Chapitre 21

Dérivation (approfondissements)

Résumé -

Au début d'année, nous avons déjà rencontré des fonctions dérivables. « A l'époque », notre motivation était surtout de mettre au point quelques bons réflexes d'ordre calculatoires. Dans ce chapitre, il s'agit plutôt de démontrer les résultats exploitées précédemment...
La construction est comparable à celle du chapitre précédent (et exactement opposée à la démarche d'usage de la dérivée) :

— *la dérivation est une notion locale (dérivable en un point).*
— *elle est étendue ensuite sur un intervalle*
— *enfin elle est généralisée : à des dérivations d'ordre supérieure et à des fonctions à valeurs complexes*

Dans ce chapitre, nous découvrons deux résultats importants : le théorème de Rolle (qui donne l'existence -non constructive - d'un point à la qualité particulière) et l'inégalité des accroissements finis (qui montre que la connaissance d'une majoration de la dérivée donne une connaissance sur une majoration de la fonction d'origine). Quelques vidéos :

— *Lê Nguyên Hoang - Le théorème de Rolle - https ://www.youtube.com/watch?v=ahX2fiXUNs0*
— *Irem Paris7 - Les pratiques enseignantes concernant la dérivée - https ://video.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/watch/048ae57b-99d0-46e2-8b0b-27b1625c1d1f*

Sommaire

1. Problèmes 380
2. Dérivée 380
2.1. Définitions 380
2.2. Règles de calcul 382
2.3. Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ 384
3. Etude globale des fonctions dérivables 388
3.1. Théorème de Rolle 388
3.2. Egalité des accroissements finis 390
3.3. Inégalité des accroissements finis 391
3.4. Prolongement dérivable ou limite de la dérivée 392
3.5. Prolongement de la règle de l'Hospital 395
4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes 395
4.1. Définitions 395
4.2. Opérations 396
5. Bilan 397

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Problèmes

? Problème 92 - Fonction continue nulle part dérivable.

Donner une fonction continue non dérivable en un point.
Donner une fonction continue non dérivable en une infinité de points.
Donner une fonction continue, nulle part dérivable.

? Problème 93 - Dérivation d'ordre n...

... d'une somme de fonctions : que vaut $(f+g)^{(n)}$? Et $(f_1+f_2+\cdots+f_k)^{(n)}$?
... d'un produit de fonctions : que vaut $(f\times g)^{(n)}$? Et $(f_1\times f_2\times\cdots\times f_k)^{(n)}$?
... d'une composition de fonctions : que vaut $(f\circ g)^{(n)}$? Et $(f_1\circ f_2\circ\cdots\circ f_k)^{(n)}$?

? Problème 94 - Dérivation en un point

La dérivée en x_0 existe, signifie que $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite pour $h\to 0$.
Existe-t-il un rapport entre f est dérivable en x_0 et f' admet une limite en x_0 ? Et si oui, quelle est la nature de ce lien (condition nécessaire? suffisante? les deux?)

> ***Pour aller plus loin - Notation Weierstrass***
> *On a vu aussi : f dérivable en a ssi il existe $A\in\mathbb{R}$ tel que $f(x)=f(a)+(x-a)(A+\epsilon(x))$ avec $\epsilon(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}0$*
>
> *ϵ est définie ensuite comme $x\mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-A\dots$*

? Problème 95 - Théorème de la mouche

Supposons que nous sachions qu'une mouche se trouve dans une pièce (même petite), est-il possible d'obtenir une connaissance (même partielle) de sa vitesse?
Supposons que nous sachions que nous connaissions même approximativement la vitesse d'une mouche, est-il possible d'obtenir une connaissance (même partielle) de sa position?

? Problème 96 - Fonctions complexes

Que se passe-t-il si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, à valeurs complexes. Comment les inégalités vus en cours (accroissements finis...) peuvent se transmettre alors que $\mathbb{C}$ n'est pas naturellement ordonné?
Autre question pour $f: z\in\mathbb{C}\mapsto\mathbb{C}$, que peut signifier f est dérivable?

2. Dérivée

2.1. Définitions

Avec une notion de limite plus claire, on peut reprendre :

Définition - Fonction dérivable en un point
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$.

