Devoir Surveillé n°7

Durée de l'épreuve : 4 heures
La calculatrice est interdite

Le devoir est composé de deux problèmes.
Lorsqu'une question est jugée, a priori, plus difficile, elle est précédée du symbole $(*)$ voire $(**)$
La notation tiendra particuliérement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées**.

BON COURAGE

Problème 1

Le but de ce problème est d'essayer de **comprendre « la structure algébrique » des matrices magiques**.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, de base canonique $(E_{i,j})_{i,j}$.
$E_{i,j}$ est la matrice de E dont tous les coefficients sont nuls sauf celui situé à la ligne i et colonne j qui vaut 1.
On note $\forall\ i,j \in [\![1,n]\!]$ et $\forall\ A = (a_{i,j}) \in E$:

$$\sigma_j(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \qquad \text{(somme des éléments de la } j^{\text{ième}} \text{ colonne de } A)$$

$$\tau_i(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \qquad \text{(somme des éléments de la } i^{\text{ième}} \text{ ligne de } A)$$

$$\text{Tr }(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k} \qquad \text{(somme des éléments de la première diagonale de } A)$$

$$\text{Atr }(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,n-k} \qquad \text{(somme des éléments de la seconde diagonale de } A)$$

On note $\mathcal{M}ag = \{A \in E \mid \forall\ i,j : \sigma_j(A) = \tau_i(A) = \text{Tr }(A) = \text{Atr }(A)\}$, l'ensemble des matrices magiques.
On note $\mathcal{PM}ag = \{A \in E \mid \forall\ i,j : \sigma_j(A) = \tau_i(A)\}$, l'ensemble des matrices pseudo-magiques, c'est à dire magiques uniquement sur les lignes et colonnes.
On définit alors $d : \mathcal{PM}ag \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que $\forall\ A \in \mathcal{PM}ag$, $d(A) = \sigma_1(A)$.

A. Préliminaires

1. Montrer que $\forall\ r \in [\![1,n]\!]$, $\sigma_r, \tau_r, \text{Tr}$ et Atr sont des formes linéaires de E.
2. En déduire que $\mathcal{PM}ag$ est un sev de E, puis que $\mathcal{M}ag$ est un sev de $\mathcal{PM}ag$.
3. Montrer que d est une forme linéaire sur $\mathcal{PM}ag$.

B. Etude des tableaux magiques 3×3

1. Petite observation et cas particuliers
   (a) On considère $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant 3 \\ 1 \leqslant j \leqslant 3}} \in \mathcal{M}ag$. Montrer que le coefficient $3a_{2,2} = d(A)$.
   (b) Compléter la matrice suivante sachant que c'est une matrice magique

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & \cdot \\ \cdot & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

   (c) Qu'en concluez vous à propos de la dimension de $\mathcal{M}ag$?
   (d) Pouvez-vous compléter les trois matrices suivantes sachant qu'elles sont magiques

$$\begin{bmatrix} \cdot & 1 & \cdot \\ 3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 2 \end{bmatrix}$$

2. Recherche de l'ensemble des solutions.
   (a) Soit $A \in \mathcal{M}ag$, montrer que les 9 coefficients de A sont solutions d'un système de 7 équations à 9 inconnues.
   (b) Quel est le rang de ce système d'équation ?
   (c) Montrer que

$$\mathcal{M}ag = \text{vect}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

   (d) Quelles remarques faites vous alors à propos des matrices à compléter de la question 1.(d) ?

C. Etude généralisé sur les tableaux de taille $n \times n$

n est à nouveau quelconque dans cette partie ($n \geqslant 3$).
On note J la matrice de E dont tous les coefficients valent 1.

1. Caractérisation des matrices pseudo-magiques et étude de d
   (a) Montrer que $A \in \mathcal{PM}ag$ ssi $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A \times J = J \times A = \lambda \cdot J$
   Quel est le rapport entre ce λ et $d(a)$?
   (b) Montrer que d est un morphisme d'anneaux, c'est à dire :

$$\forall\ A, B \in \mathcal{PM}ag \quad d(A+B) = d(A) + d(B) \text{ et } d(A \times B) = d(A) \times d(B)$$

