Sommes & coefficients binomiaux. Inversion de Pascal

On suppose que (a_n) est connue et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$.

Le but de ce problème est d'exprimer, pour tout entier n, a_n et fonction de la famille des nombres (b_k) ?

1. Cas $n = 3$. On suppose que l'on a le système suivant : $(S) \left\{ \begin{array}{lllllll} a_0 & & & & = & b_0 \\ a_0 & +a_1 & & & = & b_1 \\ a_0 & +2a_1 & +a_2 & & = & b_2 \\ a_0 & +3a_1 & +3a_2 & +a_3 & = & b_3 \end{array} \right.$

   (a) Résoudre (S))

   (b) Quel conjecture pouvez-vous faire liant a_n à $(b_k)_k$?

2. Montrer que si pour tout entier h : $b_h = \sum_{i=0}^{h} \binom{h}{i} a_i$,

   alors pour tout entier k, $a_k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} b_j$.

   On fera bien attention au fait que la formule du binôme de Newton est fausse pour $n = 0$ et $a + b = 0$.

3. Application. Le nombre $S(n, p)$ de surjections d'un ensemble de n éléments dans un ensemble de p éléments $(p \geqslant n)$ vérifie

$$p^n = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} S(n, k)$$

   (On a pas besoin de savoir que $S(n, k)$ est le nombre de surjections de $\mathbb{N}_n$ sur $\mathbb{N}_k$).

   (a) Exprimer $S(n, k)$ sous forme d'une somme.

   (b) Donner les valeurs de $S(n, 1)$, $S(n, 2)$, $S(n, n)$ et $S(n, n-1)$.

4. Au XVII siècle, on s'est intéressé à résoudre le problème suivant :
   Etant donnés $n + 1$ points y_0, $y_1 \dots y_n$, quel est la fonction polynomiale f de degré le plus petit possible telle que

$$f(0) = y_0 \quad f(1) = y_1 \dots \quad \dots f(n) = y_n$$

   Etant donnée une suite (y_n) de nombres, on note $\delta y_k = y_{k+1} - y_k$ (dérivée en y_k). Puis par récurrence sur $h \in \mathbb{N}$:

$$\delta^0 y_k = y_k, \qquad h \geqslant 1 : \delta^h y_k = \delta^{h-1} y_{k+1} - \delta^{h-1} y_k$$

   (a) Exprimer en fonction des y_k, les expressions de $\delta^3 y_2$ et $\delta^4 y_0$.
   Qu'en pensez-vous ?

   (b) Montrer la formule de Briggs-Newton : le polynôme de degré n (minimal) passant par les points y_0, $y_1, \dots y_n$ (en 0, $1 \dots n$ respectivement)est donné par la formule :

$$f(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} \delta^k y_0 \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \delta^k y_0 \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$$

   (c) Trouver la fonction polynomiale de degré 5 qui interpole $y_k = \sum_{i=0}^{k} i^4$.

   Si $P_4(n) = \sum_{k=0}^{n} k^4$, est un polynôme. Il est facile de calculer $P_4(0)$, $P_4(1)$, $P_4(2)\dots$Combien suffisent ?

   On pourra exploiter l'écriture selon le schéma de Newton :

$$\begin{array}{ccccc} y_0 & & & & \\ & \delta y_0 & & & \\ y_1 & & \delta^2 y_0 & & \\ & \delta y_1 & & \delta^3 y_0 & \\ y_2 & & \delta^2 y_1 & & \delta^4 y_0 \\ & \delta y_2 & & \delta^3 y_1 & \\ y_3 & & \delta^2 y_2 & & \\ & \delta^1 y_3 & & & \\ y_4 & & & & \end{array} \text{ parexemple : } \begin{array}{cccc} 4 & & & \\ & 1 & & \\ 5 & & -4 & \\ & -3 & & 10 \\ 2 & & 6 & \\ & 3 & & \\ 5 & & & \end{array} \text{ (si } y_0 = 4,\ y_1 = 5,\ y_2 = 2 \text{ et } y_3 = 5).$$

CORRECTION

1. (a) On a les équivalences :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc|c} a_0 & & & = & b_0 & \\ & a_1 & & = & b_1-b_0 & L_2-L_1 \\ & 2a_1 & +a_2 & = & b_2-b_0 & L_3-L_1 \\ & 3a_1 & +3a_2 & +a_3 = & b_3-b_0 & L_4-L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cclc} a_0 & = & b_0 & \\ a_1 & = & b_1-b_0 & \\ a_2 & = & b_2-2b_1+b_0 & L_3-L_2 \\ a_3 & = & b_3-b_1+3b_2-b_0 & L_3-3L_2+L_1 \end{array}\right.$$

   (b) On pourrait imaginer $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}b_{n-k}$

2. Faisons le calcul à partir de la somme de droite :

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}b_j = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}a_i = \sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant k}(-1)^{k-j}\frac{k!j!}{j!(k-j)!i!(j-i)!}a_i$$

$$= (-1)^k\sum_{i=0}^{k}(-1)^i a_i\frac{k!}{i!(k-i)!}\sum_{j=i}^{k}(-1)^{j-i}\frac{(k-i)!}{(j-i)!(k-j)!}$$