— On dit que f est dérivable en a si l'application (taux d'accroissement de f en a)
$$\tau_a f : \begin{array}{ll} I \setminus \{a\} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$$
admet une limite finie en a.
Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f en a et est notée $f'(a)$ (ou $Df(a)$, ou $\frac{df}{dx}(a)$) :
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

— Si $\tau_a f$ admet une limite finie à droite en a (a n'étant pas l'extrémité droite de I), on dit que f est dérivable à droite en a :
$$f'_d(a) = \lim_{x\to a, x>a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a_+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

— Si $\tau_a f$ admet une limite finie à gauche en a (a n'étant pas l'extrémité gauche de I), on dit que f est dérivable à gauche en a :
$$f'_g(a) = \lim_{x\to a, x<a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a_-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

De la définition, on peut affirmer :

Proposition - Dérivée à gauche et à droite
Si a n'est pas une extrémité de I, f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a et si $f'_g(a) = f'_d(a)$.

On a la définition équivalente, démontrée au chapitre 5.

Proposition - Définition de Weierstrass
On rappelle que f est dérivable en a, si et seulement si
Il existe $A \in \mathbb{R}$, $\epsilon : I \to \mathbb{R}$, continue et nul en a, tels que $f(x) = f(a) + (x - a)[A + \epsilon(x)]$.
Dans ce cas $f'(a) = A$.

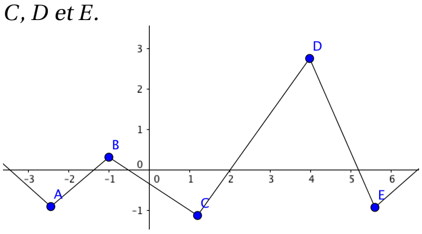
Définition - Fonction dérivable
$f : I \to \mathbb{R}$ est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I.

Théorème - Dérivabilité ⇒ continuité
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable (resp. dérivable à droite, resp. dérivable à gauche) en $a \in I$, alors f est continue (resp. continue à droite, resp. continue à gauche) en a.

Démonstration

Pour aller plus loin - Fonctions lipschitzienne, hölderienne
Il existe des définitions adaptées pour des fonctions continues, mais non dérivables.
Par exemple les fonctions lipschitzienne vérifie :
$$\exists\, k \in \mathbb{R}_+ \mid \forall\, x, y \in I \,|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y|$$
D'une certaine façon, cela consiste à écrire que la fonction τ_a est bornée (mais sans nécessairement admettre une limite).
Pour les fonctions hölderiennes, il y a un coefficient supplémentaire :
$$\exists\, k \in \mathbb{R}_+, \exists\, a > 0 \mid \forall\, x, y \in I \,|f(x)-f(y)| \leqslant k|x-y|^a$$

Représentation - Fonction non dérivable
Pour être dérivable une fonction doit être « lisse ». Un skieur aux skis infiniment fins doit pouvoir skier sans à coup.
La courbe suivante n'est pas dérivable en A, B, C, D et E.



Remarque - Réciproque fausse
La réciproque est fausse.
On peut le voir sur un graphe. On peut aussi le comprendre avec la fonction valeur absolue en 0.

Remarque - Approximation affine de f en a
Pour une fonction f dérivable en a, $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$ s'appelle le développement limité à l'ordre 1 de f en a, il donne, localement, une approximation affine de f.
Nous verrons une définition de ce o par la suite du cours.

2.2. Règles de calcul

On démontre des résultats énoncés au chapitre 5.

Proposition - Dérivation d'un produit
Soient f et g deux fonctions dérivables en a, λ et μ deux réels. Alors $\lambda f + \mu g$ et fg sont dérivables en a et

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a),$$

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

Notons que les démonstrations découle des propriétés de stabilité de limite de fonctions...

Démonstration

Théorème - Dérivation de composition de fonctions
Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, $\phi : I \to \mathbb{R}$ telle que $\phi(I) \subset J$, $f : J \to \mathbb{R}$, $a \in I$.
Si ϕ est dérivable en a et f dérivable en $\phi(a)$ alors $f \circ \phi$ est dérivable en a et

$$(f \circ \phi)'(a) = \phi'(a) f'(\phi(a)).$$

Si ϕ est dérivable sur I, f dérivable sur J, alors $f \circ \phi$ est dérivable sur I et $(f \circ \phi)' = \phi' \times f' \circ \phi$.

