composer par $\sqrt{\cdot}$ croissante sur $\mathbb{R}_+$: $N_\infty(x) \leqslant N_2(x)$.

Notons également (mais cela n'est pas demandé) : d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (voir 4.2.) : $N_1(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_i|1 \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}1} = \sqrt{n}N_2(x)$.

▷ **Corrigé de l'exercice 1.8** On note $f : x \mapsto |x^2 + 2x - 3| + |x + 1| - |x - 3|$.

On étudie le signe de chacune des expressions dans les valeurs absolues :

$$x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) \leqslant 0 \iff x \in [-3, 1]$$

On peut donc revenir à l'étude sur les intervalles suivants.

	$-\infty$	-3	-1	1	3	$+\infty$
$\lvert x^2+2x-3\rvert$	x^2+2x-3	$-x^2-2x+3$	$-x^2-2x+3$	x^2+2x-3	x^2+2x-3	
$\lvert x+1\rvert$	$-x-1$	$-x-1$	$x+1$	$x+1$	$x+1$	
$\lvert x-3\rvert$	$-x+3$	$-x+3$	$-x+3$	$-x+3$	$x-3$	
$f(x)$	x^2+2x-1	$-x^2-4x+7$	$-x^2-2x+7$	x^2+2x+1	x^2+4x-5	

Il reste à résoudre chacune des inéquations $f(x) \leqslant 0$ sur chacun des 5 intervalles.

• Sur $]-\infty, -3]$: $x^2 + 2x - 1$ a pour discriminant $\Delta = 8$, les racines sont $-1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$.
  Les solutions acceptables, ici sont les éléments de $]-\infty,-3] \cap [-1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}] = \emptyset$.

• Sur $[-3, -1]$: $-x^2 - 4x + 7$ a pour discriminant $\Delta = 16 + 28 = 44$, les racines sont $-2-\sqrt{11}$ et $-2+\sqrt{11}$.
  Les solutions acceptables, ici sont les éléments de $[-3,-1] \cap \Big(]-\infty, -2-\sqrt{11}] \cup [-2+\sqrt{11}, +\infty[\Big) = \emptyset$.

• Sur $[-1, 1]$: $-x^2 - 2x + 7$ a pour discriminant $\Delta = 32$, les racines sont $-1-2\sqrt{2}$ et $-1+2\sqrt{2}$.
  Les solutions acceptables, ici sont les éléments de $[-1,1] \cap \Big(]-\infty, -1-2\sqrt{2}] \cup [-1+2\sqrt{2}, +\infty[\Big) = \emptyset$.

• Sur $[1, 3]$: $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geqslant 0$
  Les solutions acceptables, ici sont les éléments de $[1,3] \cap \{-1\} = \emptyset$

• Sur $[3, +\infty[$: $x^2 + 4x - 5$ a pour discriminant $\Delta = 36$, les racines sont -5 et 1.
  Les solutions acceptables, ici sont les éléments de $[3; +\infty[\cap [-5; 1] = \emptyset$.

Finalement, il n'y a pas de solution à cette inéquation.

▷ **Corrigé de l'exercice 1.9** • Par inégalité triangulaire : $|a + b| \leqslant |a| + |b| \leqslant 4 + 6 = 10$ (exact pour la situation possible $a = 4$ et $b = 6$).

Et de même $|a+b| = |b-(-a)| \geqslant |b| - |-a| = |b| - |a| \geqslant 5-4 = 1$ (exact pour la situation possible $b=5$ et $a=-4$). • Par inégalité triangulaire : $|a+2b| \leqslant |a| + 2|b| \leqslant 4+12 = 16$ (exact pour la situation possible $a=4$ et $b=6$).

Et de même $|a+2b| = |2b-(-a)| \geqslant 2|b| - |a| \geqslant 10-4 = 6$ (exact pour la situation possible $b=6$ et $a=2$). • Par inégalité triangulaire : $|a-2b| \leqslant |a| + 2|b| \leqslant 4+12 = 16$ (exact pour la situation possible $a=4$ et $b=-6$).

