

DEVOIR SURVEILLÉ N°4

Sujet donné le samedi 25 novembre 2023, 4h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la **précision des raisonnements** et l'énoncé des **formules utilisées**. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.

BON TRAVAIL

PROBLÈME - « TRANSFORMATION Γ » ET TRANSCENDANCE

Dans ce problème, nous étudions l'approximation de réels par des rationnels.

Dans la première partie, nous mettons en place une transformation à partir d'une équation différentielle. Cette partie aboutit donc sur la transformation :

$$P \mapsto \left(\mathcal{I}(P) : t \mapsto \int_0^t e^{t-u} P(u) du \right)$$

Nous étudions, en seconde partie le cas de la transformation pour $P : t \mapsto \sqrt{t}$. Cela nous conduit à définir et étudier les intégrales de Wallis.

En troisième partie, nous cherchons un critère de transcendance pour les nombres réels. On étudie le développement en fractions continues pour l'occasion.

En quatrième partie, de manière différente de la précédente partie, nous démontrons la transcendance de e (Théorème d'Hermite) à l'aide de la transformation étudiée en première partie.

I Equation différentielle paramétrée

On fixe $a \in \mathbb{R}_+$, et on note (E_a) l'équation différentielle : $xy' + (x - a)y = e^{-x}$, définie sur $\mathbb{R}$.
(On notera que x est la variable selon laquelle y est dérivée.)

- I.1. (a) Résoudre (H_a) l'équation différentielle homogène associée à (E_a) sur un intervalle I ne contenant pas 0.
- (b) Donner S_a , l'ensemble des solutions de (E_a) .
On donnera d'abord les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ et on cherchera les solutions sur $\mathbb{R}$.
- (c) Résoudre le problème de Cauchy définie sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{cases} xy' + (x - a)y = 0 \\ y(1) = e^{-1} \end{cases}$$

On note f_a , la solution de ce problème. On étend sa définition à tout $\mathbb{R}$ et pour $a \geq 0$, en posant : $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x} x^a$.

I.2. Montrer que f_a admet sur $\mathbb{R}$ une unique primitive, notée F_a , qui s'annule en 0

I.3. (a) En exploitant (H_a) , préciser les variations de f_a sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Dédurre des variations de f_{a+2} que sur $\mathbb{R}_+$:

$$f_a \leq e^{-x} x^a \mathbf{1}_{[0, a+2]} + e^{-a-2} \frac{(a+2)^{a+2}}{x^2} \mathbf{1}_{[a+2, +\infty]}$$

(c) Conclure que, pour tout $x \geq a+2$:

$$F_a(x) \leq F_a(a+2) + e^{-a-2} (a+2)^{a+1}$$

et que F_a admet une limite en $+\infty$, que l'on note γ_a

I.4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n = n!$

On commencera par donner une relation de récurrence entre γ_{n+1} et γ_n .

II $\gamma_{\frac{1}{2}}$ et intégrales de Wallis

On garde les notations de la partie précédente.

II.1. A l'aide d'un changement de variables, puis d'une intégration par parties, montrer que :

$$F_{\frac{1}{2}}(n) = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2} du - \sqrt{n}e^{-n}$$

II.2. On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta$.

- (a) Calculer W_0 et W_1 .
- (b) Montrer que la suite (W_n) est décroissante et positive.
- (c) Montrer avec une intégration par parties que $W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$
En déduire une expression sous forme de fraction de α_n tel que $W_{n+2} = \alpha_n W_n$.
- (d) Montrer que la suite $(nW_n W_{n-1})_{n \geq 1}$ est une suite constante. Quelle est sa valeur ?
- (e) En exploitant la décroissance de (W_n) , et le résultat précédente, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n}{4n+4}\pi \leq nW_{2n+1}^2 \leq \frac{n}{4n+2}\pi$$

II.3. En exploitant l'inégalité : $\ln(1+x) \leq x$, vraie pour tout $x > -1$,

(a) Montrer que :

$$\forall t \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}], \quad \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

(b) En déduire les trois inégalités suivantes :

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq F_{\frac{1}{2}}(n) + \sqrt{n}e^{-n} \leq \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} \theta d\theta \leq \sqrt{n}W_{2n-2}$$

II.4. Conclure sur la valeur de $\gamma_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et de $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.