Démonstration

Théorème - Dérivée de l'inverse d'une fonction
Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ tel que $f(a) \neq 0$ et f dérivable en a. Alors il existe un intervalle J de $\mathbb{R}$, voisinage de a dans I, tel que f ne s'annule pas sur J et $\dfrac{1}{f}$ (qui est donc définie sur J) est dérivable en a,

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f(a)^2}$$

Démonstration

Exercice
Nous souhaitons faire la démonstration à la Weiertrass

1. Ecrire le développement de $\frac{1}{f(x)}$ en exploitant la dérivée de f en a
2. Montrer que si $\varphi(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$, alors il existe ψ telle que $\psi(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$ et $\frac{1}{1+(x-a)(A+\varphi(x))} = 1-(x-a)(A+\psi(x))$.
3. En factorisant (nécessairement) par $\frac{1}{f(a)}$, montrer que f est dérivable en a et retrouver la valeur de $f'(a)$

Théorème - Dérivation de la fonction réciproque en un point
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ continue, strictement monotone sur I, dérivable en $a \in I$.
On sait que f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
Alors f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$ et

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Corollaire - Fonction réciproque
Soit f dérivable, strictement monotone sur I telle que f' ne s'annule pas sur I. Alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

Démonstration

2.3. Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Définition - Dérivées successives en un point
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On définit par récurrence
• $f^{(0)} = f$
• pour $n \geqslant 1$, on dit que f est n fois dérivable en $a \in I$ s'il existe un intervalle $J \subset I$, J voisinage dans I de a, tel que f soit $n-1$ fois dérivable sur J et tel que $f^{(n-1)} : J \to \mathbb{R}$ soit dérivable en a.
On pose alors $\left(f^{(n-1)}\right)'(a) = f^{(n)}(a)$.
On note aussi $f^{(n)}(a) = D^n f(a) = \dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}(a)$.

Attention - Voisinage de a
Notons que pour définir $f'(a)$, on a besoin d'un voisinage (a minima épontée) de a pour f.
De même pour définir $f^{(n)}(a)$, il faut un voisinage de a pour $f^{(n-1)}$ donc f dérivable $n-1$ fois sur plus qu'au seul point a.
On ne définit donc pas la n-dérivabilité en un point, mais bien sur un voisinage (a minima épointée).

Définition - Dérivées successives d'une fonction
On dit que f est n fois dérivable sur I si f est n fois dérivable en tout point de I.
L'application

$$\left\{\begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f^{(n)}(x) \end{array}\right.$$

est alors appelée dérivée n-ième de f et notée $f^{(n)}$ ou $D^n f$.

Exercice
Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, $\sin^{(n)}$.

Théorème - Théorème de Leibniz
Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivables en $a \in I$, alors fg est n fois dérivable en a et on a la formule :

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

Pour aller plus loin - Leibniz vs Newton
Pourquoi cette formule est-elle si proche de la formule du binôme de Newton ?
Et quelles sont néanmoins les différences ?

Exercice
Soit $h : x \mapsto (x^2 + x + 1)\sin 2x$. Calculer $h^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration

Corollaire - Composition n fois dérivable
Soient $\phi : I \to \mathbb{R}$, $f : J \to \mathbb{R}$ telles que $\phi(I) \subset J$, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}^*$.
Si ϕ est n fois dérivable en a et f est n fois dérivable en $\phi(a)$,
alors $f \circ \phi$ est n fois dérivable en a.

Corollaire - Inverse n fois dérivable
Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ tels que $f(a) \neq 0$ et f, n fois dérivable en a $(n \geqslant 1)$.
Alors $\dfrac{1}{f}$ (définie sur un voisinage de a sur lequel f ne s'annule pas) est n fois dérivable en a.

Pour aller plus loin - La difficulté
La vraie difficulté qu'il faudra affronter, plus ou moins frontalement, lors de la démonstration. Quelle est l'expression de la dérivée n-ième d'une composition ? Et d'une fonction réciproque ?

Pourquoi est-ce bien des corollaires ?

Démonstration

Démonstration

Proposition - Réciproque n fois dérivable
Soit f continue, strictement monotone sur I. Soit $n \geqslant 1$. Si f est n fois dérivable sur I et si f' ne s'annule pas, alors f^{-1} est n fois dérivable sur $f(I)$.

Démonstration

Définition - Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ (ou que f est n fois continûment dérivable) si

(i) f est n fois dérivable sur I
(ii) $f^{(n)}$ est continue sur I.

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout n. On note $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$) l'ensemble des applications de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) de I dans $\mathbb{R}$.