Et de même $|a-2b| = |2b-a| \geqslant 2|b| - |a| \geqslant 10-4 = 6$ (exact pour la situation possible $b=6$ et $a=-2$). • Pour le dénominateur, on exploite le résultat précédent.

Pour le numérateur : $16 = 4 \times \underbrace{4}_{b=-5} \leqslant a^2|b+1| \leqslant 16 \times 7 = 112$.

On trouve donc $1 = \dfrac{16}{16} \leqslant \dfrac{a^2|b+1|}{|a-2b|} \leqslant \dfrac{112}{6} = \dfrac{56}{3}$.

On notera que cet encadrement n'est pas optimal, puisque le numérateur est maximal lorsque b est maximal alors que le dénominateur est minimal pour b minimal. Il doit donc exister une situation optimale pour une valeur intermédiaire de b. On pourrait faire une étude de fonction $f_a : t \mapsto \dfrac{a^2(t+1)}{a-2t}\dots$

▷ Corrigé de l'exercice 1.10

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $x = \lfloor x \rfloor + \theta(x)$ et donc $x+1 = \lfloor x \rfloor + 1 + \theta(x)$.
   Or $\lfloor x \rfloor + 1 \in \mathbb{Z}$ et $\theta(x) \in [0,1[$.
   On a donc écrit la décomposition de $x+1$ en partie entière plus partie décimale.
   Ainsi pour tout réel x : $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
2. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. $x = \lfloor x \rfloor + \theta(x)$ et $y = \lfloor y \rfloor + \theta(y)$.
   Donc $x+y = \lfloor x \rfloor + \theta(x) + \lfloor y \rfloor + \theta(y) = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \theta(x) + \theta(y)$ Or $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \in \mathbb{Z}$ et $\theta(x) + \theta(y) \in [0,2[$.
   Donc si $\theta(x) + \theta(y) < 1$, on a $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
   et si $\theta(x) + \theta(y) \in [1,2[$, on a $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
   Dans tous les cas : pour tout réel x, y : $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor$.
3. Comme précédemment : $\lfloor x \rfloor = x - \theta(x)$, $\lfloor y \rfloor = y - \theta(y)$, $\lfloor x+y \rfloor = x+y-\theta(x+y)$,
   $\lfloor 2x \rfloor = 2x - \theta(2x)$ et $\lfloor 2y \rfloor = 2y - \theta(2y)$ On a alors l'équivalence : $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor \iff \theta(2x) + \theta(2y) \leqslant \theta(x) + \theta(y) + \theta(x+y)$.
   Montrer que pour tout réel x, y : $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$.

▷ Corrigé de l'exercice 1.11

Pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $kx - 1 < \lfloor kx \rfloor \leqslant kx$.
On additionne ces inégalités :

$$\frac{n(n+1)}{2}x - n = \sum_{k=1}^{n}(kx-1) < \sum_{k=1}^{n}\lfloor kx \rfloor \leqslant \sum_{k=1}^{n} kx = \frac{n(n+1)}{2}x$$

On divise par n^2, puis on passe à la limite. Comme $\dfrac{1}{n} \to 0$ et $\dfrac{n(n+1)}{2n^2} \to \dfrac{1}{2}$, le théorème de convergence par encadrement permet d'affirmer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2} = \frac{x}{2}$

▷ Corrigé de l'exercice 2.1

Oui, à condition d'associer nécessairement un $\forall\, a, \forall\, b$ dans la partie de droite (sinon, il n'y a pas équivalence)

▷ Corrigé de l'exercice 2.2

Notons $\varphi_1 : x \mapsto \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ et $\varphi_2 : x \mapsto \ln(1+x) - x$.

Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \geqslant 0$, $\varphi_1'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 - x = \dfrac{x^2}{1+x}$ et $\varphi_2'(x) = \dfrac{x}{1-x}$.

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_1'(x) \geqslant 0$ et $\varphi_2'(x) \leqslant 0$.

Par conséquent, φ_1 est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_1(x) \geqslant \varphi_1(0) = 0$ donc $\ln(1+x) \geqslant x - \dfrac{1}{2}x^2$.

et de même, φ_2 est décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_2(x) \leqslant \varphi_2(0) = 0$ donc $\ln(1+x) \leqslant x$.

