

Quatrième partie

Analyse réelle

Suites numériques

 **Résumé -**

Les suites sont au coeur des mathématiques : il s'agit souvent d'étudier des valeurs numériques successives (i.e. dans une temporalité discrète ou paramétrée par \mathbb{N}). Ce sont donc des applications de \mathbb{N} dans \mathbb{C} (ou un sous-corps de \mathbb{C}). Certaines sont classiques : les suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes à deux termes (par lesquelles on commence ici) ou définies implicitement, définies par une relation de récurrence (par lesquelles on termine ici). Entre ces deux types, on se concentre sur la question de la limite d'une suite. C'est un cas simple : un seule est possible et c'est toujours pour n tendant vers l'infini. On termine par étudier les propriétés topologiques de \mathbb{R} (et \mathbb{C}) avec le langage des suites.

Quelques liens (inégaux) sur youtube :

- netprof - Suites numériques réelles, définition. <https://www.youtube.com/watch?v=Dvo4vgjRS7g>
- [[UT#23]] - Calcul de limite - développement asymptotique. <https://www.youtube.com/watch?v=T8kkTBTpM8Y>
- Science4all - $1+2+3+4+5+\dots = -1/12$ - <https://www.youtube.com/watch?v=vMnkmBCvGQc>

Sommaire

1.	Problèmes	318
2.	Exemples fondamentaux	319
2.1.	Suites arithmético-géométriques	319
2.2.	Suites récurrentes linéaires homogène d'ordre 2	319
3.	Suites extraites	320
3.1.	Rappels	320
3.2.	Application 1 : Contraire de « à partir d'un certain rang »	321
3.3.	Application 2. Lemme des pics	322
4.	Limite d'une suite réelle	323
4.1.	Suite convergente	323
4.2.	Suites divergentes	324
4.3.	Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre	325
4.4.	Extension aux suites à valeurs complexes	330
4.5.	Bilan sur les théorèmes d'existence de limites	332
5.	Bilan	334

1. Problèmes

? Problème 78 - Suite de Fibonacci

Le mathématicien italien du *XIV*-ième, Leonardo FIBONACCI a introduit la suite suivante définie par une double récurrence pour modéliser la reproduction des lapins :

$$F_0 = F_1 = 1 \text{ et pour tout entier } n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Comment calculer F_{100} ?

Il semble qu'il faut calculer tous les termes précédents, on peut exploiter un programme informatique.

Existe-t-il une formule fermée de F_n (expression directe et calculatoire de F_n directement en fonction de n) ?

? Problème 79 - Forme fermée (ou forme close)

Au problème précédent, la réponse est affirmative, nous la verrons dans le cours.

De manière générale, quelles sont les types de suites pour lesquelles on peut trouver une forme fermée (expression directe en fonction de n) ?

Souvenons-nous que la définition naturelle d'une suite est plutôt sous forme d'une récurrence.

(Nous verrons une autre famille de suites importantes : celles pour lesquelles chaque terme est la solution d'une équation dépendant de n).

? Problème 80 - Suites convergentes

Dans beaucoup de problèmes (au concours par exemple), il faut démontrer qu'une certaine suite converge.

Il est bon de faire la liste des méthodes. Quelles sont toutes les méthodes pour montrer qu'une suite converge ?

On se rend compte qu'il existe deux grandes familles de réponses à cette question : les méthodes qui donnent également la limite et celle qui montre la convergence sans donner vraiment d'information quant à la valeur de la limite.

? Problème 81 - Suite divergente vers l'infini

La somme de deux suites convergentes est une suite convergente dont la limite est la somme des deux suites qui la constituent.

Il existe également une règle avec l'une, voir les deux suites divergentes vers $+\infty$.

On peut multiplier les études en sous-cas (avec $+\infty$, avec $-\infty$, avec, avec...). Est-il possible de réunir en une seule formulation ?

On se rend compte dans ces cas là que la divergence vers l'infini est en fait plus proche de la convergence vers a que d'une divergence par absence de limite...

? Problème 82 - Suite qui ne ... pas à partir d'un certain rang

Quelle stratégie mettre en place pour manipuler des suites qui ne font pas telle ou telle chose à partir d'un certain rang ?

2. Exemples fondamentaux

2.1. Suites arithmético-géométriques

On verra plus loin (lorsque nous disposerons d'autres outils) le cas des suites définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

En dehors des suites géométriques et arithmétiques, il y a quelques autres types de suites à savoir étudier.