Remarque - Inclusion d'ensembles
• Si f est n fois dérivable sur I alors f est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$.
• On a $\mathscr{C}^0(I) \supset \mathscr{C}^1(I) \supset \mathscr{C}^2(I) \supset \cdots \supset \mathscr{C}^{n-1}(I) \supset \mathscr{C}^n(I) \supset \cdots \supset \mathscr{C}^\infty(I)$
Donc $\bigcap_{i=h}^{k} \mathscr{C}^i(I) = \mathscr{C}^k(I)$ et $\bigcup_{i=h}^{k} \mathscr{C}^i(I) = \mathscr{C}^h(I)$.
D'après les résultats vus pour la dérivabilité en un point a, en prenant tout a de I :

Proposition - Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$
Combinaison linéaire, produit, inverse, composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^n$, fonction réciproque de f de classe $\mathscr{C}^n$ telle que f' ne s'annule pas sont de classe $\mathscr{C}^n$.

Nous avons précisé cela lors du chapitre 5 :

Proposition - Fonctions usuelles
Les fonctions polynomiales, les fonctions $\exp, \ln, \cos, \sin, \tan, \arctan, \mathrm{sh}, \mathrm{ch}$ sont $\mathscr{C}^\infty$ sur leurs ensembles de définition.
Les fonctions $x \mapsto x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
Les fonctions $\arcsin, \arccos$ sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, 1[$.

Exercice

Montrer que les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(1+\sin^2 x)y''+y'+e^{-5x}y=\operatorname{ch} x$ sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

3. Etude globale des fonctions dérivables

3.1. Théorème de Rolle

Proposition - Annulation de la dérivée

Soient $f: I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et $c \in I$, c n'étant pas une extrémité de I.
On suppose que f est dérivable en c et admet un maximum local en c.
Alors $f'(c)=0$.

Remarque - Généralisation et vocabulaire

On observe qu'

— un point c tel que $f'(c)=0$ s'appelle un point critique
— on a le même résultat pour un minimum local

Attention - Il s'agit d'une condition nécessaire, mais pas suffisante

$f'(c)=0$ n'est pas une condition suffisante.
Le contre-exemple classique suivant le montre : $I=\mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ en 0.

Attention - La condition d'intérieur

La proposition est fausse pour c en une extrémité de I.. Le contre-exemple classique suivant le montre : $x \mapsto x+1$ sur $[-1,1]$

Démonstration

Histoire - Michel Rolle

Michel Rolle (1652-1719) est un mathématicien français à l'origine de la notation $\sqrt[n]{x}$

Théorème - Théorème de Rolle

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. On suppose que $f(a)=f(b)$.
Alors il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

On va exploiter le théorème de Weierstrass, mais on ne peut pas le faire au bord. Il faut donc commencer par sortir du bord.

Démonstration

La même démonstration d'adapte tout à fait, au cas où $b=\infty$, mais dans ce cas, il faut prendre un B tel que $\forall\ x>B$, $|f(x)-f(a)|<|f(d)-f(a)|$:

> **Proposition - Généralisation du théorème de Rolle**
> Soit $f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$, continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ telle que $f(a)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
> Alors il existe $c\in]a,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$.

<u>Exercice</u>
Faire la démonstration

Savoir faire - Les racines imbriquées

Bien souvent on applique le théorème de Rolle avec f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, $f(a)=f(b)=0$, on obtient alors la version suivante :
Entre deux zéros de f il y a un zéro de f'.

<u>Exercice</u>
Montrer la formule de Taylor-Lagrange :
Si $f\in\mathscr{C}^n([a,b])$ et $n+1$ fois dérivable, il existe $c\in]a,b[$ telle que

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

Savoir faire - Quelle fonction φ choisir pour bien appliquer le théorème de Rolle ?

De manière générale, on prend $\varphi=f-P$, où P est un polynôme bien choisi.
Mais il y a deux types de questions :

— Ou bien le point c à trouver est associé à une série de derivées de f, en un même point.
C'est le cas ici pour la formule de Taylor : $f^{(k)}(a)$.
On considère alors $P=\sum\limits_{k=0}^{d}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(t-\alpha)$ (α bien choisi).
(C'est la base polynomiale de l'interpolation de Taylor, en fonction des dérivées). Au besoin on ajoute une constante multiplicative pour amorcer le théorème de Rolle (deux racines).

