CPGE MPSI Le 28.01.17
2016-2017

Devoir Surveillé n°6

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé d'un exercice et d'un problème.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole (∗) voire (∗∗)
La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Exercice /14

1. Factoriser en produit irréductible sur $\mathbb{C}[X]$ et sur $\mathbb{R}[X]$ les deux polynômes :

$$R_3 = X^3 - 1 \qquad R_4 = X^4 - 1$$

2. Donner l'ensemble des racines (sur $\mathbb{C}$) du polynôme $R_n = X^n - 1$
3. Soit $r = \dfrac{p}{q}$, une fraction irréductible (avec $q \in \mathbb{N}$ et $p \wedge q = 1$).
   A quelle condition nécessaire est suffisante sur n a-t-on : $\xi_r = e^{2i\pi r}$ est une racine n^{e}de l'unité ?

On dit que ξ_r est une racine primitive n^{e} de l'unité si $q = n$

4. Quelle est l'ensemble des racines 6^ede l'unité ? Parmi celles-ci lesquelles sont primitive 6^ede l'unité, et pour les autres, préciser pour quelle valeur de n, ces racines sont primitives n^{e}.
5. On note $\Phi_n = \displaystyle\prod_{\xi \in \mathfrak{P}_n} (X - \xi)$, où $\mathfrak{P}_n$ est l'ensemble des racines n^{e}primitive de l'unité.
   Montrer que $\Phi_n | R_n$.
6. Donner les expression de Φ_1, Φ_2, Φ_3 et Φ_6.
7. Soient $n, m \in \mathbb{N}$. Que pensez-vous de $\Phi_n \wedge \Phi_m$.
   Démontrer que $R_n \wedge R_m = R_{n \wedge m}$.
8. Montrer que $R_n = \displaystyle\prod_{d|n} \Phi_d$.
   Redonner la factorisation sur $\mathbb{R}[X]$ de $R_6 = X^6 - 1$.

NE PAS OUBLIER DE TOURNER LA PAGE…⟶

Problème

A. Quelques sommes classiques /10

On note F, l'espace vectoriel des applications définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Soit Δ, l'application de F dans F qui à une fonction f associe la fonction :

$$\Delta f : x \mapsto f(x+1) - f(x)$$

et ∇ l'application de F dans F qui à une fonction f associe la fonction

$$\nabla f : x \mapsto f(x) - f(x-1)$$

On considère dans cette partie deux entiers naturels n et p avec $n \leqslant p$.

1. Montrer que Δ et ∇ sont des applications linéaires.
   C'est-à-dire que : $\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \forall\ f_1, f_2 \in F$,

   $$\Delta(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \Delta(f_1) + \lambda_2 \Delta(f_2) \text{ et } \nabla(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \nabla(f_1) + \lambda_2 \nabla(f_2)$$

2. Soient f et g deux applications de F. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, les valeurs de ∇ et de Δ pour le produit $f \times g$ des fonctions f et g sont données par :

   $$\left(\nabla(f \times g)\right)(x) = \left(\nabla f\right)(x) \times g(x) + f(x-1) \times \left(\nabla g\right)(x)$$

   $$\left(\Delta(f \times g)\right)(x) = \left(\Delta f\right)(x) \times g(x) + f(x+1) \times \left(\Delta g\right)(x)$$

3. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=n}^{p} (\Delta f)(k) = f(p+1) - f(n)$
4. Soit c un réel strictement positif, distinct de 1 ; on note h la fonction qui à tout x réel associe c^x.
   Déterminer Δh ; en déduire une fonction h_1 telle que $\Delta h_1 = h$ et simplifier l'expression de $\displaystyle\sum_{k=n}^{p} c^k$
5. Montrer que :

   $$\sum_{k=n}^{p} f(k) \left(\Delta g\right)(k) = (fg)(p+1) - (fg)(n) - \sum_{k=n}^{p} g(k+1) \left(\Delta f\right)(k)$$