III Nombre de Liouville, approximation rationnelle et mesure d'irrationalité

On considère un nombre ξ algébrique de degré d , racine de l'équation polynomiale à coefficients entiers $T(x) = \sum_{k=0}^d \lambda_k x^k = 0$.

On suppose donc que $\lambda_0 \neq 0$.

III.1. Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, une fraction écrite sous forme irréductible.

- (a) On suppose, en outre, que $r \in [\xi - 1, \xi + 1]$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $T(r) = \frac{a}{q^d}$.
- (b) En exploitant l'inégalité des accroissements finis, montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|T(r)| \leq M|r - \xi|$
- (c) En déduire qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que pour toute fraction $r \in \mathbb{Q}$, non racine de T , $|\xi - r| \geq \frac{C}{q^d}$.

III.2. Mesure d'irrationalité de x .

On note pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

$$A(x) = \left\{ m \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \text{card}\{(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \mid 0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^m}\} = +\infty \right\}$$

$$B(x) = \left\{ m \in \mathbb{R}_+ \mid \exists A > 0 \text{ tel que } \forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \left|x - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{A}{q^m} \right\}$$

- (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $1 \in A(x)$.
- (b) Soient $m_1 < m_2$.
 - i. Montrer que $m_2 \in A(x) \Rightarrow m_1 \in A(x)$.
On note $\mu_1(x) = \begin{cases} \sup A(x) & \text{si } A(x) \text{ majoré} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que $A(x) = [0, \mu_1]$ ou $A(x) = [0, \mu_1[$.
 - ii. Montrer que $m_1 \in B(x) \Rightarrow m_2 \in B(x)$.
On note $\mu_2(x) = \begin{cases} \inf B(x) & \text{si } B(x) \text{ non vide} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que $B(x) = [\mu_2, +\infty[$ ou $B(x) =]\mu_2, +\infty[$.
- (c) Montrer que si $m_1 \in A(x)$ et $m_2 \in B(x)$, alors nécessairement : $m_1 < m_2$.

(d) On suppose que $B(x)$ non vide. Montrer que $\forall m < \mu_2(x), m \in A(x)$.

(e) Conclure que $\mu_1(x) = \mu_2(x)$.

On appelle mesure d'irrationalité de $x \in \mathbb{R}$, le nombre définie par l'une des deux formulations suivantes :

$$\mu(x) = \sup \left\{ m \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \text{card}\{(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \mid 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^m}\} = +\infty \right\}$$

$$\mu(x) = \inf \left\{ m \in \mathbb{R}_+ \mid \exists A > 0 \text{ tel que } \forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{A}{q^m} \right\}$$

(f) Montrer, en exploitant III.1., que si ξ est algébrique de degré d et non rationnel, sa mesure d'irrationalité est inférieure à d .

III.3. Nombre de Liouville. On note $\ell_n = \sum_{k=0}^n 10^{-k!}$.

(a) Montrer que (ℓ_n) est une suite croissante majorée donc convergente. On note $\ell = \lim(\ell_n)$.

(b) Montrer que la mesure d'irrationalité de ℓ est supérieur à n , pour tout n .

(c) Conclure que ℓ (nombre de Liouville) est transcendant.

III.4. Fractions continues.

On considère une suite (a_n) d'entiers naturels non nuls. On lui associe suites de nombres d'entiers $(p_k)_{k \geq -1}$ et $(q_k)_{k \geq -1}$ définies par récurrence :

$$\begin{cases} p_{-1} = 1 & p_0 = a_0 & \forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1} \\ q_{-1} = 0 & q_0 = 1 & \forall n \in \mathbb{N}, q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \end{cases}$$

(a) Montrer que $(q_n)_{n \geq 1}$ est une suite strictement positive et strictement croissante d'entiers naturels.

On admet qu'il en est de même pour (p_n) .

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$.

(c) On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \frac{p_n}{q_n}$.

