

Relations & Constructions de $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$

1 Préordre et conséquences

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble pré-ordonné, i.e. $\preceq$ est un préordre i.e. réflexif et transitif.

Exemple de $(u_n) \preceq (v_n)$ ssi à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$.

▷ **Exercice 1.1.**

On note, pour tout $a, b \in E$, $a \equiv b$ si et seulement si $a \preceq b$ et $b \preceq a$.

1. Montrer que $\equiv$ est une relation d'équivalence sur E
2. Montrer que pour l'égalité définie par $\equiv$, alors $\preceq$ est une relation d'ordre.

▷ **Exercice 1.2.**

1. Montrer que la relation : « $(u_n) \preceq (v_n)$ ssi $\frac{u_n}{v_n}$ est bornée » est une relation de préordre.
2. Quelle est la relation d'équivalence qui en découle.

C'est cette relation d'équivalence/ordre qu'on exploite particulièrement en informatique lorsque l'on compare la complexité (l'efficacité) des programmes.

2 Construction de $\mathbb{C}$ (version Cauchy)

On suppose que $\mathbb{R}$ est bien construit (cf. partie suivante).

On définit alors sur l'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$, la relation : $P \equiv Q[R] \iff R \mid P - Q$ (i.e. $\exists S \in \mathbb{R}[X]$ tel que $R \times S = P - Q$). On note $\mathbb{R}_n[X]$, l'ensemble des polynôme de degré inférieur ou égal à n .

▷ **Exercice 2.1.**

Relation d'équivalence. Soit $R \in \mathbb{R}[X]$, un polynôme fixé quelconque

1. Montrer que $\cdot \equiv [R]$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}[X]$
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique $A \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg A < \deg R$ tel que $P \equiv A[R]$.
 A s'appelle le représentant principal de la classe d'équivalence $\{A + RS, S \in \mathbb{R}[X]\}$.

▷ **Exercice 2.2.**

1. Montrer que l'addition $+$ est compatible sur les classes d'équivalences :
 $P_1 \equiv P_2[R]$ et $Q_1 \equiv Q_2[R] \implies P_1 + Q_1 \equiv P_2 + Q_2[R]$
2. Montrer que l'addition $\times$ est compatible sur les classes d'équivalences :
 $P_1 \equiv P_2[R]$ et $Q_1 \equiv Q_2[R] \implies P_1 \times Q_1 \equiv P_2 \times Q_2[R]$

▷ **Exercice 2.3.**

Montrer que $(\mathbb{C}, +, \times)$ est en bijection avec $\left(\frac{\mathbb{R}[X]}{\cdot \equiv \cdot [X^2 + 1]}, +, \times \right)$

3 Construction de $\mathbb{R}$ par les coupures de Dedekind

Le principe des coupures permet de compléter $\mathbb{Q}$ en « bouchant les (petits) trous », en gardant la relation d'ordre. On doit l'idée à Richard DEDEKIND en 1858.

On rappelle que $\mathbb{Q}$ est muni d'une relation d'ordre totale que l'on note $\leq_{\mathbb{Q}}$.

Exemple : le nombre $\sqrt{2}$ est celui qui fait la frontière entre $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 <_{\mathbb{Q}} 2 \text{ ou } x < 0\}$ et $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \geq_{\mathbb{Q}} 2\}$.

Définition de coupure puis de $\mathbb{R}$:

Une coupure $t = (T_- \mid T_+)$ est la donnée de deux sous-ensembles T_- et T_+ de $\mathbb{Q}$ tels que :

- $T_- \neq \emptyset, T_+ \neq \emptyset, \mathbb{Q} = T_- \cup T_+$
- Si $a \in T_-$, alors $b <_{\mathbb{Q}} a \implies b \in T_-$, et si $c \in T_+$, alors $c <_{\mathbb{Q}} d \implies d \in T_+$
- Il n'existe pas d'éléments m de T_- tels que $T_- = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq_{\mathbb{Q}} m\}$.

On notera $\mathbb{R}$ l'ensemble des coupures de $\mathbb{Q}$. On dit que t est un nombre réel et que $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels.

La notion de coupure a été reprise pour étendre des corps, non complet, et muni d'une relation d'ordre totale (par exemple : les nombres surréels de CONWAY).