Notons $\psi_1 : x \mapsto \sin(x) - x + \dfrac{x^3}{6}$ et $\psi_2 : x \mapsto \sin(x) - x + \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^5}{120}$.

Ces fonctions sont dérivables (infiniment) sur $\mathbb{R}_+$

et pour tout $x \geqslant 0$, $\psi_1'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{1}{2}x^2$ et $\psi_1''(x) = -\sin x + x$ et enfin $\psi_1^{(3)}(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

Donc ψ_1'' est croissante sur $\mathbb{R}$, ainsi : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\psi_1''(x) \geqslant \psi_1''(0) = 0$.

Donc ψ_1' est croissante sur $\mathbb{R}$, ainsi : $\forall\, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\psi_1'(x) \geqslant \psi_1'(0) = 0$.

Donc ψ_1 est croissante sur $\mathbb{R}$, ainsi : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\psi_1(x) \geqslant \psi_1(0) = 0$ donc $\sin(x) \geqslant x - \dfrac{1}{6}x^3$ et pour tout

$x \geqslant 0$, $\psi_2'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{x^4}{24}$ et $\psi_2''(x) = -\sin x + x - \dfrac{x^3}{6} = -\psi_1(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$.

Donc ψ_2'' est décroissante sur $\mathbb{R}$, ainsi : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\psi_2''(x) \leqslant \psi_2''(0) = 0$.

Donc ψ_2' est croissante sur $\mathbb{R}$, ainsi : $\forall\, x \in [0, \dfrac{\pi}{2}]$, $\psi_2'(x) \leqslant \psi_2'(0) = 0$.

Donc ψ_2 est croissante sur $\mathbb{R}$, ainsi : $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\psi_2(x) \leqslant \psi_2(0) = 0$ donc $\sin(x) \leqslant x - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{x^5}{120}$

▷ Corrigé de l'exercice 2.3

(Version avec l'intégrale)

Considérons $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$, continue sur $[k, k+1]$, décroissante sur $[k, k+1]$, donc pour tout $t \in [k, k+1]$, $f(k) \geqslant f(t) \geqslant f(k+1)$.

On intègre pour t entre k et $k+1$:

$$\frac{1}{k} = \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\mathrm{d}t \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln(k+1) - \ln k \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{k+1}$$

(Version avec l'I.A.F.)

Considérons $F : t \mapsto \ln t$ continue sur $[k, k+1]$ et dérivable sur $]k, k+1[$, de dérivée $F' : t \mapsto \dfrac{1}{t}$.

Avec $a = k$, $b = k+1$, $M = \sup\limits_{[k,k+1]} F' = \dfrac{1}{k}$ et $m = \inf\limits_{[k,k+1]} F'$, on trouve l'inégalité attendue.

▷ Corrigé de l'exercice 2.4

Soient $a < b$ deux réels quelconques, fixés.

Considérons $f : t \mapsto \sin t$ continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[a, b]$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]a, b[$, de dérivée $f' : t \mapsto \cos t$.

On a alors, pour tout $t \in [a, b]$, $|f'(t)| \leqslant 1$.

L'inégalité des accroissements finis (I.A.F.) permet d'affirmer : $|\sin(b) - \sin(a)| \leqslant 1 \times |b - a|$

▷ Corrigé de l'exercice 2.5

Soient $a < b$ deux réels strictement positifs, quelconques et fixés.

Considérons $f : t \mapsto \sqrt[3]{1+t}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $[a, b]$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $]a, b[$, de dérivée $f' : t \mapsto \dfrac{1}{3(1+t)^{2/3}}$.

On a alors, pour tout $t \in [a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $|f'(t)| \leqslant \dfrac{1}{3}$ car $1 + t \geqslant 1$.

L'inégalité des accroissements finis (I.A.F.) permet d'affirmer : $\sqrt[3]{1+b} - \sqrt[3]{1+a} \leqslant \dfrac{1}{3}(b - a)$.

▷ Corrigé de l'exercice 2.6

Soit $u \in [0, 1[$. Considérons $g : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{(1-u)(1+t)}}$ définie sur $[u, 1]$.