— Ou bien le point c à trouver est associé à une série de valeurs de f, en des points distincts : $x_1,\dots x_n$.
On considère alors $P=\sum\limits_{k=0}^{d}f(x_k)\prod\limits_{i\neq k}\frac{t-i}{k-i}$.
(C'est la base polynomiale de l'interpolation de Lagrange)

> ***Pour aller plus loin - Formules de Taylor***
> *Les formules de Taylor (sous toutes leurs formes) seront essentielles pour déterminer les développements limités des fonctions usuelles, lors du prochain chapitre... et en cours de physique*

On annule et on dérive. On peut avoir à appliquer plusieurs fois le théorème de Rolle.

3.2. Egalité des accroissements finis

Enoncé

Théorème - Théorème (ou formule, ou égalité) des accroissements finis (A.F.)
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

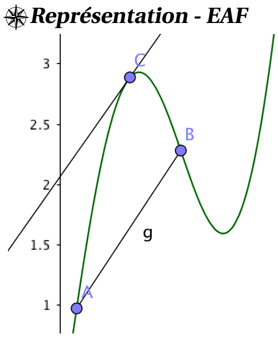
$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

Il s'agit du cas $n=0$ pour la formule de Taylor-Lagrange vue plus haut.

Remarque - Graphiquement
Il existe au moins un point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse dans $]a,b[$ en lequel la tangente à la courbe est parallèle à la droite (AB) où $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$.

Démonstration

Représentation - EAF



Application aux variations d'une fonction

Théorème - CNS de Variations de f
I désigne un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$ (I privé de ses éventuelles bornes). Alors
- f est constante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) = 0$,
- f est croissante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \geqslant 0$,
- f est décroissante sur I si et seulement si $\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) \leqslant 0$.

Démonstration

Pour aller plus loin - Condition encore plus large de stricte monotonie
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$.
Si f' est de signe constant et ne s'annule qu'en des points isolés, alors f est strictement monotone sur I.
Avec la définition :
Un point d'annulation x_0 de f' est dit isolé s'il existe un intervalle de la forme $]x_0-\epsilon, x_0+\epsilon[$, avec $\epsilon > 0$, ne contenant aucun autre point d'annulation de f' que x_0.)

Dans le cas de la seconde implication, avec que des inégalités strictes :

Proposition - Stricte monotonie (C.S)
Soit $f: I \to \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$, alors

$$\forall x \in \mathring{I},\ f'(x) > 0 \Rightarrow f \text{ est strictement croissante sur } I.$$

Attention - La réciproque est fausse
$f: x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $]-1,1[$.
Et pourtant $f'(0) = 0$, avec $0 \in]-1,1[$

Exercice
En appliquant le théorème énoncé dans la marge, montrer que si $f: I \to \mathbb{R}$ est continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$ et si f' est de signe constant et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement monotone sur I.

3.3. Inégalité des accroissements finis

Théorème - Inégalités des accroissements finis
Soit $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$.
Si $\forall x \in]a,b[,\ m \leqslant f'(x) \leqslant M$ alors

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a).$$

Il en découle le corollaire suivant ainsi que la définition des fonctions lipschiztienne :

Corollaire - f bornée et fonction lipschitzienne
Soit $f: I \to \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle I. S'il existe $K \geqslant 0$ tel que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leqslant K$ alors f est K-**lipschitzienne sur** I c'est-à-dire que

$$\forall (x_1,x_2) \in I^2,\ |f(x_2) - f(x_1)| \leqslant K|x_2 - x_1|.$$

Remarque - Réciproque du corollaire
Réciproquement, si f est dérivable sur I et K-lipschitzienne sur I,
alors nécessairement $|f'| \leqslant K$.

Savoir faire - Contrôler f' pour contrôler f
Si l'on cherche à maîtriser f, alors il suffit de maitrise f' et d'intégrer la relation.
Le contrôle réciproque ne marche pas (ce n'est pas parce qu'on connait f qu'on connaît f').
On a déjà vu ce résultat dans le cours sur les primitives et dans le cours sur les équations différentielles

Exercice
Démontrer l'affirmation faite dans cette remarque

Démonstration

Représentation - Interprétation graphique
Si I est un intervalle tel que $\forall x \in I$, $m \leqslant f'(x) \leqslant M$ et $a \in I$, alors la courbe représentative de f se trouve entre les droites d'équations $y = f(a) + m(x-a)$ et $y = f(a) + M(x-a)$.

Remarque - Interprétation autoroutière
Une voiture qui roule sur autoroute entre 100 et 130 km/h (conducteur non débutant!), parcourt en une demi-heure une distance comprise entre 50 et 65 km, en une heure une distance comprise entre 100 et 130 km...au delà de deux heures, elle s'arrête (prévention routière!)