Définition - Suites arithmético-géométrique

Une suite (u_n) (réelle ou complexe) est dite arithmético-géométrique si elle est définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = au_n + b$ avec $a \neq 0, a \neq 1, b \neq 0$.

✂ Savoir faire - Etudier une suite arithmético-géométrique

Pour étudier une telle suite,

1. on cherche un point fixe c : tel que $c = ac + b$
2. on introduit la suite $(v_n) = (u_n - c)$. Elle est géométrique de raison a .

On a donc $u_n = a^n(u_0 - c) + c$

Exercice

Etudier la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - \frac{2}{3}$.

2.2. Suites récurrentes linéaires homogène d'ordre 2

Définition - Suites récurrentes linéaires homogène d'ordre 2

On appelle suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 toute suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}) définie par

$$u_0, u_1 \in \mathbb{K} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$$

où $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3, a \neq 0, c \neq 0$.

On lui associe une équation dite caractéristique : $ax^2 + bx + c = 0$

Théorème - Etude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Notons $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation caractéristique.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (a, b, c complexes) :

- si $\Delta \neq 0$ et r_1, r_2 racines de l'équation caractéristique,

$$E = \{\lambda(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu(r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

- si $\Delta = 0$ et r unique racine,

$$E = \{\lambda(r^n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu(nr^n)_{n \in \mathbb{N}}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (a, b, c réels) :

- si $\Delta > 0$ et r_1, r_2 racines de l'équation caractéristique,

$$E = \{\lambda(r_1^n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu(r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

— si $\Delta = 0$ et r unique racine,

$$E = \{\lambda(r^n)_{n \in \mathbb{N}} + \mu(nr^n)_{n \in \mathbb{N}}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

— si $\Delta < 0$ et $r = \rho e^{i\theta}, \bar{r}$ racines complexes,

$$E = \{\lambda(\Re(r^n))_{n \in \mathbb{N}} + \mu(\Im(r^n))_{n \in \mathbb{N}}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2\}$$

$$= \{\lambda(\rho^n \cos n\theta)_{n \in \mathbb{N}} + \mu(\rho^n \sin n\theta)_{n \in \mathbb{N}}; (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

◆ Pour aller plus loin - Méthode américaine

Si on note r_1 et r_2 les racines de l'équation caractéristique.

1. On considère $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$, alors
 $(a+bx+cx^2)f(x) = a(u_0+u_1x)+bu_0x+$
 $\sum_{n=0}^{+\infty} (au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n)x^{n+2} =$
 $a(u_0 + u_1x) + bu_0x.$

2. On pratique une décomposition en élément simple :
 $f(x) = \frac{au_0 + (au_1 + bu_0)x}{a(1+r_1x)(1+r_2x)} =$
 $\frac{A}{1+r_1x} + \frac{B}{1+r_2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (Ar_1^n + Br_2^n)x^n.$

3. Puis on peut identifier $u_n = Ar_1^n + Br_2^n$

✂ Savoir faire - Etudier une suite récurrente linéaire d'ordre 2

Pour étudier une telle suite,

1. on définit l'équation caractéristique associée
2. on calcule le discriminant :
 - Si $\Delta > 0$, les racines sont r_1 et r_2 ,
 $\exists A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = A_1 r_1^n + A_2 r_2^n.$
 - Si $\Delta = 0$, la racine double est r
 $\exists A_1, A_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (A_1 + A_2 n)r^n.$
 - Si $\Delta < 0$, les racines sont $r_1 = \rho e^{i\theta}$ et $r_2 = \rho e^{-i\theta}$,
 $\exists A \in \mathbb{C}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = Ar_1^n + \bar{A}r_2^n.$ $\exists A_1, A_2 \in \mathbb{R}$
 tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \rho^n (A_1 \cos(n\theta) + A_2 \sin(n\theta)).$

✂ Savoir faire - Et s'il y a un second membre ?

La résolution se fait comme pour les EDL2 à coefficients constants.

1. On cherche une solution particulière (de la même forme que le second membre et par tâtonnement)
2. On cherche l'ensemble des solutions du problème homogène

L'ensemble des solutions est la somme (affine) de la solution particulière et de l'espace des solutions du problème homogène (ce qui forme un espace affine).