Montrer que $(r_{2n})_n$ et $(r_{2n+1})_n$ sont des suites adjacentes

Ici $(r_{2n})_n$ décroissante, $(r_{2n+1})_n$ croissante et $\lim(r_{2n} - r_{2n+1}) = 0$. On note $x = \lim(r_{2n}) = \lim(r_{2n+1}) = \lim(r_n)$.

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x - r_n| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2}$

(e) (*) Montrer que pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq |x - r_n| \implies q \geq q_n$$

Autrement écrit : on ne peut pas faire de meilleure approximation de x par $\frac{p_n}{q_n}$ avec une fraction dont le dénominateur est plus petit que q_n .

(f) (***) Démontrer que la mesure d'irrationalité de x vérifie :

$$\mu(x) = 1 + \limsup \frac{q_{n+1}}{q_n}$$

On appelle $\limsup(u_n)$ la limite de la suite $(\tilde{u}_n)$, où pour tout entier n , $\tilde{u}_n = \sup\{u_k, k \geq n\}$.

On démontre que dans tous les cas où (u_n) est bornée : $(\tilde{u}_n)$ est une suite décroissante, minorée donc convergente. Sa limite est la plus grande des valeurs d'adhérence de (u_n) .

IV Pseudo-transformation de Laplace et transcendance de e

On note, pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$:

$$\mathcal{I}(f) : t \mapsto \int_0^t e^{t-u} f(u) du$$

IV.1. Si $f : x \mapsto x^a$, quelle relation existe-t-il entre $\mathcal{I}(f)$ et F_a (définie en partie I) ?

IV.2. Résoudre, en exploitant en particulier la méthode de la variation de la constante l'équation différentielle :

$$y' - y = P$$

IV.3. Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

(a) Pourquoi P est-elle de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$?

(b) Soit $t \geq 0$. Soit $\Phi : u \mapsto e^{t-u} \sum_{h=0}^n P^{(h)}(u)$.

Simplifier le calcul de $\Phi'(u)$.

(c) En déduire

$$\mathcal{I}(P)(t) = e^t \sum_{h=0}^n P^{(h)}(0) - \sum_{h=0}^n P^{(h)}(t)$$

IV.4. Supposons que $e (= \exp(1))$ soit un nombre algébrique (de degré d).

Donc il existe $d \in \mathbb{N}$, puis $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{Z}$ tels que $\sum_{k=0}^d \lambda_k e^k = 0$ avec $\lambda_0 \neq 0$.

On note T la fonction polynomiale : $T : x \mapsto \sum_{k=0}^d \lambda_k x^k$.

(a) On considère toujours une polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, quelconque.

Montrer que

$$\sum_{k=0}^d \lambda_k \mathcal{I}(P)(k) = - \sum_{k=0}^d \sum_{h=0}^n \lambda_k P^{(h)}(k)$$

On notera ce nombre $\mathcal{J}(P)$

(b) Soit $s \in \mathbb{N}^*$. On considère $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et on note $P_k(x) = (x - k)^s$.

Montrer que $P_k^{(h)}(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \neq s \\ s! & \text{sinon} \end{cases}$.

(c) On fixe un entier non nul $s \in \mathbb{N}^*$ et on considère le polynôme $P(x) = x^{s-1}(x-1)^s(x-2)^s \cdots (x-d)^s$.
Montrer que $\mathcal{J}(P)$ est un entier, divisible par $(s-1)!$.

On admettra la formule de Leibniz : si $P = P_1 \times P_2$, alors pour tout $h \in \mathbb{N}$, $P^{(h)} = \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} P_1^{(j)} P_2^{(h-j)}$.

(d) (*) Montrer que si s est un nombre premier suffisamment grand $\mathcal{J}(P) \neq 0$.

IV.5. (a) Montrer que pour tout polynôme P , pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$: $|\mathcal{I}(P)(k)| \leq e^n \sup\{|P(t)|, t \in [0, n]\}$

(b) Dans le cas $P(x) = x^{s-1}(x-1)^s(x-2)^s \cdots (x-d)^s$, montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $|\mathcal{I}(P)(k)| \leq e^d d^{s(d+1)-1}$.

