Transformation du plan. Applications

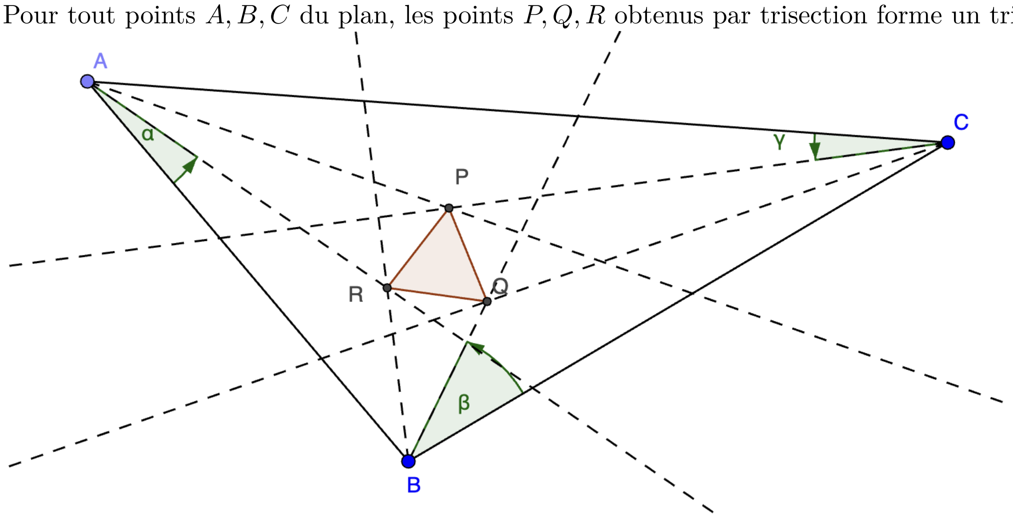
Exercice - Bijectivité...

Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. Montrer que : si $\forall\ A, B \subset E,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, alors f est injective.
2. Montrer que : $\exists\ A, B \subset E$ tels que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B) \Longrightarrow f$ non injective.
3. Qu'avez-vous démontrer avec ces deux implications ?

Problème - Théorème de Morley

Les trisectrices sont les droites qui découpent un angle en trois angles égaux.
L'objet de ce problème est de démontrer le théorème de Morley relatif aux trisectrices d'un angle.
Pour tout points A, B, C du plan, les points P, Q, R obtenus par trisection forme un triangle équilatéral.



Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthonormé direct qui permet de définir l'affixe complexe d'un point et le représentant d'un nombre complexe. Les nombres complexes a, b et c sont les affixes des trois points A, B et C respectivement. Les affixes de P, Q et R sont notés respectivement p, q et r.
Les nombres α, β, γ sont dans $\left]0, \frac{\pi}{3}\right[$ et tels que : $3\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad 3\beta = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \quad 3\gamma = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$
(les angles sont orientés : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$)

On note r_A, la rotation de centre A et d'angle 2α ; r_B, la rotation de centre B et d'angle 2β et r_C, la rotation de centre C et d'angle 2γ

1. Montrer que $r_C \circ r_A(P) = P$.
2. Donner les deux autres relations équivalentes
3. Montrer que $r_B^3 \circ r_C^3 \circ r_A^3 = \mathrm{id}$.
4. Montrer qu'on a l'équivalence :

$$DEF \text{ est un triangle équilatéral } \iff d + ej + fj^2 = 0 \text{ ou } d + fj + ej^2 = 0$$

5. Conclure que le triangle PQR est équilatéral.

Exercice - Bijectivité...