● Remarque - Démonstrations

Il existe au moins trois démonstrations classiques de ce résultat :

- par récurrence. On peut le faire (mais attention à la question de l'unicité de la suite)
- par la force de l'algèbre linéaire. Nous ferons cette démonstration dans le cours d'algèbre linéaire (second semestre)
- par les séries géométriques (voir plus loin)

3. Suites extraites

3.1. Rappels

La définition a déjà été donnée, il s'agit de considérer seulement certains éléments (mais en nombre infini) de (u_n) , une suite donnée.

Définition - Suite extraite

On dit que (v_n) est une suite extraite de (u_n) (ou une sous-suite), si $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

✂ Exemple - Extraction paire

⚠ Attention - Double extraction

Si (w_n) est une extraction de (v_n) , elle-même une extraction de u_n ,
 $\exists \varphi_1, \varphi_2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = v_{\varphi_2(n)}$ et $v_n = u_{\varphi_1(n)}$,
 et donc $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = v_{\varphi_2(n)} = u_{\varphi_1(\varphi_2(n))}$, l'extractrice est donc $\varphi_1 \circ \varphi_2$.

On a vu également (élargi ici) :

Proposition - Sous-ensemble infini et suite extraite

Soit $A \subset \mathbb{R}$, on a les équivalences :

- i. $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in A\}$ est infini
- ii. $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \in A\}$ n'est pas majoré
- iii. $\exists (v_n)$ extraite de (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in A$
- iv. $\exists \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \nearrow \nearrow$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{\varphi(n)} \in A$

On dit (en probabilité, en particulier) que $u_n \in A$ infiniment souvent, écris : $(u_n) \in Ai.s.$ (ou $(u_n) \in Ai.o.$ (infinitely often)).

Démonstration**STOP Remarque - Dans la démonstration...**

Pour l'implication $[i.] \Rightarrow [iv.]$, on a refusé d'écrire : « A est infini, inclus dans \mathbb{N} , donc dénombrable ou énumérable.

$$A = \{i_0, i_1, i_2, i_3 \dots\}$$

Et il suffit de prendre $\varphi : n \mapsto i_n$. » Pour deux raisons, rien ne prouve que l'énumération est croissante (pour \mathbb{Q} dénombrable, c'est par exemple compliqué) et ensuite, cela serait une tautologie : il faudrait bien démontrer ce résultat une fois pour toute. La démonstration proposée donne donc cette démonstration « une fois pour toute ».

3.2. Application 1 : Contraire de « à partir d'un certain rang »

🔍 Analyse - Contraire de : « A partir d'un certain rang »

Théorème - Suite extraite

Soit (u_n) une suite numérique et $B \subset \mathbb{R}$.

Si on n'a pas : $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in B$,

i.e. on a : $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N, u_n \notin B$

Alors, il existe une sous-suite (v_n) de (u_n) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \notin B$

Démonstration

 **Exemple - Non suite nulle à partir d'un certain rang**

On exploite aussi des suites extraites pour étudier des suites non majorées :

Proposition - Suite non majorée

(u_n) n'est pas majorée ssi il existe une suite extraite de (u_n) tendant vers $+\infty$.

i.e. il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\nearrow \nearrow$ telle que $(u_{\varphi(n)}) \rightarrow +\infty$

DémonstrationExercice

Soit (u_n) une suite à valeurs dans $[a, b]$.

Soient $\epsilon > 0$ et $n = \left\lfloor \frac{b-a}{\epsilon} \right\rfloor$

1. $[a, b]$ peut s'écrire comme une réunion de n intervalles de taille inférieure à $\epsilon > 0$.
2. Montrer qu'il existe un ensemble $A \subset [a, b]$, de taille inférieure à ϵ et une suite extraite de (u_n) tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{\varphi(n)} \in A$

3.3. Application 2. Lemme des pics

Proposition - Lemme des pics

Soit E , un ensemble totalement ordonné.

Toute suite de E admet une sous-suite croissante ou une sous-suite décroissante.

C'est encore plus fin ici, car l'ensemble A n'est pas fixe, d'une certaine façon... On travaille donc sur N directement et on doit adapter la démonstration.