(c) En prenant $a = \max\{e^d \sum_{k=0}^d |\lambda_k|; d\}$, puis $C = ad^d$ montrer que $|\mathcal{J}(P)| \leq C^s$

(d) Conclure.

Correction

PROBLÈME - « TRANSFORMATION Γ » ET TRANSCENDANCE

On considère deux ensembles notés E et F .

I Equation différentielle paramétrée

On fixe $a \in \mathbb{R}_+$, et on note (E_a) l'équation différentielle : $xy' + (x - a)y = e^{-x}$, définie sur $\mathbb{R}$.
(On notera x la variable selon laquelle y est dérivée.)

I.1. (a) Résoudre (H_a) l'équation différentielle homogène associée à (E_a) sur un intervalle I ne contenant pas 0.

Soit I un intervalle ne contenant pas 0.

L'équation (H_a) est $xy' + (x - a)y = 0$.

On l'écrit sous forme résolue (ou normalisée), c'est possible car $x \neq 0$, puisque $x \in I$.

Ainsi $(H_a) \iff y' + (1 - \frac{a}{x})y = 0$.

Le cours permet d'affirmer directement (sans réciproque et cie) :

$$\mathcal{S}_H = \{x \mapsto C \exp(-(x - a \ln |x|)); C \in \mathbb{R}\} = \{x \mapsto C|x|^a e^{-x}; C \in \mathbb{R}\}$$

(b) Donner $\mathcal{S}_a$, l'ensemble des solutions de (E_a) .

On donnera d'abord les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$ et on cherchera les solutions sur $\mathbb{R}$.

Il s'agit maintenant de trouver une solution particulière de (E_a) sur I (ne contenant pas 0, comme précédemment).

On peut chercher cette solution particulière, notée $\tilde{y}$ sous la forme $x \mapsto g(x)e^{-x}$.

On a alors $\tilde{y}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ (donc sur I) ssi g l'est bien.

Supposons que tel est le cas, on a alors :

$$x\tilde{y}' + (x - a)\tilde{y} = x[g'(x)e^{-x} - g(x)e^{-x}] + (x - a)g(x)e^{-x} = [xg' - ag]e^{-x} = e^{-x}$$

Et donc comme $e^{-x} \neq 0$; pour tout $x \in I$: $xg' - ag = 1$.

• Si $a \neq 0$. L'application constante $g : x \mapsto \frac{-1}{a}$ est alors une solution.

Et donc on trouve sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$:

$$\mathcal{S}_E = \{x \mapsto C|x|^a e^{-x} - \frac{1}{a}e^{-x}; C \in \mathbb{R}\} - \text{cas } a \neq 0$$

• Si $a = 0$. L'équation devient $xg' = 1$, donc $g = \ln |x|$ est une solution.

Et donc on trouve sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$:

$$\mathcal{S}_E = \{x \mapsto Ce^{-x} - \ln |x|e^{-x}; C \in \mathbb{R}\} - \text{cas } a = 0$$

Pour le recollement sur $\mathbb{R}$:

• Si $a \neq 0$, alors $x \mapsto C|x|^a e^{-x} - \frac{1}{a}e^{-x}$ est bien continue sur $\mathbb{R}$ entier.

Elle est par ailleurs dérivable sur $\mathbb{R}$ entier si $a > 1$.

En effet, si $x < 0$, $|x|^a = (-x)^a$, $\frac{d}{dx}|x|^a = -1 \times a \times (-x)^{a-1} = -a|x|^{a-1}$,

qui admet une limite nulle égale à celle de $x \mapsto ax^{a-1}$ (en 0^+).

• Si $a = 0$, on trouve, par continuité : $g'(0) \rightarrow \infty$, il n'y a aucune solution particulière sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_E^{\mathbb{R}} &= \{x \mapsto C|x|^a e^{-x} - \frac{1}{a}e^{-x}; C \in \mathbb{R}\} - \text{cas } a > 1 \\ \mathcal{S}_E^{\mathbb{R}} &= \{x \mapsto -\frac{1}{a}e^{-x}; C \in \mathbb{R}\} - \text{cas } a \in]0, 1[\\ \mathcal{S}_E^{\mathbb{R}} &= \emptyset - \text{cas } a > 1 \end{aligned}$$

(c) Résoudre le problème de Cauchy définie sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{cases} xy' + (x - a)y = 0 \\ y(1) = e^{-1} \end{cases}$$

Si f est la solution du problème de Cauchy sur $\mathbb{R}_+^*$, alors, elle est solution de l'équation homogène.

Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x > 0$, $f(x) = Cx^a e^{-x}$ Puis $f(1) = e^{-1} = C1^a e^{-1}$, donc $C = 1$.

$$\text{La solution du problème de Cauchy précédent est } f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^a f(x).$$

On note f_a , la solution de ce problème. On étend sa définition à tout $\mathbb{R}$ et pour $a \geq 0$, en posant : $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^{-x} x^a$.

I.2. Montrer que f_a admet sur $\mathbb{R}$ une unique primitive, notée F_a , qui s'annule en 0

f_a est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitives.

Elles sont toutes définies à une constante additive près. On peut faire en sorte de choisir celle-ci de sorte que $F(0) = 0$.

Une seule fonction vérifie une telle propriété, elle se note communément :

$$F_a : x \mapsto \int_0^x f_a(t) dt = \int_0^x e^{-t} t^a dt$$

I.3. (a) En exploitant (H_a) , préciser les variations de f_a sur $\mathbb{R}_+$.

f_a étant solution de (H_a) , on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$x f'_a(x) + (x - a) f_a(x) \iff f'_a(x) = \frac{a - x}{x} f_a(x)$$

Or $f_a(x) = e^{-x} x^a \geq 0$ (car $x \geq 0$).

Donc $f'_a(x) \geq 0 \iff x \leq a$.

Ainsi f_a est croissante strictement sur $[0, a]$ et décroissante sur $[a, +\infty[$.

(b) Dédurre des variations de f_{a+2} que sur $\mathbb{R}_+$:

$$f_a \leq e^{-x} x^a \mathbf{1}_{[0, a+2]} + e^{-a-2} \frac{(a+2)^{a+2}}{x^2} \mathbf{1}_{[a+2, +\infty]}$$

Notons $g : x \mapsto e^{-x} x^a \mathbf{1}_{[0, a+2]} + e^{-a-2} \frac{(a+2)^{a+2}}{x^2} \mathbf{1}_{[a+2, +\infty]}$.

• Pour tout $x \in [0, a+2]$, $f_a(x) = x^a e^{-x}$ et $g(x) = e^{-x} x^a \times 1 + e^{-a-2} \frac{(a+2)^{a+2}}{x^2} \times 0 = f_a(x)$

Ainsi, pour $x \in [0, a+2]$, $f_a(x) \leq g(x)$.

• La fonction f_{a+2} est donc croissante strictement sur $[0, a+2]$ et décroissante sur $[a+2, +\infty[$.

On a donc pour tout $x \in [a+2, +\infty[$, $f_{a+2}(x) \leq f_{a+2}(a+2)$.

Ainsi pour tout $x \in [a+2, +\infty[$, $e^{-x} x^{a+2} \leq e^{-(a+2)} (a+2)^{a+2}$, et donc $f_a(x) = e^{-x} x^a \leq e^{-a-2} (a+2)^{a+2} \frac{1}{x^2}$.

Et par ailleurs : $g(x) = e^{-x} x^a \times 0 + e^{-a-2} \frac{(a+2)^{a+2}}{x^2} \times 1$.

On a bien là encore, pour $x \in [a+2, +\infty[$, $f_a(x) \leq g(x)$

On a une inégalité fonctionnelle, puisqu'elle est vraie en tout x de $\mathbb{R}_+$

$$f_a \leq e^{-x} x^a \mathbf{1}_{[0, a+2]} + e^{-a-2} \frac{(a+2)^{a+2}}{x^2} \mathbf{1}_{[a+2, +\infty]}$$