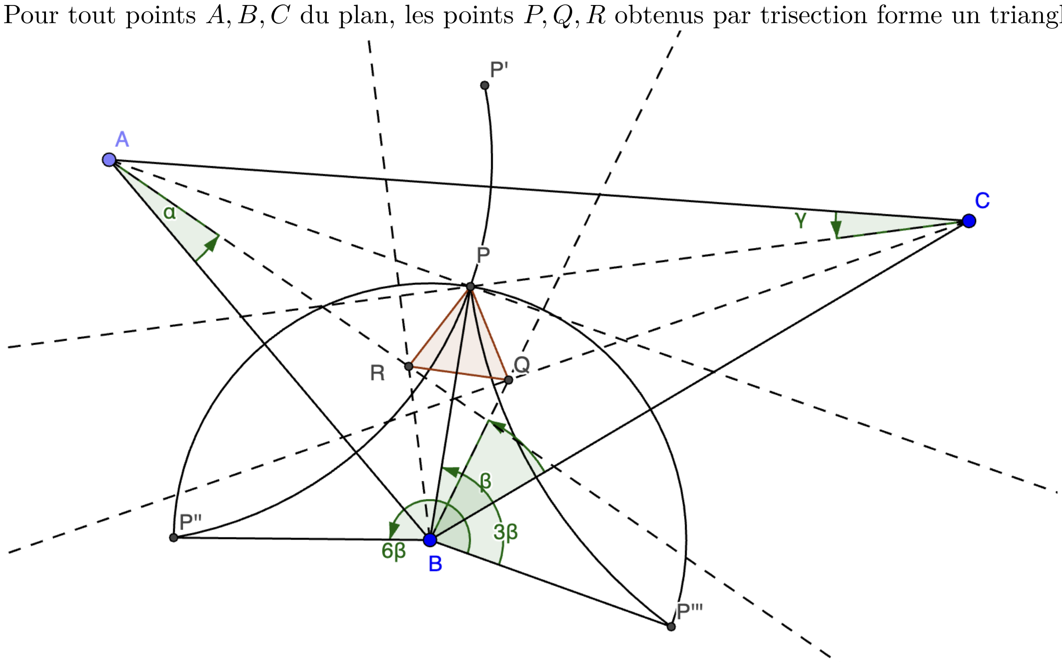
Soit E et F deux ensembles non vides et $f : E \to F$.

1. Supposons que $\forall\ A, B \subset E,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
   Soient $x, y \in E$ tel que $f(x) = f(y)$.
   Prenons $A = \{x\}$ et $B = \{y\}$, alors $\{f(x)\} = f(A) = f(B) = f(A \cap B) = f(A \cap B)$.
   Donc nécessairement $\{x\} \cap \{y\} \neq \emptyset$. Et nécessairement $x = y$.
   Donc f est injective.
2. Supposons qu'il existe $A, B \subset E$ tels que $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$.
   (Notons que dans tous les cas, on a l'inclusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
   Donc l'hypothèse qui nous intéresse est celle dans l'autre sens : $f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)$.
   D'après notre hypothèse, il existe deux ensembles bien précis notés A et B tels que ...
   C'est avec ceux-ci que l'on va travailler.
   On suppose donc ici que $f(A) \cap f(B) \not\subset f(A \cap B)$. Ainsi, il existe $z \in f(A) \cap f(B)$ et $z \notin f(A \cap B)$.
   Comme $z \in f(A)$ et $z \in f(B)$; alors il existe $x_1 \in A$, $x_2 \in B$ tel que $f(x_1) = z$ et $f(x_2) = z$.
   Et nécessairement $x_1 \neq x_2$, sinon $x_1 \in A \cap B$ et donc $z = f(x_1) \in f(A \cap B)$. Par conséquent, f non injective (il existe $x_1 \neq x_2$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$).
3. On a démontré l'équivalence :

$$\forall\ A, B \subset E,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) \Longleftrightarrow f \text{ injective.}$$

Problème - Théorème de Morley

Les trisectrices sont les droites qui découpent un angle en trois angles égaux.
L'objet de ce problème est de démontrer le théorème de Morley relatif aux trisectrices d'un angle.
Pour tout points A, B, C du plan, les points P, Q, R obtenus par trisection forme un triangle équilatéral.



Dans tout le problème, le plan est muni d'un repère orthonormé direct qui permet de définir l'affixe complexe d'un point et le représentant d'un nombre complexe. Les nombres complexes a, b et c sont les affixes des trois points A, B et C respectivement. Les affixes de P, Q et R sont notés respectivement p, q et r.
Les nombres α, β, γ sont dans $\left]0, \dfrac{\pi}{3}\right[$ et tels que : $3\alpha = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ $\quad 3\beta = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$ $\quad 3\gamma = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$
(les angles sont orientés : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$)

On note r_A, la rotation de centre A et d'angle 2α ; r_B, la rotation de centre B et d'angle 2β et r_C, la rotation de centre C et d'angle 2γ