3.1 Manipulation. Section commençante ouverte

Nous allons alléger la définition ici

▷ **Exercice 3.1.**

1. On note $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$, l'ensemble des sous-ensembles A de $\mathbb{Q}$ vérifiant :
 - $a \in A$ et $b <_{\mathbb{Q}} a \implies b \in A$
 - il n'existe pas de $m \in \mathbb{Q}$ tel que $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq_Q m\}$.On appelle ces parties de $\mathbb{Q}$ des sections commençantes ouvertes de $\mathbb{Q}$.
Montrer que $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Q}), t \mapsto T_-$ est une bijection.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $a \in T_-$ et $c \in T_+, a \leq_Q c$
3. Montrer que $\Psi_t : (T_-, T_+) \rightarrow \mathbb{Q}_+^*, (a, c) \mapsto c - a$ est surjective.
Est-elle injective ?
4. Soit $r \in \mathbb{Q}$. Montrer qu'on peut associer naturellement une (unique) coupure de $\mathbb{R}$ à r .
On note x_r , ce nombre réel « égale » à r .

3.2 Extensions des opérations de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$

▷ **Exercice 3.2.**

Addition et relation d'ordre.

1. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. On note $T_-(x)$ et $T_-(y)$ les sections ouvertes commençantes de $\mathbb{Q}$ qui définissent x et y respectivement.
On note $T = \{a + b, a \in T_-(x), b \in T_-(y)\}$. Montrer que T est une section ouverte commençante de $\mathbb{Q}$.
On note $x + y$, la coupure associée (i.e. $x + y = (T, \mathbb{Q} \setminus T)$).
Comment montrer que $+$ est commutatif, associatif et vérifie : $x_{r+\mathbb{Q}r'} = x_r + x_{r'}$ pour tout $r, r' \in \mathbb{Q}$.
2. Comment définir l'élément neutre de l'addition et l'opposé de tout nombre $x \in \mathbb{R}$?
3. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on dit que $x \leq y$ si et seulement si $T_-(x) \subset T_-(y)$.
La relation d'ordre (admis) ainsi définie est-elle totale ?
On notera $x < y$ si $x \leq y$ et $x \neq y$.
4. Montrer que si $x \leq y$, alors pour tout $z \in \mathbb{R}$, $x + z \leq y + z$.
Soient $r, r' \in \mathbb{Q}$. Montrer que $r \leq_Q r'$ si et seulement si $x_r \leq x_{r'}$.
5. Montrer que $x \leq y$ ssi il existe $s \geq 0$ tel que $y = x + s$.

▷ **Exercice 3.3.**

1. Soient $t, u > 0$. Montrer que $V = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < 0 \text{ ou } \exists t \in T_- \cap \mathbb{R}_+, u \in U_- \cap \mathbb{R}_+ \text{ tel que } a = t \times u\}$ est une section commençante ouverte.
On note $v = t \times u$ la coupure associée (i.e. $v = (V | \mathbb{Q} \setminus V)$).
2. Comment définir la multiplication de deux réels, non nécessairement positif ?
On admet (ensuite) que la multiplication est associative, commutative et possède l'élément neutre 1.
On admet aussi qu'il s'agit d'une extension de la multiplication sur $\mathbb{Q}$.

3.3 Topologie

▷ **Exercice 3.4.**

1. Montrer que la fonction partie entière est bien définie sur $\mathbb{R}$, i.e. : $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n + 1$ (on devrait noter x_n au lieu de n).
2. En déduire que $\mathbb{R}$ est archimédien, i.e. : $\forall (a, A) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}$ tel que $A \leq n \times a$.
3. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ (avec $x < y$), $\exists q \in \mathbb{Q}$ tel que $x \leq q \leq y$.
4. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{a}{10^n} \leq x < \frac{a+1}{10^n}$.
En déduire la densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{R}$.