Exercice

Une fonction à dérivée bornée est uniformément continue

Savoir faire - Application à l'étude des suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Cette méthode s'applique à toute suite (u_n) définie par $u_0 \in I$, $u_{n+1} = f(u_n)$ telle que

— I est un intervalle fermé stable par f
— f est dérivable et il existe $k \in]0,1[$ tel que $\forall x \in I$, $|f'(x)| \leqslant k$
— il existe $\ell \in I$ tel que $f(\ell) = \ell$

Dans ce cas, pour tout $n > 0$,

$$|u_n - \ell| \leqslant k|u_{n-1} - \ell| \leqslant k^n|u_0 - \ell$$

(par récurrence géométrique). Et donc, par le théorème d'encadrement : $(u_n) \to \ell$

Exercice

On considère la suite définie par $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$. Donner une majoration de $|u_{n+1} - 2|$ en fonction de $|u_n - 2|$ puis une majoration de $|u_n - 2|$ en fonction de $|u_0 - 2|$ et n. En déduire que (u_n) est convergente.

Exercice

Etudier la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{2}\sin u_n$.

3.4. Prolongement dérivable ou limite de la dérivée

Théorème - Limite de la dérivée
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b]$.
On suppose que f' admet une limite finie ℓ en a.
Alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$, c'est-à-dire que f est dérivable en a et f' est continue en a ($f'(a) = \ell$).

Corollaire - Limite de la dérivée (au coeur de l'intervalle)
Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I, dérivable sur les deux intervalles constituant $I \setminus \{a\}$ et si f' admet une limite ℓ en a, alors f est dérivable en a et f' est continue en a ($f'(a) = \ell$).

Démonstration

Proposition - Limite de la dérivée infinie
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b]$. On suppose que $\lim_{x\to a} f'(x) = +\infty$ (resp $-\infty$).
Alors $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$ (resp. $-\infty$), c'est-à-dire que f n'est pas dérivable en a mais que $\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente verticale en a.

Démonstration

Le théorème suivant est en fait un corollaire du premier théorème avec l'hypothèse supplémentaire que f' est continue sur $I \setminus \{a\}$.

Théorème - Théorème de classe $\mathscr{C}^1$ par prolongement
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue sur I, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que f' admet une limite finie ℓ en a. Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et $f'(a) = \ell$.

Remarque - Force du théorème
Ce théorème remplace les **deux** calculs (a priori) de :
— $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (pour la dérivabilité en a ou existence de $f\prime(a)$)
— et $\lim_{x\to a} f'(x)$ (pour la continuité en a de $x \mapsto f'(x)$)
par uniquement celui de $\lim_{x\to a} f'(x)$.

Exemple - Applications

On généralise par récurrence aux fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Théorème - Théorème de classe $\mathscr{C}^k$ par prolongement
Soit $f : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$. On suppose que pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ $f^{(i)}$ admet une limite finie ℓ_i en a. Alors f admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^k$ sur I et pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ $f^{(i)}(a) = \ell_i$.

Exemple - Fonction $f : x \mapsto \begin{cases} e^{-1/x} & \textbf{si } x > 0 \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases}$

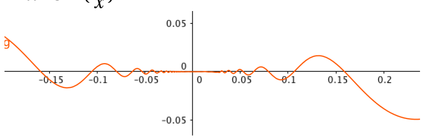
Pour aller plus loin - Calcul
Par récrurrence : $P_0 = 1$ et $P_{n+1}(u) = -u^2(P_n(u) + P_n'(u))$

Exercice
Soit

$$f : \begin{array}{l} [0,1] \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0, 1]$.
2. f' a-t-elle une limite en 0 ?
3. f est-elle dérivable sur $[0, 1]$? de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, 1]$?
4. Que peut-on en conclure pour les théorèmes précédents ?

Représentation - Representation de $x \mapsto x^2 \sin(\frac{1}{x})$



Savoir faire - Exploiter le théorème de la limite de la dérivée
Ici, il est surtout important de montrer au correcteur que l'on écrit pas n'importe quoi.
- Par exemple, ce n'est pas la dérivée qui est prolongée.
- Savoir si une fonction est dérivable en un point, ne consiste pas a priori, à savoir si la dérivée admet une limite en ce point.