1. On note $P' = r_A(P)$.
   Par définition de la rotation $(AP, AP') = 2\alpha$.
   Donc, comme $(AP, AC) = \alpha$, (AC) est la bissectrice (intérieure) de l'angle (AP, AP').
   (On peut aussi écrire que P' est le symétrique de P par rapport à (AC), ce n'est pas vrai pour $M \neq P$)
   Puis, toujours par définition de la rotation : $AP = AP'$, et donc finalement P et P' sont à égales distances de (AC).
   Cela signifie : $\forall\ M \in (AC) : MP = MP'$. En particulier $CP = CP'$.
   Puis comme l'angle $(CP', CP) = 2\beta$, on a donc $r_C(P') = P$.
   Donc $r_C(r_A(P)) = P$.
2. On a de même $r_B(r_C(Q)) = Q$ et $r_A(r_B(R)) = R$.
3. Montrer que $r_B^3 \circ r_C^3 \circ r_A^3 = \mathrm{id}$. D'abord, il est bon de montrer que la composée de deux rotations d'angle α et β, centrée en $X(x)$ et $Y(y)$ respectivement,
   est une rotation d'angle $\alpha + \beta$ et de centre Z (sans rapport avec X et Y) si $\alpha + \beta \neq 0[2\pi]$.
   ou bien une translation si $\alpha + \beta \equiv 0[2\pi]$.
   Cela se démontre par le calcul. Il s'agit de $r_1 : z \mapsto e^{i\alpha}(z - x) + x$ et $r_2 : z \mapsto e^{i\beta}(z - y) + y$.
   On a alors $r_1 \circ r_2(z) = e^{i\alpha}(e^{i\beta}(z - y) + y - x) + x = e^{i(\alpha+\beta)}z + ((1 - e^{i\alpha})x + e^{i\alpha}(1 - e^{i\beta})y)$.
   - Si $e^{i\alpha+\beta} \neq 0[2\pi]$, en prenant Z tel que $Z = e^{i(\alpha+\beta)}Z + ((1 - e^{i\alpha})x + e^{i\alpha}(1 - e^{i\beta})y)$
     i.e. $Z = \dfrac{(1 - e^{i\alpha})x + e^{i\alpha}(1 - e^{i\beta})y}{1 - e^{i(\alpha+\beta)}}$ on a $r_1 \circ r_2(z) = e^{i(\alpha+\beta)}(z - Z) + Z$.
   - Si $e^{i\alpha+\beta} \neq 0[2\pi]$, alors $r_1 \circ r_2(z) = z + ((1 - e^{i\alpha})x + e^{i\alpha}(1 - e^{i\beta})y)$. C'est une translation.

