Chapitre 22

Convexité

Résumé -

Les fonctions ne sont rarement totalement croissantes ou décroissantes, mais seulement par morceaux. De même, dans notre sac de fonctions, la plupart sont convexes ou concaves par morceaux. Cela nous donne une série d'inégalités facilement, celles-ci permettent en retour d'offrir des propriétés de régularité forte!
Quelques vidéos :

— *Bibmath - Des vidéos comme pastilles démonstratives - https ://www.bibmath.net/ressources/index.php?action=affiche&quoi=mathspe/cours/convexe.html*
— *Kiffelesmaths - Fonctions concaves et convexes (L'école des mathématiques) - https ://www.youtube.com/watch?v=va9NqRKArcw*
— *Lesbonsprofs (c'est eux qui le disent) - Fonctions convexe et fonction concave - https ://www.youtube.com/watch?v=4P658MI1xxE*

Sommaire

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

1. Problèmes

? Problème 97 - Une dérivée seconde positive...

Les inégalités sont essentielles en analyse réelle.
Pour obtenir les inégalités, on exploite souvent la croissance (d'une différence) de fonctions. Quand tout va bien, on les obtient souvent par étude du signe de la dérivée.
Parfois, il faut dérivée deux fois. Par exemple pour obtenir $\sup_I |f'|$, lors de l'application de l'inégalité des accroissements finis.
Que dire d'une fonction dont la dérivée seconde est positive (cas d'application de l'"inégalité des accroissements finis)? Quelle régularité cela donne?

? Problème 98 - Convexité $\Rightarrow$ Dérivabilité ?

Réciproquement, la convexité implique-t-elle la dérivabilité? Et d'abord la continuité?
La réponse est non, car $x \mapsto |x|$ est convexe mais non dérivable.
Néanmoins, on peut penser que tout n'est pas perdu...

2. Fonctions convexes

2.1. Ecriture paramétrique d'un segment

Analyse - Equation paramétrique d'un segment

Proposition - Paramétrisation du segment $[a,b]$
Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$t \in [a,b] \Longleftrightarrow \exists\, \lambda \in [0,1] \text{ tel que } t = \lambda a + (1-\lambda) b$$

A savoir ce nombre λ vérifie (réciproquement) : $\lambda = \dfrac{t-b}{a-b}$.

On vérifie aussi que $\lambda = 1 \Longleftrightarrow t = a$ et $\lambda = 0 \Longleftrightarrow t = b$.

2.2. Définition d'une fonction convexe (et concave)

Définition - Fonction convexe et concave
On dit que f est convexe sur I si

$$\forall\, x, y \in I, \forall\, \lambda \in [0,1], \qquad f\big(\lambda x + (1-\lambda) y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

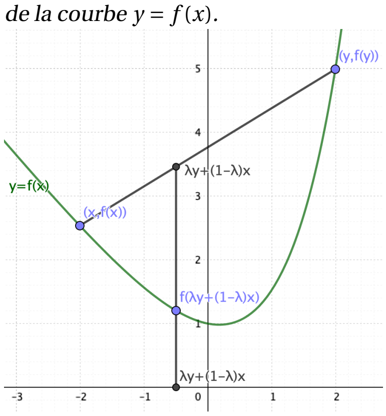
Lorsque l'inégalité est stricte, alors on dit que la fonction f est strictement convexe.
On dit que f est concave (si $-f$ est convexe) sur I si

$$\forall\, x, y \in I, \forall\, \lambda \in [0,1], \qquad f\big(\lambda x + (1-\lambda) y\big) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

Evidemment une fonction peut être ni convexe ni concave.

Exemple - $x \mapsto x^2$

Représentation - Graphique
On a donc, pour tout $A(x, f(x))$ et $B(y, f(y))$ deux points de la courbe $y = f(x)$, le segment qui lie ses deux points (la corde) est au-dessus de la courbe $y = f(x)$.



Remarque - Critères de convexité
On démontrera par la suite que la fonction $x \mapsto e^x$ est convexe, ainsi que beaucoup d'autres fonctions... (au moins par morceaux).
Nous verrons un critère simple plus loin avec la dérivation (seconde).

Exercice
Que dire de f si f est convexe et concave sur I.

Savoir faire - Inégalité de convexité de manière explicite (et non uniquement paramétrique)
On cherche à énoncer l'inégalité de convexité pour $z \in [x, y]$, en remplaçant la forme paramétrique du segment $[x, y]$ par une version explicite.
Soit $z \in [x, y]$, alors il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $z = \lambda x + (1-\lambda) y$, il s'agit de $\lambda = \dfrac{z-y}{x-y}$ et $1-\lambda = \dfrac{z-x}{y-z}$.
On a alors

$$f(z) = f\big(\lambda x + (1-\lambda) y\big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda f(y) = \frac{(z-y) f(x) - (x-z) f(y)}{x-y}$$

2.3. Stabilité de l'ensemble des fonctions convexes

Proposition - Stabilité
Si f et g sont convexes sur I, alors $f+g$ est convexe sur I.
Si f est convexe sur I et $k \geqslant 0$. Alors kf est convexe sur I.

Démonstration

La convexité (concavité) sert surtout pour obtenir facilement des inégalités...