▷ **Exercice 3.5.** Montrer que toute partie majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Correction des exercices

▷ Corrigé de l'exercice 1.1

- Comme $a \preceq a$, puisque $\preceq$ est réflexive, alors $a \equiv a$.
Donc $\equiv$ est réflexif.
• Soient a et b tels que $a \equiv b$, donc $a \preceq b$ et $b \preceq a$
donc $b \preceq a$ et $a \preceq b$, ainsi $b \equiv a$
Donc $\equiv$ est symétrique.
• Soient a, b et c tels que $a \equiv b$ et $b \equiv c$,
donc $a \preceq b$ et $b \preceq a$ et $b \preceq c$ et $c \preceq b$.
donc $a \preceq b$ et $b \preceq c$ et $c \preceq b$ et $b \preceq a$.
donc $a \preceq c$ et $c \preceq a$, par transitivité de $\preceq$
Donc $\equiv$ est transitif.
2. On sait que $\preceq$ est réflexif et transitif.
Par ailleurs, si $a \preceq b$ et $b \preceq a$, alors $a \equiv b$, donc $\preceq$ est antisymétrique.

▷ Corrigé de l'exercice 1.2

- Cette relation est réflexive, avec $M = 1$. Elle est transitive car $\frac{u_n}{w_n} = \frac{u_n}{v_n} \frac{v_n}{w_n} \leq M_1 M_2$.
- Il s'agit de la relation « du même ordre » des informaticiens dans le calcul de la complexité algorithmique :
 $(u_n) \Omega(v_n)$ si et seulement si $\frac{u_n}{v_n}$ et $\frac{v_n}{u_n}$ sont bornées
si et seulement si $\exists A, B \in \mathbb{R}_+$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, Au_n \leq v_n \leq Bu_n$.
(Cela ressemble à l'équivalence des normes...).

▷ Corrigé de l'exercice 2.1

- Pour tout $P, 0 \times R = P - P$, donc $P \equiv P[R]$.
• Soient P, Q tel que $P \equiv Q[R]$, donc il existe $T \in \mathbb{R}[X]$ tel que $R \times T = P - Q$, donc $Q - P = (-T) \times R$.
Or $(-T) \in \mathbb{R}[X]$, donc $Q \equiv P[R]$.
• Soient P, Q, S tel que $P \equiv Q[R]$ et $Q \equiv S[R]$,
donc il existe $T_1, T_2 \in \mathbb{R}[X]$ tel que $R \times T_1 = P - Q$, et $R \times T_2 = Q - S$ donc $P - S = (T_1 + T_2) \times R$.
Or $(T_1 + T_2) \in \mathbb{R}[X]$, donc $P \equiv S[R]$.
2. A est nécessairement (unique), le reste de la division euclidienne de P par R .
On a $\deg A < \deg R$.

▷ Corrigé de l'exercice 2.2

- On a $P_2 - P_1 = T_1 R$ et $Q_2 - Q_1 = T_2 R$, donc $(P_1 + Q_1) - (P_2 + Q_2) = (T_1 + T_2) R$, donc $P_1 + Q_1 \equiv P_2 + Q_2[R]$
- Avec les mêmes notations : $P_1 Q_1 - P_2 Q_2 = P_1(Q_1 - Q_2) + Q_2(P_1 - P_2) = (P_1 T_2 + Q_2 T_1) R$, donc $P_1 \times Q_1 \equiv P_2 \times Q_2[R]$.

▷ Corrigé de l'exercice 2.3

Soit $\Phi : \mathbb{C} \rightarrow \left(\frac{\mathbb{R}[X]}{\cdot \equiv \cdot [X^2 + 1]} \right), (a + ib) \mapsto a + bX$. Elle est bien définie.

Il s'agit bien d'un morphisme d'anneau :

- $\Phi(1) = 1$
- $\Phi((a + ib) - (a' + ib')) = \Phi((a - a') + i(b - b')) = (a - a') + (b - b')X = \Phi(a + ib) - \Phi(a' + ib')$.
- $\Phi((a + ib) \times (a' + ib')) = \Phi((aa' - bb') + i(a'b + ab')) = (aa' - bb') + (a'b + ab')X = (aa') + (a'b + ab')X + (bb')X^2 \Phi(a + ib) \times \Phi(a' + ib')$. car $X^2 \equiv -1[X^2 + 1]$

La réciproque s'obtient directement, en prenant bien le représentant principal de chaque classe d'équivalence.