   Dans cette question, on compose 6 rotations, il faut donc commencer par regarder la somme des angles :
   $$3 \times 2\beta + 3 \times 2\gamma + 3 \times 2\alpha = 2 \times (3\alpha + 3\beta + 3\gamma) = 2\pi$$
   puisque la somme des angles dans un triangle rectangle vaut 2π.
   Donc il s'agit d'une translation. Il suffit de regarder l'image de n'importe quel point pour connaître le vecteur qui dirige cette translation.
   Prenons le point P'' tel que $r_A^2(P'') = P$.
   On l'obtient donc à partir de P par la rotation de centre A et d'angle -4α.
   C'est le point tel que $AP = AP''$, et (AB) bissectrice intérieure de (AP'', AP) (et donc $BP = BP''$).
   On a alors $r_C \circ r_A^3(P'') = r_C \circ r_A(P) = P$, donc $r_C^3 \circ r_A^3(P'') = r_C^2(P) = P'''$.
   tel que $CP = CP'''$, et (CB) bissectrice intérieure de (CP, CP''').
   Donc $BP''' = BP = BP''$.
   Et par ailleurs, on a l'égalité des angles : $(BP''', BC) = (BC, BP)$ et $(BP, BA) = (BA, BP'')$, donc $(BP'''), BP'') = 2(BC, BA) = 2 \times 3\beta$.
   Donc $r_B^3(P''') = P''$.
   Ainsi $r_B^3 \circ r_C^3 \circ r_A^3(P'') = P''$. Il s'agit de la translation de vecteur nulle.
   Il s'agit donc de l'identité.
4. On a les équivalences :
   $$\begin{aligned} DEF \text{ est un triangle équilatéral} &\iff e^{i\frac{\pi}{3}}(d - e) = (d - f) \text{ ou } e^{i\frac{\pi}{3}}(d - f) = (d - e) \\ &\iff (e^{i\frac{\pi}{3}} - 1)d - e^{i\frac{\pi}{3}}e + f = 0 \text{ ou } (e^{i\frac{\pi}{3}} - 1)d - e^{i\frac{\pi}{3}}f + e = 0 \\ &\iff jd + j^2e + f = 0 \text{ ou } jd + j^2f + e = 0 \\ &\iff d + je + j^2f = 0 \text{ ou } d + jf + j^2e = 0 \end{aligned}$$
   On notera que DEF est équilatéral dans le sens direct ssi $d + je + j^2f = 0 (\Leftrightarrow f + jd + j^2e = 0 \ldots)$.
   et dans le sens indirect ssi $d + jf + j^2e = 0$.
5. Les coordonnées de P, point fixe de $r_C \circ r_A$ vérifie $p = \dfrac{(1 - e^{2i\gamma})c + e^{2i\gamma}(1 - e^{2i\alpha})a}{1 - e^{2i(\alpha+\gamma)}}$.
   Notons que $\left(e^{2i\alpha} \times e^{2i\beta} \times e^{2i\gamma}\right)^3 = \left(e^{i\times 3(\alpha+\beta+\gamma)}\right)^2 = e^{2i\pi} = 1$.
   Donc il s'agit d'une racine troisième de l'unité. C'est j : l'argument $2(\alpha + \beta + \gamma)$ est plus petit que π.
   Ainsi : $e^{2i\alpha} \times e^{2i\beta} \times e^{2i\gamma} = j$ ou encore $e^{2i(\beta+\gamma)} = je^{-2i\alpha}$.
   Donc, en multipliant numérateur et dénominateur par $e^{2i\beta}$:
   $$p = \frac{(1 - e^{2i\gamma})e^{2i\beta}c + e^{2i(\gamma+\beta)}(1 - e^{2i\alpha})a}{e^{2i\beta} - j} = \frac{c' + e^{2i\gamma}a'}{e^{2i\beta} - j}e^{2i\beta}$$
   en notant $a' = a(1 - e^{2i\alpha})$, $b' = b(1 - e^{2i\beta})$ et $c' = c(1 - e^{2i\gamma})$.
   De même $q = \dfrac{b' + e^{2i\beta}c'}{e^{2i\alpha} - j}e^{2i\alpha}$ et $r = \dfrac{a' + e^{2i\alpha}b'}{e^{2i\gamma} - j}e^{2\gamma}$

Par ailleurs

La rotation de centre A et d'angle 2α s'écrit : $r_A : z \mapsto e^{2i\alpha}(z-a)+a = e^{2i\alpha}z + a(1-e^{2i\alpha}) = e^{2i\alpha}z + a'$.

et r_A^3 est la rotation de centre A et d'angle 6α, donc $r_A^3 : z \mapsto e^{2i\alpha}(z-a)+a = e^{6i\alpha}z + a(1-e^{6i\alpha})$;

en exploitant la somme d'une suite géométrique : $r_A^3(z) = e^{6i\alpha}z + a'(1+e^{2i\alpha}+e^{4i\alpha})$.

De même : $r_B^3(z) = e^{6i\beta}z + b'(1+e^{2i\beta}+e^{4i\beta})$ et $r_C^3(z) = e^{6i\gamma}z + c'(1+e^{2i\gamma}+e^{4i\gamma})$ On a alors

$$\begin{aligned} z &= r_A^3(r_B^3(r_C^3(z))) = e^{6i\alpha}\left(e^{6i\beta}\left(e^{6i\gamma}z + c'(1+e^{2i\gamma}+e^{4i\gamma})\right) + b'(1+e^{2i\beta}+e^{4i\beta})\right) + a'(1+e^{2i\alpha}+e^{4i\alpha}) \\ &= e^{6i(\alpha+\beta+\gamma)}z + a'(1+e^{2i\alpha}+e^{4i\alpha}) + e^{6i\alpha}b'(1+e^{2i\beta}+e^{4i\beta}) + e^{6i(\alpha+\beta)}c'(1+e^{2i\gamma}+e^{4i\gamma}) \\ &= z + a'(1+e^{2i\alpha}+e^{4i\alpha}) + e^{6i\alpha}b'(1+e^{2i\beta}+e^{4i\beta}) + e^{6i(\alpha+\beta)}c'(1+e^{2i\gamma}+e^{4i\gamma}) \end{aligned}$$

Donc

$$a'(1+e^{2i\alpha}+e^{4i\alpha}) + e^{6i\alpha}b'(1+e^{2i\beta}+e^{4i\beta}) + e^{6i(\alpha+\beta)}c'(1+e^{2i\gamma}+e^{4i\gamma}) = 0$$