Démonstration**Remarque - Le lemme de ERDÖS-SZEKERES**

LE DS10 2020-2021 donne un algorithme pour trouver, à partir d'une suite finie de $pq+1$ éléments ou bien une suite extraite croissante de $p+1$ éléments ou une suite décroissante de $q+1$ éléments.

Une forme d'optimalité finie.

Histoire - Paul Erdős

Paul Erdős (1913-1996) est un mathématicien hongrois en exil permanent. Très prolifique, il s'intéresse à l'arithmétique, théorie des graphes et probabilités ou encore l'analyse. Un de ses leitmotivs : « Another roof, another proof ». Il campait chez l'un ou l'autre des mathématiciens quelques jours pour trouver des résultats intéressants, puis il s'en allait.

Une autre citation intéressante : « Il faut parfois compliquer un problème pour en simplifier la solution. »

On peut lire : Erdős, l'homme qui n'aimait que les nombres.

4. Limite d'une suite réelle**4.1. Suite convergente****Heuristique - Expression en français**

On dit qu'une suite (u_n) converge vers ℓ , si à toute précision fixée a priori et notée ϵ , la suite u_n est proche de ℓ à ϵ près, à partir d'un certain rang...

Définition - Limite (réelle)

Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ lorsque

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \epsilon$$

Remarque - Suite convergente vers 0

On a $(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \iff (u_n - \ell) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

On pourrait donc restreindre notre cours à l'étude des suites convergentes vers 0.

Remarque - Strict ou non

On a aussi $(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \epsilon$$

Exercice

Soit $\alpha > 0$. Montrer à l'aide de la définition que la suite $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge vers 0.

⚠ Attention - Dépendance de N à ϵ

- ⚡ On remarquera bien sur cet exercice le fait important et fréquent :
 N dépend de la valeur de ϵ choisie a priori.
- ⚡ On pourrait noter à la physicienne : $N(\epsilon)$

Proposition - Unicité de la limite

Soit (u_n) une suite réelle. Si $(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et $(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell'$ alors $\ell = \ell'$.
 On note alors $(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ ou $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Démonstration**Définition - Suites convergente, divergente**

Soit (u_n) une suite réelle.

S'il existe un réel ℓ tel que la suite converge vers ℓ , on dit que (u_n) est convergente.

ℓ (unique d'après ce qui précède) est appelé la limite de la suite.

Proposition - Suite convergente donc bornée

Toute suite convergente est bornée.

Démonstration**4.2. Suites divergentes**

Il y a deux types de non convergence (=divergence) :

- les suites tendant vers ∞ .
- les suites ne tendant vers rien (oscillante).

Définition - divergente

Si la suite n'est pas convergente on dit qu'elle est divergente.

On peut étendre la notion de limite d'une suite à $\overline{\mathbb{R}}$ ce qui donne la définition suivante.

Définition - Limite infinie

On dit que la suite réelle (u_n) tend vers $+\infty$ et on note $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, u_n \geq A.$$

On dit que la suite réelle (u_n) tend vers $-\infty$ et on note $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$, si

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, u_n \leq A.$$

Remarque - Limite infinie et suite divergente

- Une suite admettant une limite infinie est une suite divergente. On écrit toutefois $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty (-\infty)$ lorsque $(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty (-\infty)$ et on dit que la suite diverge vers $+\infty (-\infty)$.
- Si (u_n) tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, alors $(|u_n|)$ tend vers $+\infty$.

Exercice

Soit $\alpha > 0$. Montrer à l'aide de la définition que la suite (n^α) diverge vers $+\infty$.

Attention - Dépendance de N à A

- ⚡ On remarquera bien sur cet exercice le fait important et fréquent :
 N dépend de la valeur de A choisie a priori.
- ⚡ On pourrait noter à la physicienne : $N(A)$

Attention - Cas pathologiques

- ⚡ Il existe
 - des suites divergentes qui ne tendent pas vers $+\infty$ (ni vers $-\infty$);
 - des suites non bornées qui ne divergent pas vers $+\infty$ ou $-\infty$.
 - des suites convergentes non monotones.

Exercice

Donner des exemples de telles suites

Exercice

Rappeler et démontrer les résultats sur la convergence des suites arithmétiques ou géométriques en fonction de leur raison.

4.3. Opérations sur les suites/les limites et relation d'ordre

Ordre et limites

Proposition - Convergence et signe de la suite

Soit (u_n) une suite réelle qui tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose $\ell > 0$ (resp. $\ell < 0$). Alors la suite est strictement positive (resp. strictement négative) à partir d'un certain rang.