On a alors $g(u) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ et $g(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2(1-u)}}$.

Puis g est continue sur $[u, 1]$ et dérivable sur $]u, 1[$, de dérivée $g' : t \mapsto \dfrac{-1}{2\sqrt{(1-u)(1+t)^3}}$.

Comme $t \mapsto (1+t)^{3/2}$ est croissante, puis par passage à l'inverse et à l'opposé, g' est croissante.

Donc pour tout $t \in]u, 1[$, $g'(u) \leqslant g'(t) \leqslant g'(1) = \dfrac{-1}{4\sqrt{2}\sqrt{1-u}} \leqslant 0$.

Or $t \geqslant u \geqslant 0$, donc $g'(t) \geqslant \dfrac{-1}{2\sqrt{(1-u) \times 1}}$, donc $|g'(t)| \leqslant \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1-u}}$.

On a alors, $\left| \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2(1-u)}} \right| \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{1-u}}(1-u) = \dfrac{1}{2}\sqrt{1-u}$

▷ Corrigé de l'exercice 2.7

Soit $h_1 : x \mapsto \ln(1+x)$ deux fois dérivable sur $]-1, +\infty[$, de dérivées $h_1'(x) = \dfrac{1}{1+x}$ puis $h_1''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} \leqslant 0$.

Donc h_1 est concave sur $]-1, +\infty[$. On a l'inégalité des pentes :

$$\ln(1+x) - 0 = h_1(x) - h_1(0) \leqslant h_1'(0)(x-0) = 1(x-0) = x$$

Soit $h_2 : x \mapsto \exp(x)$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivées $h_2'(x) = h_2''(x) = e^x \geqslant 0$.

Donc h_2 est convexe sur $\mathbb{R}$. On a l'inégalité des pentes :

$$e^x \geqslant e^x - 1 = e^x - e^0 \geqslant h_2'(0)(x-0) = x$$

Soit $h_3 : x \mapsto \text{sh}(x)$ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivées $h_3'(x) = \text{ch}(x)$ puis $h_3''(x) = \text{sh}(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}_+$.
Donc h_3 est convexe sur $\mathbb{R}_+$. On a l'inégalité des pentes :

$$\text{sh}(x) = \text{sh}(x) - \text{sh}(0) \geqslant h_2'(0)(x-0) = 1(x-0) = x$$

▷ Corrigé de l'exercice 2.8

$x \mapsto x^2$ est convexe sur $[0,1]$. Elle se situe entre sa tangente (au-dessus) en 1 et sa corde (au-dessous) en 0 et 1

Sa tangente en 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$.

Sa corde en 0 et 1 a pour équation $y = \dfrac{f(1) - f(0)}{1-0}(x-0) + f(0) = x$.

Donc pour tout $x \in [0,1]$: $2x - 1 \leqslant x^2 \leqslant x$.

$x \mapsto \sqrt{1+x}$ est concave sur $[0,1]$ $(f\prime\prime(x) = \dfrac{-1}{4(1+x)^{3/2}} \leqslant 0$. Elle se situe entre sa tangente (au-dessous) en 1 et sa corde (au-dessus) en 0 et 1

Sa tangente en 0 a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0) = \dfrac{1}{2\sqrt{(0+1)}}(x-0) + f(0) = \dfrac{1}{2}x + 1$.

Sa corde en 0 et 1 a pour équation $y = \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}(x-0) + f(0) = (\sqrt{2}-1)x + 1$.

Donc pour tout $x \in [0,1]$: $(\sqrt{2}-1)x + 1 \leqslant \sqrt{1+x} \leqslant \dfrac{1}{2}x + 1$.

▷ Corrigé de l'exercice 3.1

On transforme le produit en une somme : $u_n := \ln(P_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{k}{n^2})$, puis on exploite un encadrement précédent :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{2n^4} u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^4} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^4} \to 0$.

Donc par encadrement : $u_n \to \dfrac{1}{2}$, et ainsi (par continuité de exp) : $P_n = \exp(u_n) \to \exp(\dfrac{1}{2})$.