   (c) Montrer alors que si $A \in \mathcal{PM}ag$, inversible alors $d(A) \neq 0$ et $A^{-1} \in \mathcal{PM}ag$.
   Exprimer alors $d(A^{-1})$ en fonction de $d(A)$.
   (d) Réciproquement a-t-on pour tout $A \in \mathcal{PM}ag$, $d(A) \neq 0 \Longrightarrow A$ inversible ?
2. Décomposition de $\mathcal{PM}ag$ en espaces supplémentaires.
   On définie : $\mathcal{M}_1^* = \text{Ker } d$ et $\mathcal{M}_2 = \text{vect}(J)$. Ce sont des sous espaces vectoriels.
   (a) Montrer que $\mathcal{M}_1^* \oplus \mathcal{M}_2 = \mathcal{PM}ag$
   (b) On pose $\forall\ i, j \in [\![2, n]\!]$: $A_{i,j} = E_{1,1} + E_{i,j} - E_{i,1} - E_{1,j}$.
   Montrer alors que la famille $(A_{i,j})_{\substack{2 \leqslant i \leqslant n \\ 2 \leqslant j \leqslant n}}$ est une base de $\mathcal{M}_1^*$.
   (c) En déduire les dimensions de $\mathcal{M}_1^*$ et de $\mathcal{PM}ag$.
   (d) Donner une matrice de taille 3, pseudo-magique mais non magique.
3. La dimension de $\mathcal{M}ag$!
   On définie pour finir $\mathcal{M}_1 = \text{Ker } d_{|\mathcal{M}ag} = (\text{Ker } d) \cap (\mathcal{M}ag)$.
   (a) Montrer que $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}ag$
   (b) Montrer que $\dim(\mathcal{M}_1) = \dim(\mathcal{M}_1^*) - 2$
   (On pourra montrer que $\mathcal{M}_1 = \{A \in \mathcal{M}_1^* / \text{Tr } (A) = \text{Atr } (A) = 0\}$)
   (c) Conclure enfin que $\dim \mathcal{M}ag = n(n-2)$ et essayer de compléter les matrices magiques (justifier et commenter chacun de vos résultats) :

$$\begin{bmatrix} 5 & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 3 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & \cdot & 1 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 3 \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ 2 & \cdot & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Problème 2

Soit E un K espace vectoriel ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et u un endomorphisme de E. On désigne par Ker u le noyau de u et Im u l'image de u.

Pour tout entier k strictement positif, u^k désigne l'endomorphisme $u \circ u \circ u \cdots \circ u$ (k fois) et u^0 désigne l'application identique de E.

A. Deux exemples

1. Dans cette question, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ dont une base est $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit u l'endomorphisme de E tel que la matrice de u par rapport à cette base est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer le rang de u et donner une base de Im u, une base de Ker u en fonction des vecteurs de la base B.

   (b) Calculer M^2, M^3. Montrer qu'il existe une matrice A telle que : $\forall\, p \geqslant 2$, $M^p \in \text{vect}(A)$.
   On note α_p le coefficient de proportionnalité, donc pour tout $p \geqslant 2$, $M^p = \alpha_p A$.
   Expliciter alors M^p.

   (c) i. Donner une base, en fonction des vecteurs de la base B, de chacun des sous-espaces vectoriels suivants :

$$\text{Im } u^2, \quad \text{Ker } u^2, \quad \text{Im } u^3, \quad \text{Ker } u^3.$$

   ii. Déterminer : $\forall k \geqslant 2$, Ker u^k, Im u^k.

   iii. Montrer que $E = \text{Ker } u^2 \oplus \text{Im } u^2$.

2. Soit $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ et d l'endomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ qui à un polynôme P associe son polynôme dérivé P'.

   (a) d est-il injectif ? d est-il surjectif ? Comment peut-on en déduire que $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie ?

   (b) Déterminer : $\forall\, q \in \mathbb{N}^*$, Ker d^q.

B. Noyaux et images itérés

Soit u un endomorphisme de E, pour tout entier naturel p, on notera $I_p = \text{Im } u^p$ et $K_p = \text{Ker } u^p$.

1. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, \quad K_p \subset K_{p+1}$ et $I_{p+1} \subset I_p$.
2. On suppose que E est de dimension finie et u injectif. Déterminer : $\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad I_p$ et K_p.
3. On suppose que E est de dimension finie n non nulle et u non injectif.

   (a) Montrer qu'il existe un plus petit entier naturel $r \leqslant n$ tel que : $K_r = K_{r+1}$.

   (b) Montrer qu'alors : $I_r = I_{r+1}$ et que : $\forall\, p \in \mathbb{N}, \quad K_r = K_{r+p}$ et $I_r = I_{r+p}$.

   (c) Montrer que : $E = K_r \oplus I_r$.

4. Lorsque E n'est pas de dimension finie, existe-t-il un plus petit entier naturel r tel que $K_r = K_{r+1}$?
   On pourra prendre un exemple vu précédemment
5. On considère à nouveau que E est de dimension finie.
   Soit $p \in \mathbb{N}$. Notons ici $a_p = \dim I_p - \dim I_{p+1}$.
   On sait que $I_{p+1} \subset I_p$, soit F_p un espace supplémentaire de I_{p+1} dans I_p : $F_p \oplus I_{p+1} = I_p$.

   (a) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $a_p = \dim(F_p)$

   (b) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{p+1} = I_{p+2} + u(F_p)$.

   (c) Montrer que $\dim F_{p+1} \leqslant \dim(u(F_p))$.