Démonstration

Et réciproquement, si $u_n > 0$, a-t-on $\lim(u_n) > 0$?

Attention - Les inégalités sont élargies!

- ⚡ Les inégalités strictes ne passent pas à la limite, elles se transforment en inégalités larges.
- ⚡ Par exemple $u_n = \frac{1}{n} > 0 = v_n$ et pourtant $\lim(u_n) = \lim(v_n) = 0$

Théorème - Passage à la limite dans les inégalités

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles qui convergent respectivement vers les réels ℓ et ℓ' . On suppose qu'à partir d'un certain rang on a $u_n \leq v_n$. Alors $\ell \leq \ell'$.

Démonstration**Remarque - Dans $\overline{\mathbb{R}}$**

Le résultat reste vrai avec des suites ayant des limites dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Théorème - Théorème de convergence par encadrement, dit "des gendarmes"

Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$. On suppose que

$$\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n \leq w_n, \text{ et que } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$$

alors la suite (v_n) converge vers ℓ .

Avec $(u_n) = (-w_n)$:

Corollaire - Encadrement en valeur absolue

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que l'on a (α_n) une suite de réels positifs qui converge vers 0 et un réel ℓ tels qu'à partir d'un certain rang $|u_n - \ell| \leq \alpha_n$. Alors (u_n) converge vers ℓ .

Démonstration**Savoir faire - A partir de deux certains rangs**

Si on a, à partir d'un certain premier rang une propriété vraie : $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1, \mathcal{P}_n$.

Et à partir d'un certain second rang une propriété vraie : $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_2, \mathcal{P}'_n$.

Alors, à partir d'un certain (autre) rang : $n_3 = \max(n_1, n_2)$, $\forall n \geq n_3, \mathcal{P}_n$ et \mathcal{P}'_n sont vraies.

Exercice

Montrer que la suite $\left(\frac{2^n}{n!}\right)$ converge vers 0.

On a un résultat analogue au théorème précédent pour les limites infinies.

Théorème - Théorème de divergence (vers $\pm\infty$) par encadrement

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$. Alors

$$(u_n)_{n \rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty \Rightarrow (v_n)_{n \rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty \quad (18.1)$$

$$(v_n)_{n \rightarrow +\infty} \rightarrow -\infty \Rightarrow (u_n)_{n \rightarrow +\infty} \rightarrow -\infty \quad (18.2)$$

Exercice

Soit (S_n) la suite définie par $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, comparez $\frac{1}{k}$ avec $\int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ et $\int_{k-1}^k \frac{dt}{t}$. En déduire que (S_n) diverge.
2. Prouver que $\left(\frac{S_n}{\ln n}\right)$ converge et donner sa limite.

✂ Savoir faire - Convergence par encadrement/Divergence par minoration (majoration)

L'encadrement est souvent à la base de toute démonstration d'analyse.

Pour démontrer que $u_n \rightarrow \ell$, on démontre qu'à partir d'un certain rang

$$v_n \leq u_n \leq w_n \text{ avec } \lim(v_n) = \lim(w_n) = \ell.$$

$$\text{ou } |u_n - \ell| \leq \alpha_n \text{ avec } \lim(\alpha_n) = 0.$$

Pour démontrer que $u_n \rightarrow +\infty$, on démontre qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et $v_n \rightarrow +\infty$.

Pour $u_n \rightarrow -\infty$, on démontre qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq w_n$ et $w_n \rightarrow -\infty$.

Opérations sur les limites**Définition - $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ comme une algèbre**

On définit les opérations suivantes sur l'ensemble des suites réelles :

- Addition : $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$
- Multiplication par un réel : $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$
- Multiplication de deux suites : $(u_n) \times (v_n) = (u_n \times v_n)$

Addition et multiplication de deux suites sont des "lois internes" sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, la multiplication est une "loi externe".

On commence par deux lemmes qui simplifieront les démonstrations

Lemme -

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques.