6. En déduire $\displaystyle\sum_{k=n}^{p} k c^k$.

B. Polynômes factoriels /9

Pour tout entier naturel n, on note E_n l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
On pose $F_0 = 1$ et pour tout entier k, $F_k = X(X-1)\cdots(X-k+1)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(F_0, F_1, \ldots F_n)$ est une base de E_n.
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Justifier que l'on peut écrire $\Delta F_n = n F_{n-1}$
3. On définit $\Delta^0 = \mathrm{id}_F$ (l'application identité de F), $\Delta^1 = \Delta$ et pour tout $k \geqslant 1$, $\Delta^k = \Delta \circ \Delta^{k-1}$.
   Calculer $\Delta^3(F_5)$.
   Et de manière générale, quelle est la forme de $\Delta^h(F_m)$?
   On distinguera les cas $m \geqslant h$ et $m < h$
4. Soit n un entier naturel. Un polynôme P de degré n est dit « écrit sous forme factorielle »s'il est représenté sous la forme

   $$P = \sum_{k=0}^{n} b_k F_k$$

   Mettre X^3 sous forme factorielle et en déduire $\Delta(X^3)$.

   Retrouver également à partir de cette forme factorielle l'expression bien connue de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$?

C. Schéma de Hörner /14

On considère un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, de degré n ($a_n \neq 0$).

Soit z un réel, on cherche à évaluer le plus rapidement possible $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, k inférieur ou égal à n. Combien faut-il effectuer de multiplications pour calculer $a_k z^k$ (de façon naïve, sans faire appel à des techniques d'exponentiation rapide) ? Combien alors faut-il effectuer d'opérations (additions et multiplications) pour calculer $P(z)$?
2. Programmes.
   (a) Compléter les lignes 5 et 7 de la fonction suivante de deux variables z un réel et n un entier supérieur ou égal à 1, qui est rédigé en Python et évalue z^n.

```
1 def Puissance (z,n):
2     """
3     Evalue la valeur z^n
4     """
5     Puiss=.....
6     for i in range(n) :
7          .........
8     return(Puiss)
```

   (b) On note en python, les polynômes $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ sous forme de liste :`P=[a_0,a_1,...,a_n]`.
   Compléter la fonction suivante qui renvoie $P(z)$ en utilisant la fonction `Puissance` définie à la question précédente.

```
def PdeZ(P,z):
    """
    Evalue la valeur de P(z)
    """
    deg=len(P)
    res=0
    for k in range(deg) :
         res=..........
    return(res)
```

3. Etant donné $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, un polynôme et $z \in \mathbb{R}$, on considère l'algorithme suivant qui consiste à définir (par récurrence) une suite finie de nombre $(b_k)_{n \geqslant k \geqslant 0}$:
   — $b_n = a_n$
   — $b_{n-1} = a_{n-1} + z b_n$
   $\vdots$
   — $b_k = a_k + z b_{k+1}$
   $\vdots$
   — $b_0 = a_0 + z b_1$.

   (a) On note $Q = \sum_{i=1}^{n} b_i X^{i-1}$.
   Montrer que $P = Q(X - z) + b_0$. En déduire que $b_0 = P(z)$.

   Cette méthode pour calculer $P(z)$ s'appelle le schéma de Hörner

   (b) Ecrire, sous python, une fonction qui évalue $P(z)$ en exploitant le schéma de Hörner. On notera `Hörner` cette fonction.
   (c) Combien faut-il effectuer d'opérations pour évaluer ainsi $P(z)$?
   (d) Appliquer le schéma de Hörner au polynôme $P_0 = 3X^5 - 7X^4 - 6X^3 + 15X^2 - 10X + 14$ pour calculer $P(2)$.
   On donnera les valeurs obtenue à chaque b_j.