▷ Corrigé de l'exercice 3.2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$, donc (S_n) est croissante
2. On a les équivalences :

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \iff \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k(k-1)} \iff k - 1 \leqslant k$$

   Elles sont vraies.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = 1 + 1 - \frac{1}{n} \leqslant 2$.
   Donc la suite (S_n) est croissante et majorée. Elle est donc convergente.

▷ Corrigé de l'exercice 3.3

Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$: comme $n+1 > 0$,

$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}$$

On peut additionner pour k de 1 à $2n+1$:

$$\sum_{k=1} 2n+1 \frac{1}{n+1} = \underbrace{\frac{2n+1}{n+1}}_{\to 2} \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{n} = \underbrace{\frac{2n+1}{n}}_{\to 2}$$

Par encadrement : $u_n \to 2$.

▷ **Corrigé de l'exercice 4.1**

Par récurrence. On note, pour tout $n \geqslant 1$,

$\mathcal{P}_n$: « $\forall\ x_1, x_2, \dots x_n \in I$, $\forall\ \lambda_1, \dots \lambda_n) \in [0,1]$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)\right) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$. »

— Le résultat est vrai pour $n = 1$ (un seul nombre et $\lambda_1 = 1$).

— Le résultat est vrai pour $n = 2$. C'est l'inégalité de convexité avec $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$.
On a pas besoin de le dire pour démontrer cette récurrence.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vrai.

Soient $x_1, x_2, \dots x_n, x_{n+1} \in I$ et $\lambda_1, \dots \lambda_n \in [0,1]$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$.

Notons $\Lambda = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et donc $\lambda_{n+1} = 1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 - \Lambda$.

Considérons $y = x_{n+1}$ et $x = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}{\Lambda}$.

On a donc (inégalité de convexité) :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) = f\big(\Lambda x + (1 - \Lambda x)\big) \leqslant \Lambda f(x) + (1-\Lambda) f(y) = \Lambda f(x) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}$$

Il faut vérifier (avant !) que $x \in I$ et en effet,

$$\Lambda \min(x_k) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \min(x_k) \leqslant \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}_{=\Lambda x} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \max(x_k) = \Lambda \max(x_k)$$

En divisant par $\Lambda > 0$ et comme I est un intervalle contenant $\min(x_k)$ et $\max(x_k)$, on a bien $x \in I$.
Revenons à l'inégalité précédente. On applique $\mathcal{P}_n$:

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\Lambda} x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\Lambda} x$$

car $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\Lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}{\Lambda} = \frac{\Lambda}{\Lambda} = 1$.

On a donc

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leqslant \Lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{\Lambda} x_i + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

▷ **Corrigé de l'exercice 4.2**

1. $\ln'' : x \mapsto \dfrac{-1}{x^2} \leqslant 0$. Donc ln est concave : $\ln(a^{1/p} b^{1/q}) = \dfrac{1}{p} \ln a + \dfrac{1}{q} \ln b \leqslant \ln(\dfrac{1}{p} a + \dfrac{1}{q} b)$.

   Et $a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \dfrac{1}{p} a + \dfrac{1}{q} b$, par croissance du logarithme

   On note $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k^p$ et $B = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} b_k^p$ Donc pour $a \leftarrow \dfrac{a_i^p}{A}$ et $b \leftarrow \dfrac{b_i^q}{B}$, on trouve après avoir sommé :

$$\frac{1}{A^{1/p} B^{1/q}} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \frac{1}{pA} \sum_{i=1}^{n} a_i^p + \frac{1}{qB} \sum_{i=1}^{n} b_i^q = \frac{1}{p}\frac{A}{A} + \frac{1}{q}\frac{B}{B} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

   Donc

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant A^{1/p} B^{1/q} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

2. D'après l'inégalité triangulaire :

$$|u_i + v_i|^p = (|u_i + v_i|)|u_i + v_i|^{p-1} \leqslant (|u_i| + |v_i|)|u_i + v_i|^{p-1} = |u_i| \times |u_i + v_i|^{p-1} + |v_i| \times |u_i + v_i|^{p-1}$$

$$\sum_{i=1}^{n} |u_i + v_i|^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} |u_i| \times |u_i + v_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |v_i| \times |u_i + v_i|^{p-1}$$