   (d) En considérant $\tilde{u} : F_p \to E, x \mapsto u(x)$, montrer alors que $\dim(F_p) \geqslant \dim(u(F_p))$.

   (e) En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\dim I_{p+1} - \dim I_{p+2} \leqslant \dim I_p - \dim I_{p+1}$.

   (f) Retrouver à nouveau que si $I_r = I_{r+1}$, alors $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $I_r = I_{r+p}$.

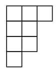
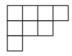
C. Cas des endomorphismes nilpotents

— On considère E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E nilpotent ; c'est-à-dire qu'il existe r tel que $u^r = 0$.
On conserve les notations de la partie précédente, donc K_p désigne le noyau de u^p.
Rappelons que nous avons démontrer pour finir la partie précédente que :
la suite $b_p = \dim(\text{Ker } u^{p+1}) - \dim(\text{Ker } u^p)$ est (toujours) décroissante.

— Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note J_k, la matrice d'ordre k dont la surdiagonale est composée de 1, les autres éléments étant nuls *(Attention : ce n'est pas la matrice J_r du cours).*

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

— Enfin, on dit que $\eta = (n_1, n_2, \dots n_p)$ (η *est lu éta*) est une partition de n si $n = n_1 + n_2 + \dots n_p$ avec pour tout $i \in \mathbb{N}_{p-1}$, $n_i \geqslant n_{i+1}$.
Ainsi, $(3, 2, 2, 1)$ et $(5, 3)$ sont deux partitions de $n = 8$.
On associe à une telle partition η, le tableau de Young de η constitué de p lignes alignées à gauche, la ligne i contenant n_i cases. Le tableau de Young de η^{-1} est celui obtenu en transposant celui de η.

Ainsi le tableau de Young de $\eta = (3, 2, 2, 1)$ et de η^{-1} sont  et . Donc $\eta^{-1} = (4, 3, 1)$.

1. Un exemple : montrer que u de matrice $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans une base quelconque notée $\mathcal{B}$ de $E = \mathbb{R}^4$ est nilpotent.
Quel est le plus petit entier r tel que $u^r = 0$?
2. Étude de la suite des noyaux itérés d'un endomorphisme nilpotent.
(a) Montrer que $K_r = E$. En déduire la valeur de b_r.
(b) Montrer que la suite $B = (b_0, b_1, \dots b_{r-1})$ est une partition de $n = \dim(E)$.

On appelle tableau de Young associé à u (nilpotent), noté $\Upsilon(u)$, le tableau de Young de la partition $(b_0, b_1, \dots b_{r-1})^{-1}$.

3. Tableau de Young de u.
(a) Montrer que le nombre de case de la première ligne de $\Upsilon(u)$ est égal à r.
(b) Nous allons voir sur un exemple comment démontrer le théorème suivant :

Si u est un endomorphisme nilpotent de E (de dimension n), et $\Upsilon(u)$ son tableau de Young correspondant à la partition $C = (c_0, c_1, \dots c_p) = B^{-1}$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ soit la matrice diagonale formée des blocs diagonaux J_{c_0}, $J_{c_1} \dots J_{c_p}$.

Supposons donc que $\Upsilon(u) = (6, 4, 4, 1)$.
i. Que vaut $[\Upsilon(u)]^{-1}$
ii. Que valent r et n ? Énoncer alors la partition B de n correspondant à la suite $B = (b_0, b_1, \dots b_r)$?
iii. Montrer qu'il existe $v_1 \in E$ tel que $u^5(v_1) \neq 0$. Montrer que la famille $\big(v_1, u(v_1) \dots u^5(v_1)\big)$ est une famille libre (de $E = \mathbb{R}^n$)
iv. Que valent $\dim(\text{Ker } u^4)$ et $\dim(\text{Ker } u^3)$.
Montrer qu'il existe v_2 et $v_3 \in \text{Ker } (u^4)$ tels que $\text{vect}\big(u^2(v_1), v_2, v_3\big)$ soit supplémentaire de Ker u^3 dans Ker u^4.
v. Montrer que $\big(u^3(v_1), u(v_2), u(v_3)\big)$ est une famille libre et que $\text{vect}\big(u^3(v_1), u(v_2), u(v_3)\big)$ est supplémentaire de Ker u^2 dans Ker u^3.
vi. De même montrer qu'il existe v_4 tel que $\big(u^5(v_1), u^3(v_2), u^3(v_3), v_4\big)$ forme une base de Ker u.
vii. En déduire que :
$$\mathcal{B} = \big(u^5(v_1), u^4(v_1), u^3(v_1), u^2(v_1), u(v_1), v_1, u^3(v_2), u^2(v_2), u(v_2), v_2, u^3(v_3), u^2(v_3), u(v_3), v_3, v_4\big)$$
forme une base de E.
Écrire la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.