(c) Conclure que, pour tout $x \geq a+2$:

$$F_a(x) \leq F_a(a+2) + e^{-a-2} (a+2)^{a+1}$$

et que F_a admet une limite en $+\infty$, que l'on note γ_a

Soit $x \geq a+2$, intégrons l'inégalité précédente pour $t \in [0, x]$ (en reprenant la notation précédente) :

$$F_a(x) = \int_0^x f_a(t) dt \leq \int_0^{a+2} g(t) dt + \int_{a+2}^x g(t) dt = \int_0^{a+2} f_a(t) dt + e^{-a-2} (a+2)^{a+2} \int_{a+2}^x \frac{1}{t^2} dt$$

$$F_a(x) \leq F_a(a+2) + e^{-a-2} (a+2)^{a+2} \left[\frac{-1}{t} \right]_{a+2}^x = F_a(a+2) + e^{-a-2} (a+2)^{a+2} \left[\frac{1}{a+2} - \frac{1}{x} \right]$$

Comme $\frac{1}{x} > 0$, on a $-\frac{1}{x} < 0$, donc

$$F_a(x) \leq F_a(a+2) + e^{-a-2} (a+2)^{a+1}$$

Par ailleurs, la fonction $t \mapsto F_a(t)$ est croissante, puisque sa dérivée $F'_a = f_a$ est positive.

Elle est majorée par $F_a(a+2) + e^{-a-2} (a+2)^{a+1}$, donc

$F_a(x)$ admet donc une limite pour $x \rightarrow +\infty$. On la note γ_a

I.4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n = n!$

On commencera par donner une relation de récurrence entre γ_{n+1} et γ_n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Faisons une intégration par parties en considérant : $u : t \mapsto t^n$ et $v : t \mapsto -e^{-t}$.
Ces deux fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ ($n \neq 0$), on a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \int_0^x e^{-t} t^n dt = \int_0^x v'(t) u(t) dt = [v(t) u(t)]_0^x - \int_0^x v(t) u'(t) dt \\ &= [-e^{-t} t^n]_0^x + \int_0^x e^{-t} n t^{n-1} dt = \underbrace{0}_{n \neq 0} - e^{-x} x^n + n F_{n-1}(x) \end{aligned}$$

Enfin, comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} x^n = 0$, on peut passer à la limite, on trouve :

$$\gamma_n = 0 + n \gamma_{n-1}$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\gamma_n}{n!} = \frac{n \gamma_{n-1}}{n!} = \frac{\gamma_{n-1}}{(n-1)!}$.

Par conséquent la suite $\left(\frac{\gamma_n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante, elle vaut : $\frac{\gamma_0}{0!}$.

$$\text{Or } \gamma_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} [1 - e^{-x}] = 1$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \gamma_n = n!}$$

II $\gamma_{\frac{1}{2}}$ et intégrales de Wallis

On garde les notations de la partie précédente.

II.1. A l'aide d'un changement de variables, puis d'une intégration par parties, montrer que :

$$F_{\frac{1}{2}}(n) = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2} du - \sqrt{n} e^{-n}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi : t \mapsto \sqrt{t}$, bijective sur $[0, n]$, à valeurs dans $[0, \sqrt{n}]$ et de classe $\mathcal{C}^1$.

On fait le changement de variable $u = \varphi(t) = \sqrt{t} \Leftrightarrow u^2 = t$.

On a donc $2u du = dt$.

Puis, on exploite $\frac{d}{du}(e^{-u^2}) = -2ue^{-u^2}$.

$$\begin{aligned} F_{\frac{1}{2}}(n) &= \int_0^n e^{-t} \sqrt{t} dt = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2} u (2u du) = \int_0^{\sqrt{n}} \underbrace{(-2u) e^{-u^2}}_{w'(u)} \times \underbrace{(-u)}_{v(u)} du \\ &= [w(u)v(u)]_0^{\sqrt{n}} - \int_0^{\sqrt{n}} v'(u) w(u) du = [-ue^{-u^2}]_0^{\sqrt{n}} + \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2} du \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, F_{\frac{1}{2}}(n) = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-u^2} du - \sqrt{n} e^{-n}}$$

II.2. On note, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \theta d\theta$.

(a) Calculer W_0 et W_1 .

$$\boxed{W_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 \theta d\theta = [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^1 \theta d\theta = [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1}$$

(b) Montrer que la suite (W_n) est décroissante et positive.