On applique l'inégalité de Holder deux fois :

$$\sum_{i=1}^{n}|u_i|\times|u_i+v_i|^{p-1}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|u_i+v_i|^{q(p-1)}\right)^{1/q}=\left(\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|u_i+v_i|^{p}\right)^{1/q}$$

car $1=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$, donc $\frac{1}{q}=\frac{p-1}{p}$ et donc $q(p-1)=p$. De même :

$$\sum_{i=1}^{n}|v_i|\times|u_i+v_i|^{p-1}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|v_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|u_i+v_i|^{q(p-1)}\right)^{1/q}=\left(\sum_{i=1}^{n}|v_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|u_i+v_i|^{p}\right)^{1/q}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{n}|u_i+v_i|^p\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|u_i+v_i|^{p}\right)^{1/q}+\left(\sum_{i=1}^{n}|v_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^{n}|u_i+v_i|^{p}\right)^{1/q}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|u_i+v_i|^{p}\right)^{1-\frac{1}{q}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^{n}|v_i|^p\right)^{1/p}$$

Ce qu'il fallait démontrer, puisque $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$.

▷ Corrigé de l'exercice 4.3

1. Il existe autant de suite c_i que de permutation de $\{1,2,\dots n\}$, les indices de (b_i).

   Donc il y a $n!$ suites (c_i) possible.

   Pour s'en convaincre, si on ne connait pas les factorielles, il suffit de penser au la méthode de construction des suites (c_i).
   1. *b_1 peut être donné au n c_i : n possibilités*
   2. *puis b_2 peut être donné au $n-1$ c_i qui restent : $n-1$ possibilités*
   3. *puis b_3 peut être donné au $n-2$ c_i qui restent : $n-2$ possibilités*

   k. ...

   n. puis b_n peut être donné au dernier c_i qui reste : 1 possibilités

   Le décompte total est obtenu par multiplication (puis)
2. On suppose que i et j sont tels que $b_n=c_j$ et $b_i=c_n$.
   Quel est le signe de $a_jc_j+a_nc_n-a_nb_n-a_jb_i$? On a donc

   $$a_jc_j+a_nc_n-a_nb_n-a_jb_i=a_jb_n+a_nb_i-a_nb_n-a_jb_i=(a_j-a_n)(b_n-b_i)$$

   Or par croissance : $a_j<a_n$ et $b_n>b_i$, donc $a_j-b_n<0$, $(b_n-b_i)>0$.

   Ainsi $a_jc_j+a_nc_n-a_nb_n-a_jb_i<0$
3. On considère la permutation (c'_i) obtenue à partir de (b_i) par : $\forall\ h\notin\{j,n\}$, $c'_h=c_h$, $c'_j=b_i$ et $c'_n=b_n$. (Il s'agit bien d'une permutation, car comme $h\neq n$, $c_h\neq c_n=b_i$, ce qui justifie que l'on puisse prendre $c'_j=b_i$).
   Alors

   $$\sum_{k=1}^{n}a_kc_k-\sum_{k=1}^{n}a_kc'_k=a_jc_j+a_nc_n-a_jc'_j-a_nc'_n=a_jc_j+a_nc_n-a_nb_n-a_jb_i<0$$

   $$\text{Donc }\sum_{k=1}^{n}a_kc_k<\sum_{k=1}^{n}a_kc'_k$$
4. Posons, pour tout entier $n\geqslant 2$,

   $$\mathcal{P}_n : \text{« pour toute permutation } (c_i) \text{ de } (b_i)\text{, alors } S_c\leqslant S_b \text{ »}$$

   — $a_1<a_2$ et $b_1<b_2$, alors $(a_1b_2+a_2b_1)-(a_1b_1+a_2b_2)=\underbrace{(a_1-a_2)}_{<0}\underbrace{(b_2-b_1)}_{>0}<0$.

   Donc $\mathcal{P}_2$ est vraie.