4. L'application répétée du schéma de HÖRNER permet également de calculer les dérivées successives et le polynôme de TAYLOR.
   (a) On considère le polynôme P_0 de la question 3.(d).
   On appelle
   — P_1 le polynôme (de degré 4) quotient de la division euclidienne de P_0 par $X-2$,
   — P_2, le polynôme (de degré 3) quotient de la division euclidienne de P_1 par $X-2$,
   — et ainsi de suite jusqu'à P_5 le polynôme de degré 0,
   ces polynômes P_i sont obtenus par répétition de la division euclidienne selon le schéma de HÖRNER.
   On notera donc $b_{i,j}$, les coefficients trouvés en appliquant le schéma de HÖRNER au polynôme P_i. (les coefficients $b_{0,5}$, $b_{0,4}, \dots b_{0,0}$ ont été trouvés en question 3.d.).
   Donner les valeurs des coefficients $(b_{i,j})_{0\leqslant i\leqslant 5\,-\,0\leqslant j\leqslant 5-i}$
   (b) En déduire qu'il existe six réels $c_0, c_1, \dots c_5$ tels que
   $$P_0(X) = \sum_{k=0}^{5} c_k (X-2)^k$$
   et déterminer les valeurs de c_0, $c_1, \dots c_5$.
   (c) Déterminer, en le justifiant, les valeurs de $P^{(k)}(2)$ pour $k \in \{0, \dots 5\}$.
   (d) Soit P un polynôme quelconque et $z \in \mathbb{R}$.
   Ecrire une fonction `Horner_Taylor` et qui évalue $P^{(k)}(z)$, pour tout $k \leqslant \deg P$.
   On expliquera rapidement, sans vraiment démontrer que la fonction donne bien le bon résultat.

D. Polynômes d'interpolation /13

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a < b$, deux réels et α_1, α_2,...α_{n+1}, $n+1$ réels deux à deux distincts de l'intervalle $[a, b]$.
On note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et on note $Q_0 = 1$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,
$$Q_i = \prod_{k=1}^{i} (X - \alpha_k)$$

1. Montrer que $(Q_0, Q_1, \dots Q_n)$ est une base de E_n.
2. Soit $P \in E_n$. Montrer que le $(n+1)$-uplet $(\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_n)$ des coordonnées de P dans la base $(Q_0, Q_1, \dots Q_n)$ est la solution d'un système linéaire que l'on précisera.
3. Dans le cas particulier de $n = 3$, $a = 0$, $b = 5$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$ et $\alpha_4 = 4$, décomposer le polynôme $R_0 = 1 - \frac{3}{2}X + \frac{9}{4}X^2 - \frac{1}{4}X^3$ dans la base (Q_0, Q_1, Q_2, Q_3).
4. (**) Soit f une fonction définie sur $[a, b]$. Démontrer qu'il existe un unique polynôme P_n de E_n qui coïncide avec f en tout α_i, pour i de 1 à $n+1$ et expliquer comment trouver les composantes de P_n dans la base $(Q_0, Q_1, \dots Q_n)$.
5. Etude de la validité de l'approximation de f. On suppose, de plus, f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
   (a) Soit $x \in [a, b]$, distincts des α_i. On considère la fonction φ_A définie sur $[a, b]$ par :
   $$\forall\, t \in [a, b], \qquad \varphi_A(t) = f(t) - P_n(t) - (t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\cdots(t-\alpha_{n+1})A$$
   Montrer que l'on peut choisir A_x, en fonction de x tel que $\varphi_{A_x}(x) = 0$. On notera par la suite φ, la fonction initialement notée φ_{A_x}.
   (b) En appliquant plusieurs fois le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $\eta \in [a, b]$ tel que
   $$A_x = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta)$$
   (c) Montrer que pour tout $x \in [a, b]$,
   $$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sup_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)| \times (b-a)^{n+1}$$
   (d) En étudiant $\lim_{x\to\alpha_1} \frac{f(x)-P_n(x)}{x-\alpha_1}$, montrer que, en utilisant $P_n'(\alpha_1)$ comme valeur approchée de $f'(\alpha_1)$, l'erreur commise est majorée par
   $$\frac{1}{(n+1)!} \sup_{t\in[a,b]} |f^{(n+1)}(t)| \times |(\alpha_1-\alpha_2)\cdots(\alpha_1-\alpha_{n+1})|$$