- Si $(u_n) \rightarrow 0$ et (v_n) est bornée, alors $(u_n \times v_n) \rightarrow 0$.
- Si $(u_n) \rightarrow +\infty$ et (v_n) est minorée, alors $(u_n + v_n) \rightarrow +\infty$

Démonstration

Théorème - Opérations sur les limites
 Soit (u_n) une suite tendant vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et (v_n) une suite tendant vers $\ell' \in \overline{\mathbb{R}}$.
 Alors, lorsque le calcul dans $\overline{\mathbb{R}}$ a du sens :

- la suite $(|u_n|)$ tend vers $|\ell|$;
- la suite $(u_n + v_n)$ tend vers $\ell + \ell'$;
- pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite (λu_n) tend vers $\lambda \ell$;
- la suite $(u_n v_n)$ tend vers $\ell \ell'$;
- si $\ell' \neq 0$, la suite $(\frac{u_n}{v_n})$ tend vers $\frac{\ell}{\ell'}$

✂ Savoir faire - A savoir compléter

Plus généralement les tableaux suivants, complétés, permettent de connaître les limites des suites $(u_n + v_n)$, $(u_n v_n)$, $(\frac{1}{u_n})$, $(\frac{u_n}{v_n})$ connaissant les limites, éventuellement infinies, des suites (u_n) et (v_n) .
 ℓ et ℓ' sont des réels.

1. Limite d'une somme

(u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
(v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite						

2. Limite d'un produit

(u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	0	∞
(v_n) a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $(u_n v_n)$ a pour limite				

Pour déterminer s'il s'agit de $+\infty$ ou de $-\infty$ on applique la règle des signes.

3. Limite de l'inverse

(u_n) a pour limite	$\ell \neq 0$	0 avec $u_n > 0$	0 avec $u_n < 0$	∞
alors $(\frac{1}{u_n})$ a pour limite				

4. Limite d'un quotient

(u_n) a pour limite	ℓ	0	$\ell \neq 0$		ℓ
(v_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	0	0 en restant de signe constant		∞
alors $(\frac{u_n}{v_n})$ a pour limite					
(u_n) a pour limite	∞		∞	∞	
(v_n) a pour limite	0 en restant		∞	$\ell \neq 0$	
alors $(\frac{u_n}{v_n})$ a pour limite					

Démonstration

 Application - Lemme de Cesaro

 Pour aller plus loin - Convergence au sens de Cesaro

Si (u_n) converge vers ℓ , alors $\mathcal{C}(u_n) \rightarrow \ell$ également.

Et si (u_n) ne converge pas, comme $u_n = (-1)^n$?

$\mathcal{C}(u_n) = \frac{1}{n+1} [n, \text{pair}] \rightarrow 0$.

Donc si $(-1)^n$ converge, sa limite serait 0 (au sens de Cesaro)

4.4. Extension aux suites à valeurs complexes

Définition - Cas des suites complexes (bornées...)

Soit (u_n) une suite de complexes.

- On dit que la suite (u_n) est bornée si la suite réelle des modules $(|u_n|)$ est majorée.
- Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que la suite (u_n) converge vers ℓ si la suite réelle $(|u_n - \ell|)$ converge vers 0. On note $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$.

Définition - Convergence

La suite complexe (u_n) converge vers le complexe ℓ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \epsilon$$

Attention $|u_n - \ell|$ désigne ici le module du complexe $u_n - \ell$.

A partir de cette définition, on voit que bon nombre de résultats subsistent pour les suites complexes :

Proposition - Généralisation

- la limite, lorsqu'elle existe, est unique ;
- si $|u_n - \ell| \leq \alpha_n$ où (α_n) est une suite réelle qui converge vers 0, alors (u_n) converge vers ℓ ;
- les opérations (somme, produit, inverse, quotient) sur les limites restent valables ;
- toute suite extraite d'une suite convergente converge vers la même li-

mite;

- si les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite, alors la suite (u_n) converge.

⚠ Attention - Relation d'ordre dans \mathbb{C} ?

- ⚡ En revanche les résultats liés à la relation d'ordre dans \mathbb{R} n'ont plus de sens ici (inégalités).

🔧 Savoir faire - Souvent pour l'étude de suites complexes

On peut également, pour étudier une suite complexe, se ramener à deux suites réelles, selon la proposition qui suit...

Et si on veut raisonner pour la convergence par encadrement (vers 0), on note que :

$$|\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n| \quad \text{et} \quad |\operatorname{Im}(u_n)| \leq |u_n|$$

$$|u_n| = \sqrt{|\operatorname{Re}(u_n)|^2 + |\operatorname{Im}(u_n)|^2} \leq |\operatorname{Re}(u_n)| + |\operatorname{Im}(u_n)|$$

On notera qu'il s'agit du module de u_n mais de la valeur absolue de $\Re(u_n)$ ou de $\Im(u_n)$.