3. Inégalités

3.1. Généralisation

Proposition - Généralisation - Inégalité de Jensen
Si f est convexe sur I, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, \dots a_n \in I$ et $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n \in$

$[0,1]$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k a_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(a_k)$$

Démonstration

Savoir faire - Normaliser les coefficients pour la convexité

On notera la technique classique qui consiste étant donné une famille de coefficients $(\lambda_i)_{i\in I}$ positifs tel que $\sum_{i\in I}\lambda_i = S$ de considérer $\mu_i = \dfrac{\lambda_i}{S}$.

Alors $\mu_i \in [0,1]$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$.

3.2. Comparaison des pentes

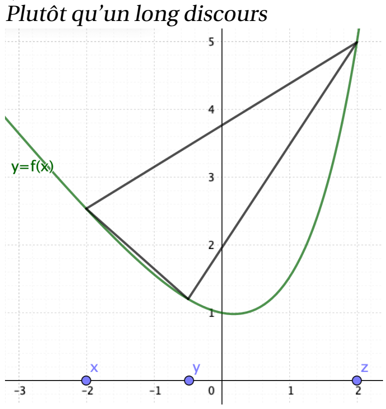
Les inégalités suivantes, équivalentes à la convexité, aident pour l'étude de la continuité, voire de la dérivabilité de f.

Lemme - Inégalité des trois pentes
Soit f une fonction convexe sur I. Alors pour tout $x, y, z \in I$ et $x < y < z$,

on a $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \dfrac{f(z)-f(y)}{z-y}$

Démonstration

Représentation - Lemme des trois pentes
Plutôt qu'un long discours



Proposition - Croissance des pentes
Soit f définie sur I.
f est convexe sur I si et seulement si,

pour tout $a \in I$, $\varphi_a : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$

Démonstration

3.3. Tangente

On suppose localement que f est dérivable.

Proposition - Inégalité des tangentes
Soit f convexe sur I.
On suppose de plus que f est dérivable sur I.
Soit $x_0 \in I$, alors pour tout $x \in I$, $f(x) \geqslant f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

Démonstration

A retenir : selon que l'on cherche une majoration de $f(x)$ ou une minoration,

Savoir faire - Utilisation de la convexité (inégalités)
Trois façons d'exploiter la convexité d'une fonction :
- La comparaison à la corde qui donne un **majorant** à $f(x)$
- La comparaison à la tangente qui donne un **minorant** à $f(x)$
- La comparaison des pentes, croissantes (avec le lemme des trois pentes ou directement).

4. Régularité

4.1. Continuité

Remarque - Rappel - Intérieur
On appelle intérieur de l'intervalle I, l'ensemble des nombres réels x tels qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset I$.
On note cet ensemble $\mathring{I}$. Cf chapitre de topologie réel.
Si I est ouvert, alors tout point x de I est nécessairement un point de $\mathring{I}$.

Proposition - Convexité implique continuité
Soit I un intervalle.
Si f est une fonction convexe sur I, alors f est continue sur $\mathring{I}$ (l'intérieur de I).

Démonstration

On verra mieux au chapitre suivant.

4.2. Critères de convexité (avec la dérivation)

Avec f'

Lorsqu'une fonction est suffisamment régulière, démontrer sa convexité est simple.

Proposition - Critère de convexité avec la dérivée
Si f est dérivable sur I.
Alors f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I

Démonstration

Savoir exploiter f'', si possible

Savoir faire - Démontrer qu'une fonction est convexe.

Dans de très nombreux cas, on montre que f est convexe en montrant que f est dérivable et f' est croissante.
Et la plupart du temps, on a f dérivable deux fois. Dans ce cas f est convexe si (et seulement si) $f'' \geqslant 0$

Exercice

1. Montrer que exp est convexe.
2. En déduire que l'inégalité arithmético-géométrique sur $\mathbb{R}+$: $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$

Dérivabilité (partielle) par la convexité

Proposition - Dérivabilité à gauche et à droite
Soit f convexe sur l'intervalle I.
Alors f est dérivable à gauche et à droite en tout point x de $\mathring{I}$ et $f'_g(x) \leqslant f'_d(x)$.

Mais on n'a pas nécessairement $f'_g(x) = f'_d(x)$, comme pour $x \mapsto |x|$, sinon f serait dérivable en x.

Démonstration

On retrouve en corollaire la continuité de f en x.

5. Bilan

Synthèse

- ⇝ L'un des plus importants résultats de topologie réelle est le TVI : il n'y a pas de trou dans $\mathbb{R}$ et toute transformation qui conserve une partie sans trou (ou intervalle) de $\mathbb{R}$ doit être continue. L'enjeu est donc la continuité ! Il faut pour cela définir la notion de limite de fonction, en un point, puis sur un intervalle.
- ⇝ Nous terminons par l'étude des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

— Savoir-faire - Inégalité de convexité de manière explicite (et non uniquement paramétrique)
— Savoir-faire - Normaliser les coefficients pour la convexité.
— Savoir-faire - Démontrer qu'une fonction est convexe.
— Savoir-faire - Utilisation de la convexité (inégalités)

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$\mathring{I}$	Intérieur de l'ensemble I	$\{x \in I \mid \exists\, \epsilon > 0 \mid]x-\epsilon, x+\epsilon[\subset I\}$	Si $x \in \mathring{I}$, on peut tendre vers x par valeurs inférieures ou supérieures.

Retour sur les problèmes

97. Attention, c'est une condition suffisante, mais non nécessaire. Voir le problème suivant
98. On a vu dans le cours que la convexité impliquait la dérivabilité à droite et à gauche en tout point, mais pas la dérivabilité générale.