— Soit $n \geqslant 3$. On suppose que $\mathcal{P}_{n-1}$ est vraie.
Soit (c_i), une permutation de (b_i) et (c'_i) définie comme en question 3.
En réalité, comme $c'_n = b_n$, $(c'_1, \dots c'_{n-1})$ est une permutation de $(b_1, \dots b_{n-1})$.
Donc on peut applique $\mathcal{P}_{n-1}$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} a_k c'_k \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k$.
Si on ajoute de part et d'autre $a_n b_n = a_n c'_n$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k c'_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$.
Puis, d'après la question précédente : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k c_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k c'_k$.
Et donc par transitivité : $S_c \leqslant S_b$.

On a montré, par récurrence, une seule inégalité. Pour la seconde, nous allons exploiter la première.
Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, $\overline{b_k} = b_n - b_k$, donc la suite $\overline{b_k}$ est positive est strictement décroissante.
Soit (c_i), une permutation de (b_i), alors $(\overline{c_i} = b_n - b_i)$ est une permutation de $(\overline{b_i})$.
Donc d'après le résultat démontré par récurrence, (comme $(b_{n-k})_k$ est croissante) :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \overline{c_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b'_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} a_k (b_n - b_{n-k}) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_n - \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k b_n - \sum_{k=1}^{n} a_k c_k = \sum_{k=1}^{n} a_k (b_n - \overline{c_k}) = \sum_{k=1}^{n} a_k c_k$$

Et ainsi $S_{-b} \leqslant S_c$.

$$\text{Pout toute permutation } (c_i) \text{ de } (b_i), \text{ on a } \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i+1}}_{=S_{-b}} < \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i c_i}_{=S_c} < \underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}_{=S_b}$$

▷ **Corrigé de l'exercice 4.4** On considère (a_i) et (b_i) deux suites finies de nombres réels positifs croissantes.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{j=1}^{n} b'_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j = a_1 \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) + a_2 \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) + \dots + a_n \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$$

Notons, pour tout $i, k \in \mathbb{N}_n$, $c_{i,k} = \begin{cases} bi + k & \text{si} \quad i + k \leqslant n \\ bi + k - n & \text{si} \quad i + k > n \end{cases}$

i.e. pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, $b_j = \begin{cases} c_{i,j-i} & \text{si} \quad j > i \\ c_{i,j-i+n} & \text{si} \quad j \leqslant i \end{cases}$ $(j = i + k \Leftrightarrow k = j - i)$ Donc,

$$a_i \sum_{j=1}^{n} b_j = a_i \left(\sum_{j=1}^{i} b_j + \sum_{j=i+1}^{n} b_j\right) = a_i \left(\sum_{j=1}^{i} c_{i,n-i+j} + \sum_{j=i+1}^{n} c_{i,j-i}\right)$$

$$= a_i \left(c_{i,n-i+1} + + \dots + c_{i,n} + c_{i,1} + \dots c_{i,n-i}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_i c_{i,k}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_i c_{i,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_i c_{i,k}$$

Or, à k fixé, $(c_{i,k})$ est aussi une permutation de (b_j), donc d'après l'inégalité de réarrangement :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i c_{i,k} \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

En sommant pour k de 1 à n :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{j=1}^{n} b_j \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \sum_{k=1}^{n} 1 = n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

En divisant par n^2 :

$$\forall\ (a_i), (b_i) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \text{ croissantes } : \frac{a_1 b_1 + \dots a_n b_n}{n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \times \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}$$

▷ **Corrigé de l'exercice 4.5** On considère $x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}_+$.
En notant $m = \sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$, puis $A_i = \dfrac{x_1 x_2 \cdots x_i}{m^i}$,

$(a_i) = (A_k)$ ordonnée par ordre croissant et enfin (b_i) tel que $b_i = \dfrac{1}{a_i}$.
Par conséquent ces suites sont à valeurs positives, (a_i) est croissant et (b_i) décroissante.
On a donc pour toute permutation (c_i) de (b_i),

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \sum_{i=1}^n a_i c_i$$

Or $a_i b_i = 1$, donc $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i b_i = n$.
Puis avec c_i permutation de (b_i) tel que :