Proposition - Utilisation de deux suites complexes

Soit (u_n) une suite complexe.

(u_n) est convergente (respectivement bornée) si et seulement si les suites réelles $(\operatorname{Re}(u_n))$ et $(\operatorname{Im}(u_n))$ le sont toutes les deux.

En cas de convergence on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Re}(u_n) \right) + i \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{Im}(u_n) \right).$$

Exercice

Montrer par deux méthodes que la suite complexe $(\overline{u_n})$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge et donner alors une relation entre les limites.

Démonstration

Exercice

Soit $z \in \mathbb{C}$.

1. Montrer que la suite géométrique (z^n) est convergente si et seulement si $|z| < 1$ ou $z = 1$.
2. Montrer que la suite (S_n) définie par $S_n = 1 + z + \dots + z^n = \sum_{k=0}^n z^k$ (on dit que (S_n) est une série géométrique) converge si et seulement si $|z| < 1$ et que la limite vaut alors $\frac{1}{1-z}$.

4.5. Bilan sur les théorèmes d'existence de limites

Convergence par encadrement

Rappelons le résultat suivant. C'est le plus naturel lorsqu'il faut démontrer la convergence ET donner la limite.

Proposition - Convergence par encadrement (ou gendarme)

Si pour tout entier n , $u_n \leq v_n \leq w_n$
 et pour (u_n) et (w_n) converge vers la même limite ℓ .
 Alors (v_n) converge et $\lim(v_n) = \ell$

Proposition - Divergence par minoration

Si pour tout entier n , $u_n \leq v_n$
 et pour (u_n) diverge vers $+\infty$.
 Alors (v_n) diverge et $\lim(v_n) = +\infty$

Proposition - Divergence par majoration

Si pour tout entier n , $v_n \leq w_n$
 et pour (w_n) diverge vers $-\infty$.
 Alors (v_n) diverge et $\lim(v_n) = -\infty$

Exploitation des suites extraites

Définition - Valeur d'adhérence d'une suite

Si a est limite d'une suite extraite de (u_n) , alors, on dit que a est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) .

Théorème - Limite d'une suite extraite

Toute suite extraite d'une suite tendant vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ est une suite tendant vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Autrement écrit : si $(u_n) \rightarrow \ell$, alors (u_n) n'admet qu'une seule valeur d'adhérence : ℓ .

Démonstration

✂ Savoir faire - Montrer la divergence d'une suite, par suites extraites

Soit (u_n) une suite réelle.

On suppose qu'il existe deux suites extraites $(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\psi(n)})$ convergeant respectivement vers ℓ et ℓ' , avec $\ell \neq \ell'$. Alors la suite (u_n) est divergente.

Théorème - Convergence par suites extraites totales

Soit (u_n) une suite réelle.

On suppose que les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ . Alors (u_n) converge vers ℓ

⚡ Pour aller plus loin - Suites extraites totales

On peut démontrer mieux :

(u_n) converge vers ℓ ssi toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ

🛑 Remarque - Si $\ell = \infty$

Le résultat est encore valable pour les suites admettant une limite infinie.

Démonstration**Exercice**

On considère une suite réelle (u_n) telle que les suites $(u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n})$ convergent.

Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Suites monotones**Théorème - Théorème de la limite monotone**

Soit (u_n) une suite croissante. On a les deux possibilités suivantes :

1. Si (u_n) est majorée, alors (u_n) est convergente (et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$).
2. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

Démonstration**Exercice**

Démontrer directement le théorème de la limite monotone, avec les coupures de Dedekind

Corollaire - Version décroissante

Soit (u_n) une suite décroissante. On a les deux possibilités suivantes :

1. Si (u_n) est minorée, alors (u_n) est convergente (et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$).
2. Si (u_n) n'est pas minorée, alors (u_n) diverge vers $-\infty$.

Suites adjacentes

Définition - Suites adjacentes

Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si

- les deux suites sont monotones de sens contraire;
- la suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Théorème - Convergence pour suites adjacentes

Deux suites adjacentes convergent et ont même limite.