Pour tout $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \cos \theta \leq 1$,

donc $\cos^n \theta \geq 0$, et donc $0 \leq \cos \theta \times \cos^n \theta \leq \cos^n \theta$.

Ainsi $0 \leq \cos^{n+1} \theta \leq \cos^n \theta$.

Ensuite, l'intégration étant croissante, les bornes « dans le bon sens » :

$$\boxed{0 \leq W_{n+1} \leq W_n}$$

- (c) Montrer avec une intégration par parties que $W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$.
En déduire une expression sous forme de fraction de α_n tel que $W_{n+2} = \alpha_n W_n$.

On a (avec une intégration par parties bien choisies) :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} \theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^{n+1} \theta}_{=u(\theta)} \times \underbrace{\cos \theta}_{=v'(\theta)} d\theta \\ &= \left[\cos^{n+1} \theta \times \sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1)(-\sin \theta) \cos^n \theta \times \sin \theta d\theta \\ &= 0 + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \theta \cos^n \theta d\theta = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 \theta) \cos^n \theta d\theta = (n+1)[W_n - W_{n+2}] \end{aligned}$$

en exploitant la linéarité pour finir. Cela donne donc $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$

$$W_{n+2} = \alpha_n W_n \text{ avec } \alpha_n = \frac{n+1}{n+2}$$

- (d) Montrer que la suite $(nW_n W_{n-1})_{n \geq 1}$ est une suite constante. Quelle est sa valeur ?

Notons, pour tout $n \geq 1$, $Z_n = nW_n W_{n-1}$.

On a donc, pour $n \geq 1$, $Z_{n+1} = (n+1)W_{n+1}W_n = (n+1)\alpha_{n-1}W_{n-1}W_n = (n+1)\frac{n}{n+1}W_{n-1}W_n = nW_n W_{n-1} = Z_n$.

Donc la suite $(Z_n)_{n \geq 1}$ est une suite constante, elle vaut $Z_1 = 1W_1W_0 = \frac{\pi}{2}$, d'après un calcul précédent.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad nW_n W_{n-1} = \frac{\pi}{2}$$

- (e) En exploitant la décroissance de (W_n) , et le résultat précédente, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n}{4n+4}\pi \leq nW_{2n+1}^2 \leq \frac{n}{4n+2}\pi$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $2n+1 \geq 1$, on a donc : $(2n+1)W_{2n+1}W_{2n} = \frac{\pi}{2}$.

Puis (W_n) est décroissante et positive, donc $0 \leq W_{2n+1} \leq W_{2n}$, donc $W_{2n+1}^2 \leq W_{2n+1}W_{2n} = \frac{\pi}{2(2n+1)}$.

En multipliant par n : $nW_{2n+1}^2 \leq \frac{n}{4n+2}\pi$

Pour la minoration, on exploite $W_{2n+1} \geq W_{2n+2}$, donc $W_{2n+1}^2 \geq W_{2n+1}W_{2n+2} = \frac{\pi}{2(2n+2)}$.

De même, en multipliant par n : $nW_{2n+1}^2 \geq \frac{n\pi}{4(n+1)}$

$$\frac{n}{4n+4}\pi \leq nW_{2n+1}^2 \leq \frac{n}{4n+2}\pi$$

II.3. En exploitant l'inégalité : $\ln(1+x) \leq x$, vraie pour tout $x > -1$,

- (a) Montrer que :

$$\forall t \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}], \quad \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

Soit $t \in]-\sqrt{n}, \sqrt{n}[$, alors $\frac{-t^2}{n}$ et $\frac{t^2}{n} \in]-1, 1[$.

On a donc avec l'inégalité rappelée dans l'énoncé :

$$\ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -\frac{t^2}{n} \quad \text{donc} \quad \ln\left[\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n\right] = n \ln\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq -t^2$$

En composant par exp, croissante : $\left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2}$.

Et de même :

$$\ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \leq \frac{t^2}{n} \quad \text{donc} \quad \ln\left[\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}\right] = -n \ln\left(1 + \frac{t^2}{n}\right) \geq -t^2$$

En composant par exp, croissante : $\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \geq e^{-t^2}$.