— si $b_i = \dfrac{1}{a_i} = \dfrac{1}{A_k} = \dfrac{m^k}{x_1 x_2 \cdots x_k}$ $(k \geqslant 2)$, alors $c_i = \dfrac{m^{k-1}}{x_1 x_2 \cdots x_{k-1}} = \dfrac{1}{A_{k-1}}$.
Et donc dans ce cas $a_i c_i = \dfrac{A_k}{A_{k-1}} = \dfrac{x_k}{m}$

— si $b_i = \dfrac{1}{a_i} = \dfrac{1}{A_1} = \dfrac{m^1}{x_1}$, alors $c_i = \dfrac{m^n}{x_1 x_2 \cdots x_k \cdots x_n} = 1$, le dernier b_j non considéré.
Alors, dans ce cas, $a_i c_i = A_1 \times 1 = \dfrac{x_1}{m}$

Ainsi : $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i c_i = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{m} \geqslant n$.

$$\forall\ (x_1, x_2, \dots x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \qquad \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

▷ **Corrigé de l'exercice 4.6** Les calculs donnent :

$$(a_1 b_1 + \cdots a_n b_n)^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_i a_j b_j \qquad (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \times (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^2 b_j^2$$

Il faut différencier ces n^2 nombres ajoutés :
$a_i b_j = c_k$ avec la transformation bijective : $k - 1 = (i-1) + n(j-1)$
(division euclidienne de $k-1$ par n : $i-1$ est le reste, $j-1$ est le quotient).
On a : $k = 1 \Leftrightarrow (i,j) = (1,1)$ / $k = 2 \Leftrightarrow (i,j) = (2,1)$ / ... / $k = n \Leftrightarrow (i,j) = (n,1)$
$k = n+1 \Leftrightarrow (i,j) = (1,2)$ / $k = n+2 \Leftrightarrow (i,j) = (2,2)$ / ... / $k = 2n \Leftrightarrow (i,j) = (n,2)$
$\vdots$
$k = n^2 - n + 1 \Leftrightarrow (i,j) = (1,n)$ / $k = n+2 \Leftrightarrow (i,j) = (2,n)$ / ... / $k = n^2 \Leftrightarrow (i,j) = (n,n)$
Notons donc pour tout $k \in [\![1, n^2]\!]$, $d_k = c_k$.
Les deux suites (identiques) $(c_k) = (d_k)$ se rangent exactement dans le même ordre.
Donc pour toute permutation (d'_k) de (d_k) :

$$\sum_{k=1}^{n^2} c_k d'_k \leqslant \sum_{k=1}^{n^2} c_k d_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^2 b_j^2$$

Or avec la permutation : $d'_k = d'_{(i-1)+n(j-1)+1} = a_j b_i = d_{(j-1)+n(i-1)+1}$,
on a $c_k d'_k = a_i b_j a_j b_i$, avec (i,j) défini par la relation : $k - 1 = (i-1) + n(j-1)$.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_i a_j b_j = \sum_{k=1}^n c_k d'_k \leqslant \sum_{k=1}^{n^2} c_k d_k = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i^2 b_j^2$$

$$(a_1 b_1 + \cdots a_n b_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2) \times (b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

▷ **Corrigé de l'exercice 5.1**
On peut évidemment travailler sur l'inégalité en question :

$$2 - x - xt^2 \geqslant \frac{3}{2}(1-x) \iff 4 - 2x - 2xt^2 \geqslant 3 - 3x \iff 1 + x(1 - 2t^2) \geqslant 0$$

$t \mapsto t^2$ est croissante sur $[0,1]$, donc $t \mapsto 1 - 2t^2$ est décroissante sur $[0,1]$ et donc $-1 \leqslant 1 - 2t^2 \leqslant 1$.
Puis également $x \in [-1, 1]$, donc $|x(1-2t^2)| \leqslant 1 \times 1 = 1$. Et donc $x(1-2t^2) \geqslant -1$.
Cela donne le résultat attendu.

▷ **Corrigé de l'exercice 5.2**

▷ **Corrigé de l'exercice 5.3**

▷ **Corrigé de l'exercice 5.4**

▷ **Corrigé de l'exercice 5.5**

▷ **Corrigé de l'exercice 5.6**

▷ **Corrigé de l'exercice 5.7**