   Posons dans la seconde somme $h=j-i$, on a donc (si $\underline{k-i\neq 0}$:

$$\sum_{j=i}^{k}(-1)^{j-i}\binom{k-i}{j-i} = \sum_{h=0}^{k-i}\binom{k-i}{h}(-1)^h 1^{k-i-h} = ((-1)+1)^{k-i} = 0^{k-i} = 0$$

   Ainsi, cette dernière somme est toujours nulle pour i de 0 à $n-1$, il ne reste plus que la situation $i=n$:

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}b_j = 0+(-1)^k(-1)^k a_k\binom{k}{k} = a_k$$

   .

3. (a) Ici $S(n,k)$ joue le rôle de a_k (n est fixé) et p^n joue le rôle de b_p (et non b_n !!).

   L'inversion de Pascal donne donc $S(n,k) = \displaystyle\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n$

   (b) $S(n,1) = \displaystyle\sum_{j=0}^{1}(-1)^{1-j}\binom{1}{j}j^n = -0^n+1^n = 1$

   $S(n,2) = \displaystyle\sum_{j=0}^{2}(-1)^{2-j}\binom{2}{j}j^n = 0^n - 2\times 1^n + 2^n = 2^n-2$

   $S(n,n) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}j^n = n!$ (formule non évidente)

   $S(n,n-1) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}j^n = \binom{n}{2}(n-1)!$ (formule non évidente)

4. (a) $\delta^3 y_2 = \delta^2 y_3 - \delta^2 y_2 = \delta y_4 - 2\delta y_3 + \delta y_2 = y_5 - 3y_4 + 3y_3 - y_2$.
   $\delta^4 y_0 = \cdots = y_4 - 4y_3 + 6y_2 - 4y_1 + y_0$.

   A-t-on généralement : $\delta^h y_k = \displaystyle\sum_{i=0}^{h}\binom{h}{i}(-1)^{h-i}y_{k+i}$?

   (b) Considérons $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\delta^k y_0\frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$.

   Alors pour tout $h\leqslant n$, $f(h) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\delta^k y_0\binom{h}{k} = \sum_{k=0}^{h}\delta^k y_0\binom{h}{k}$.

   Or $\delta^k y_0 = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}y_{k-i} = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}y_j$.

Donc d'après la formule d'inversion de Pascal : $y_h = \sum_{k=0}^{h} \binom{h}{k} \delta^k y_0$.

Et ainsi $f(h) = y_h$ d'après la première formule. Ce polynôme interpôle bien.
Il ne peut y en avoir φ un autre de degré au moins égal, car $f - \varphi$ admettrait alors $n+1$ racines (0, $1 \ldots n$) et serait de degré n.

(c) On cherche un polynôme de degré 5. $P_4(0) = 0$, $P_4(1) = 1$, $P_4(2) = 1^4 + 2^4 = 17$, $P_4(3) = 17 + 81 = 98$, $P_4(4) = 98 + 256 = 354$ et $P_4(5) = 354 + 625 = 974$. On cherche le polynôme de degré minimal passant par les points $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 17$, $y_3 = 98$ et $y_4 = 354$ et $y_5 = 974$.
On exploite la formule de Briggs-Newton, on a besoin de calculer les $\delta^k y_0$. Le schéma de Newton peut nous aider :

$$
\begin{array}{cccccccccccccc}
y_0 & & & & & & \qquad & 0 & & & & & \\
& \delta y_0 & & & & & & & 1 & & & & \\
y_1 & & \delta^2 y_0 & & & & & 1 & & 15 & & & \\
& \delta y_1 & & \delta^3 y_0 & & & & & 16 & & 50 & & \\
y_2 & & \delta^2 y_1 & & \delta^4 y_0 & & & 17 & & 65 & & 60 & \\
& \delta y_2 & & \delta^3 y_1 & & \delta^5 y_0 & & & 81 & & 110 & & 24 \\
y_3 & & \delta^2 y_2 & & \delta^4 y_1 & & & 98 & & 175 & & 84 & \\
& \delta^1 y_3 & & \delta^3 y_2 & & & & & 256 & & 194 & & \\
y_4 & & \delta^2 y_3 & & & & & 354 & & 369 & & & \\
& \delta^1 y_4 & & & & & & & 625 & & & & \\
y_5 & & & & & & & 974 & & & & &
\end{array}
$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
P_4 &= 0 \times 1 + 1 \times x + 15 \times \frac{x(x-1)}{2} + 50 \times \frac{x(x-1)(x-2)}{6} + 60 \times \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24} + 24 \times \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{120} \\
&= \frac{x}{30}(30 + 225(x-1) + 250(x-1)(x-2) + 75(x-1)(x-2)(x-3) + 6(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)) \\
&= \frac{1}{30}(6x^5 + 15x^4 + 10x^3 - x)
\end{aligned}
$$