Démonstration

Exercice

Soit les suites de terme général $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ sont adjacentes.
2. Montrer que leur limite commune est un irrationnel.

Savoir faire - Montrer la convergence avec deux sous-suites adjacentes

Il arrive souvent que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) soient adjacentes (dans ce cas il faut le démontrer), on en déduit alors la convergence de (u_n) d'après le critère de convergence par suites extraites totales. C'est le cas :

- si $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f décroissante et $|f'| < 1$
- si $u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$ avec $(u_k) \searrow 0$ (critère de Leibniz)...

5. Bilan

Synthèse

- ↪ Des phénomènes récurrent conduisent à des suites. Certaines se calculent explicitement : les suites arithmético-géométrique, récurrente d'ordre 2. Et d'autres non.
- ↪ On cherche alors des expressions approchantes et toujours explicites. Ces expressions se devinent à partir de la fin, donc de la limite. Ainsi, il nous faut réfléchir (beaucoup) à la limite de suites, à l'arithmétique associé, à truc et astuce pour déterminer ces limites.
- ↪ On est parfois malheureusement contraint d'étudier uniquement des suites extraites.
- ↪ Tout est maintenant en place pour pouvoir étudier deux familles de suites typiques (en TD-cours) : les suites définies implicitement (à partir d'une équation), ou les suites définies par une relation d'équivalence. Comme ailleurs, cela conduit à de nombreux savoir-faire à apprendre...

◆ **Pour aller plus loin - Encadrement par les suites sup et inf. Définition de limsup et liminf**

On exploite parfois aussi les suites suivantes associées à (u_n) .

$M_n = \sup\{u_k, k \geq n\}$. M_n est bien définie si (u_n) majorée.

$m_n = \inf\{u_k, k \geq n\}$. M_n est bien définie si (u_n) minorée.

On démontre (M_n) est décroissante et (m_n) est croissante.

Or elles sont bornées, donc convergentes.

On note : $\limsup(u_n) = \lim(M_n)$ et $\liminf(u_n) = \lim(m_n)$.

Il est possible d'extraire de (u_n) des suites qui convergent l'une vers $\limsup(u_n)$ et l'autre vers $\liminf(u_n)$... Ce sont donc des valeurs d'adhérence de la suite.

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- Savoir-faire - Etudier une suite arithmético-géométrique
- Savoir-faire - Etudier une suite récurrente linéaire d'ordre 2
- Savoir-faire - Et s'il y a un second membre?
- Savoir-faire - A partir de deux certains rangs
- Savoir-faire - Convergence par encadrement/Divergence par minoration (majoration)
- Savoir-faire - A savoir compléter
- Savoir-faire - Souvent pour l'étude de suites complexes
- Savoir-faire - Montrer la divergence d'une suite par suites extraites
- Savoir-faire - Montrer la convergence de deux sous-suites adjacentes

Notations

Notations	Définitions	Propriétés	Remarques
$(u_n) \rightarrow \ell$ $\lim(u_n) = \ell$	(ou u_n converge vers ℓ ou diverge vers $\ell = +\infty$ ou $-\infty$)	si $\ell \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, u_n - \ell \leq \epsilon$ si $\ell = +\infty : \forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, u_n > A$	On accepte $u_n \rightarrow \ell$
$\mathcal{C}(u)$	La transformation de Cesaro de (u_n)	$\forall n \in \mathbb{N}, (\mathcal{C}(u))_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$	Si $\lim(u_n) = \ell$, alors $\lim(\mathcal{C}(u)) = \ell$

Retour sur les problèmes

78. Cours : $\forall n \in \mathbb{N}, F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$.
79. Si on savait répondre à ce genre de question, on serait heureux. Mais comme on n'y arrive pas, on cherche des développements limités explicites et exactes (à un certain ordre près).
80. Les théorème de simple existence de limite utilisent les théorème de convergence monotone, suites adjacentes et plus tard Bolzano-Weierstrass. Aussi les comparaisons de séries positives (plus tard) Les théorème qui donne la limite exploite la convergence par encadrement, ou les suites extraites. Aussi les séries avec télescopage.
81. La formulation qui fusionne les convergences et divergences vers $\pm\infty$ sera étudiée au chapitre suivant.
82. On exploite les suites extraites. Il y a nécessairement une sous-suite qui ne vérifie pas la propriété en question.