Cette dernière observation ($\lim_{x_0} f'$) s'étudie comme conséquence d'un super théorème !
Pour être assuré que le correcteur a bien compris qu'on exploite ce théorème, on rappelle avec insistance les hypothèses à vérifier pour appliquer le théorème (continuité de f...).
Si on doit le démontrer pour les dérivées de tous les ordres, on fait une récurrence, avec un contrôle pour s'assurer le passage à la limite.

Exercice
Pour $x \neq 0$, on pose $f(x) = \dfrac{\sin x^2}{x}$. Montrer que f se prolonge sur $\mathbb{R}$ en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

3.5. Prolongement de la règle de l'Hospital

Analyse - Cas $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ indéterminé

Proposition - Prolongement de la règle de l'Hospital
Soit $a \in I$, f et g dérivable sur $I \setminus \{a\}$.
Si $\dfrac{f'}{g'}$ admet une limite en a et $g' \neq 0$ sur un voisinage épointé de a.
Alors $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}$ admet une limite en a égale à $\lim\limits_{a} \dfrac{f'}{g'}$.

Démonstration

Un petit d'exercice d'application qui donne un savoir-faire et reprend un résultat du DM2.

Exercice

Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^4}$

4. Généralisation aux fonctions à valeurs complexes

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point.

4.1. Définitions

Définition - Taux de variations ou parties réelle et imaginaire
Soit $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{C})$, $a \in I$. On définit la fonction τ_a sur $I \setminus \{a\}$ par

$$\tau_a(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Il y a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

τ_a possède une limite en a (limite dans $\mathbb{C}$).
$\mathfrak{Re} f$ et $\mathfrak{Im} f$ (fonctions à valeurs réelles) sont dérivables en a.

On dit alors que f est dérivable en a. On note $f'(a) = Df(a) = \dfrac{df}{dx}(a)$ cette limite.
On a $f'(a) = (\mathfrak{Re} f)'(a) + i(\mathfrak{Im} f)'(a)$.

Remarque - Démonstration ?
Il faudrait démontrer l'équivalence entre les deux propriétés.
Cela découle simplement de

$$\tau_a(x) = \frac{\mathfrak{Re} f(x) - \mathfrak{Re} f(a)}{x-a} + i\frac{\mathfrak{Im} f(x) - \mathfrak{Im} f(a)}{x-a}$$

Puis on prend les limites

Proposition - Dérivabilité ⇒ Continuité (en un point)
Si $f \in \mathscr{F}(I,\mathbb{C})$ est dérivable en a, alors elle est continue en a.

Démonstration

Proposition - Dérivabilité ⇒ Continuité (sur un intervalle)
f est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point de I. Dans ce cas elle est continue sur I.

Définition - Dérivations successives
On définit les dérivées successives de la même manière que pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si elle est n fois dérivable sur I et si sa dérivée n-ième est continue sur I.
On dit qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si elle est de classe $\mathscr{C}^n$ pour tout n (soit si elle est dérivable à n'importe quel ordre).
On note $\mathscr{C}^n(I,\mathbb{C})$ (resp. $\mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{C})$) l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ (resp. $\mathscr{C}^\infty$) sur I.

4.2. Opérations

Les propositions qui suivent se démontrent aisément en prenant les parties réelles et imaginaires de chaque fonction et en appliquant alors les résultats pour les fonctions à valeurs réelles...

Proposition - Stabilité
Soient $f, g \in \mathscr{F}(I,\mathbb{C})$ dérivables en a et $(\lambda,\mu) \in$
Ce^2 alors
• $\lambda f + \mu g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas en a) sont dérivables en a, les formules donnant les dérivées étant les mêmes que pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.
• Si $\phi \in \mathscr{F}(J,\mathbb{R})$ dérivable en $f(a)$ et $f(I) \subset J$, alors $\phi \circ f$ est dérivable en a et

$$(\phi \circ f)'(a) = f'(a) \times \phi'(f(a))$$

• $\overline{f}$ est dérivable en a et $(\overline{f})'(a) = \overline{f'(a)}$.
• L'exponentielle complexe de f ($e^f : x \mapsto e^{f(x)} = e^{\mathfrak{Re} f(x)}(\cos(\mathfrak{Im} f(x)) + i\sin(\mathfrak{Im} f(x)))$ est dérivable en a et $(e^f)'(a) = f'(a)e^{f(a)}$.