▷ Corrigé de l'exercice 3.1

- Φ est bien définie, car pour tout $t \in \mathbb{R}$, T_- est bien une section commençantes ouvertes de $\mathbb{Q}$.
Soit $A \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$, on note $B = \mathbb{Q} \setminus A$, alors $(A|B)$ vérifie exactement les propriétés des coupures.
Donc pour tout $A \in \mathcal{C}(\mathbb{Q})$, il existe un unique nombre $t = (A|\mathcal{C}(\mathbb{Q})) \in \mathbb{R}$ tel que $\Phi(t) = A$
- Soit $t \in \mathbb{R}$. Soient $a \in T_-$ et $c \in T_+$.
Si $c <_Q a$, alors par définition des coupures, $c \in T_-$. Impossible car $T_+ \cap T_- = \emptyset$.
Donc, comme la relation d'ordre est totale, $a \leq_Q c$

3. Soit $r \in \mathbb{Q}_+^*$.

Soit $a \in T_-$ et $b \in T_+$. $b - a \in \mathbb{Q}_+^*$. Puis $\frac{b-a}{r} \in \mathbb{Q}_+^*$. Notons N un entier supérieur à $\frac{b-a}{r}$.

On a donc $0 < b - a \leq Nr$.

Notons $a_0 = a$, $a_1 = a + \frac{b-a}{N}$ et pour tout $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $a_k = a + \frac{k}{N}(b-a)$.

On a : $a = a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_k \leq a_{k+1} \leq \dots \leq a_N = b$, il s'agit de nombres rationnels.

Nécessairement, il existe $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ tel que $\forall i < k$, $a_i \in T_-$ et $\forall i \geq k$, $a_i \in T_+$ ($k = \min\{i \mid a_i \in T_+\}$, non vide).

On a alors $a_{k-1} \in T_-$, $a_k \in T_+$ et $a_k - a_{k-1} = \frac{b-a}{N} \leq r$.

Et donc $a_{k-1} + r \geq a_k \in T_+$ et $a_{k-1} \in T_-$ et $\Psi(a_{k-1}, a_{k-1} + r) = r$. Donc Ψ est surjective.

Elle n'est pas injective : si $a \in T_-$ et $c \in T_+$, alors $a - 1 \in T_-$ et $c + 1 \in T_+$.

Puis $\Psi(a - 1, c) = c - a + 1 = c + 1 - a = \Psi(a, c + 1)$.

4. Soit $r \in \mathbb{Q}$. On note $R_- = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < r\}$ et $R_+ = \{b \in \mathbb{Q} \mid r \leq b\}$. Alors $(R_- | R_+)$ est une coupure qui définit r . Si une autre coupure définit r , alors nécessairement, la section commençante contient R_- , mais ne peut contenir r sinon elle ne serait pas ouverte et donc il s'agit nécessairement de R_- .

▷ Corrigé de l'exercice 3.2

1. Soit $c \in T$, il existe $a \in T_-(x)$ et $b \in T_-(y)$ tel que $c = a + b$.

Soit $d \leq_Q c$. Comme d est un nombre rationnel, ainsi que a , alors $b' = d - a \in Q$.

Et donc $d = a + b'$, avec $a \in T_-(x)$ et $b' = d - a \leq c - a = b$ donc $b' \in T_-(y)$.

Donc $d \in T$. Ainsi, T est une section commençante. Elle est ouverte car s'il existait $m \in Q$ tel que $T = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq_Q m\}$, alors comme $m \leq_Q m$, $m \in T$.

Et donc il existerait $(a, b) \in T_-(x) \times T_-(y)$ tel que $m = a + b$.

Puis, comme $T_-(x)$ et $T_-(y)$ sont ouvertes, il existe $a' > a$, $b' > b$ tels que $a' \in T_-(x)$ et $b' \in T_-(y)$.

On aurait alors $m < a' + b' \in T$, impossible.

2. On exploite la commutativité (resp. associativité) sur $\mathbb{Q}$.

3. L'élément neutre est x_0 . Et $-x = (T'_-, T'_+)$ où $T'_- = \{a \in \mathbb{Q} \mid -a > x\} = -(T_+(x) \setminus (\{x\} \cap \mathbb{Q}))$.

4. Oui, elle est totale par totalité de $\leq_Q$ et propriété 2. des coupures.

▷ Corrigé de l'exercice 3.3

1.

▷ Corrigé de l'exercice 3.4

1.

▷ Corrigé de l'exercice 3.5