Multiplions tout par $e^{2i(\gamma-\alpha)}$:

$$e^{2i(\gamma-\alpha)}a'(1+e^{2i\alpha}+e^{4i\alpha}) + e^{2i(\gamma+2\alpha)}b'(1+e^{2i\beta}+e^{4i\beta}) + e^{2i(2\alpha+3\beta-\gamma)}c'(1+e^{2i\gamma}+e^{4i\gamma}) = 0$$

Enfin, rappelons nous que $e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)} = j$, donc $je^{2i(\alpha-\beta)} = e^{i(2\alpha+2\beta+2\gamma+2\alpha-2\beta)} = e^{2i(2\alpha+\gamma)}$

et $j^2e^{2i(\beta-\gamma)} = e^{i(4\alpha+4\beta+4\gamma+2\beta-2\gamma)} = e^{2i(2\alpha+3\beta-\gamma)}$.

Donc

$$e^{2i(\gamma-\alpha)}a'(1+e^{2i\alpha}+e^{4i\alpha}) + je^{2i(\alpha-\beta)}b'(1+e^{2i\beta}+e^{4i\beta}) + j^2e^{2i(\beta-\gamma)}c'(1+e^{2i\gamma}+e^{4i\gamma}) = 0 \qquad (\star)$$

Nous sommes mûrs pour démontrer l'équilarité du triangle PQR, en calculant $p + jr + j^2q$.

Il faut démontrer que ce nombre est nul. Comme $e^{2i\beta} - j \neq 0$, $e^{2i\gamma} - j \neq 0$ et $e^{2i\alpha} - j \neq 0$, on va plutôt évaluer :

$$\begin{aligned} (e^{2i\alpha}-j)(e^{2i\beta}-j)(e^{2i\gamma}-j)(p+jr+j^2q) &= (c'+e^{2i\gamma}a')(e^{2i\alpha}-j)(e^{2i\gamma}-j)e^{2i\beta} + j(a'+e^{2i\alpha}b')(e^{2i\alpha}-j)(e^{2i\beta}-j)e^{2i\gamma} \\ &\quad + j^2(b'+e^{2i\beta}c')(e^{2i\beta}-j)(e^{2i\gamma}-j)e^{2i\alpha} \end{aligned}$$

Avec a', on trouve :

$$\begin{aligned} [e^{2i(\gamma+\beta)}(e^{2i\gamma}-j) + je^{2i\gamma}(e^{2i\beta}-j)](e^{2i\alpha}-j) &= [e^{2i(2\gamma+\beta)} - j^2e^{2i\gamma}](e^{2i\alpha}-j) = (je^{2i(\gamma-\alpha)} - j^2e^{2i\gamma})(e^{2i\alpha}-j) \\ &= je^{2i\gamma} - j^2e^{2i(\alpha+\gamma)} - j^2e^{2i(\gamma-\alpha)} + e^{2i\gamma} = -j^2(e^{2i\gamma} + e^{2i(\alpha+\gamma)} + e^{2i(\gamma-\alpha)}) \\ &= -j^2e^{2i(\gamma-\alpha)}(1+e^{2i\alpha}+e^{4i\alpha}) \end{aligned}$$

car $j = e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)}$, donc $e^{2i(\beta+\gamma)} = je^{-2i\alpha}$ et $1+j+j^2 = 1$, donc $1+j = -j^2$.

De même, avec b', on trouve

$$[je^{2i(\alpha+\gamma)}(e^{2i\alpha}-j) + j^2e^{2i\alpha}(e^{2ß\gamma}-j)](e^{2i\beta}-j) = \cdots = e^{2i(\alpha-\beta)}(1+e^{2i\beta}+e^{4i\beta})$$

Et avec c', on trouve

$$[je^{2i(\alpha+\gamma)}(e^{2i\alpha}-j) + j^2e^{2i\alpha}(e^{2ß\gamma}-j)](e^{2i\beta}-j) = \cdots = je^{2i(\beta-\gamma)}(1+e^{2i\gamma}+e^{4i\gamma})$$

Et en reprenant le calcul $j(e^{2i\alpha}-j)(e^{2i\beta}-j)(e^{2i\gamma}-j)(p+jr+j^2q)$, on trouve exactement le résultat $(\star)$.

Ce qui donne $p+jr+j^2q = 0$, puisque les autres facteurs sont non nuls.

Ainsi, PQR est un triangle équilatéral.