Plus généralement encore :

Proposition - Stabilité
On a donc que si $f, g \in \mathscr{F}(I, \mathbb{C})$ sont dérivables sur I, ϕ dérivable sur J, alors $\lambda f + \mu g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas sur I), $f \circ \phi$, $\overline{f}$, e^f sont dérivables sur I avec les formules usuelles de dérivation.

Proposition - Généralisation au dérivée n-ièmes
• $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{C})$ admet une dérivée n-ième sur I si et seulement si les fonctions à valeurs réelles $\mathfrak{Re} f$ et $\mathfrak{Im} f$ admettent une dérivée n-ième sur I et alors :

$$\mathfrak{Re}(f^{(n)}) = (\mathfrak{Re} f)^{(n)} \text{ et } \mathfrak{Im}(f^{(n)}) = (\mathfrak{Im} f)^{(n)}$$

• Si $f, g \in \mathscr{F}(I, \mathbb{C})$ sont n fois dérivables sur I (resp. de classe $\mathscr{C}^n$ sur I) alors $\lambda f + \mu g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas sur I) sont n fois dérivables sur I (resp. de classe $\mathscr{C}^n$ sur I) et

$$(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$$

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \text{(formule de Leibniz)}$$

Exercice
Préciser (et démontrer) si les affirmations suivantes restent vraies dans le cas complexe :

1. $f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{C})$ dérivable sur I est constante sur I si et seulement f' est nulle sur I
2. Le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis.
3. Inégalité des accroissements finis.
   Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$, continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ (avec $a < b$) telle que $\forall x \in]a, b[, |f'(x)| \leqslant M$. Alors

$$\Big|f(b) - f(a)\Big| \leqslant M|b-a|.$$

5. Bilan

Synthèse

- ⇝ Si l'on souhaite encore plus maîtriser les variations de $f(x)$, en maitrisant les variations de x, il est bon de connaitre le rapport entre ces deux types de variations. C'est la dérivée.
- ⇝ Tout le cours consiste à redémontrer les résultats exploités en début d'année. On gagne, dans ce chapitre : le théorème de Rolle qui s'étend en égalité des accroissements finis (EAF) sur $\mathbb{R}$) ou inégalités des accroissements finis (IAF) sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on donne enfin la démonstration sur l'impact du signe de f' qui donne les variations de f et les conséquences lorsque f' admet une limite...
- ⇝ Comme d'habitude on termine par l'extension sur $\mathbb{C}$. En perdant la relation d'ordre, on perd l'EAF...

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

— Savoir-faire - Les racines imbriquées
— Savoir-faire - Quelle fonction φ choisir pour bien appliquer le théorème de Rolle ?
— Savoir-faire - Contrôle f' pour contrôler f
— Savoir-faire - Application (I.A.F.) à l'étude des suites $u_{n+1} = f(u_n)$
— Savoir-faire - Exploiter le théorème de la limite de la dérivée

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$\mathscr{C}^k(I)$	Ensemble des fonctions k fois dérivables sur I et donc la k-ième dérivée est continue sur I	$\mathscr{C}^{k+1}(I) \subset \mathscr{C}^k(I)$	On dit aussi que f est de classe $\mathscr{C}^k$.
$\mathscr{C}^\infty(I)$	Ensemble des fonctions infiniment dérivables sur I	$\mathscr{C}^\infty(I) = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathscr{C}^k(I)$	On dit aussi que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Retour sur les problèmes

92. $x \mapsto |x|$ est continue, non dérivable en 0.
    On note $\theta(x) = x - \lfloor x \rfloor$, partie décimale de x. Alors $x \mapsto \theta(x)[\theta(x) \leqslant \frac{1}{2}] + (1-\theta(x))[\theta(x) > \frac{1}{2}]$ est continue, non dérivable en tous les points $\dfrac{m}{2}$ avec $m \in \mathbb{Z}$.
    Un gribouillage est continue, nulle part dérivable. ABEL a également un célebre contre-exemple trouvable sur internet.
93. Cours. Mais les formules ne sont pas toujours faciles (composition).
94. Le fameux théorème qui n'est pas le prolongement de la fonction dérivée…
95. Oui ! La maîtrise de la dérivée, donne un encadrement de la fonction f.
96. Cours. Pour les fonctions de $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, on appelle holomorphe la qualité d'être dérivable. Cela donne une grande rigidité à la fonction et donc quelques qualités. Comme la plupart des fonctions usuelles sont holomorphes (toutes celles qui peuvent s'écrire sous forme de série), elles possèdent donc de nouvelles qualités (du moins, que l'on ignorait).