Ensuite, en prenant la limite pour $t \rightarrow \sqrt{n}$ et $t \rightarrow -\sqrt{n}$ les inégalités sont conservées (avec des 0 voire des $+\infty$ en majoration.)

$$\forall t \in [-\sqrt{n}, \sqrt{n}], \quad \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}$$

(b) En déduire les trois inégalités suivantes :

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leq F_{\frac{1}{2}}(n) + \sqrt{n}e^{-n} \leq \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} \theta d\theta \leq \sqrt{n}W_{2n-2}$$

Si on intègre les inégalités pour $t \in [0, \sqrt{n}]$:

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt$$

Pour la première intégrale, faisons le changement de variable : $t = \sqrt{n} \sin \theta$,

$\theta \mapsto \sqrt{n} \sin \theta$ est bijective de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur $[0, \sqrt{n}]$,

et $dt = \sqrt{n} \cos \theta d\theta$, ainsi :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \theta)^n \cos \theta d\theta = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} \theta d\theta = \sqrt{n}W_{2n+1}$$

Pour la troisième intégrale, faisons le changement de variable : $t = \sqrt{n} \sin \theta$,

$\theta \mapsto \sqrt{n} \tan \theta$ est bijective de $[0, \frac{\pi}{4}]$ sur $[0, \sqrt{n}]$,

et $dt = \sqrt{n}(1 + \tan^2 \theta)d\theta$, ainsi :

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} dt = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 \theta)^{-n} (1 + \tan^2 \theta) d\theta = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta}\right)^{-n+1} d\theta = \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} \theta d\theta$$

. Mais pour $t \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq \cos^{2n-2} \theta$, donc $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} \theta d\theta \geq 0$;

Donc d'après la relation de Chasles : $\sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} \theta d\theta \leq \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} \theta d\theta = \sqrt{n}W_{2n-2}$.

$$\boxed{\sqrt{n}W_{2n+1} \leq F_{\frac{1}{2}}(n) + \sqrt{n}e^{-n} \leq \sqrt{n} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^{2n-2} \theta d\theta \leq \sqrt{n}W_{2n-2}}$$

II.4. Conclure sur la valeur de $\gamma_{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et de $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$.

Comme $\sqrt{n}e^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et que $F_{\frac{1}{2}}(n)$ admet une limite égale à $\gamma_{\frac{1}{2}}$,

on peut affirmer avec la relation trouvée à la première question que $\int_0^n e^{-u^2} du$ admet une limite pour $n \rightarrow +\infty$,

et que cette limite vaut $\gamma_{\frac{1}{2}}$. Par ailleurs, nous la noterons naturellement : $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \gamma_{\frac{1}{2}}$.

Par ailleurs, l'encadrement donné en 2.(e) montre que $\sqrt{n}W_{2n+1}$ converge vers $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

en effet : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\pi}{4(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\pi}{4n+2} = \frac{\pi}{4}$.

Et de même $\sqrt{n}W_{2n+1} \leq \sqrt{n}W_{2n-2} \geq \sqrt{\frac{n}{n-2}} \times \sqrt{n-2}W_{2(n-2)+1}$, par décroissance de $(W_k)_k$.

Donc on trouve également par encadrement : $\lim \sqrt{n}W_{2n-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$$\boxed{\gamma_{\frac{1}{2}} = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

III Nombre de Liouville, approximation rationnelle et mesure d'irrationalité

On considère un nombre ξ algébrique de degré d , racine de l'équation polynomiale à coefficients entiers $T(x) = \sum_{k=0}^d \lambda_k x^k = 0$.

On suppose donc que $\lambda_0 \neq 0$.

III.1. Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, une fraction écrite sous forme irréductible.

(a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{Z}$ tel que $T(r) = \frac{a}{q^d}$.

$$q^d T(r) = q^d \sum_{k=0}^d \lambda_k \frac{p^k}{q^k} = \sum_{k=0}^d \lambda_k p^k q^{d-k} \in \mathbb{Z}$$

On note $a \in \mathbb{Z}$, ce dernier nombre, on a bien :

$$\boxed{\exists a \in \mathbb{Z} \text{ tel que } T(r) = \frac{a}{q^d}.$$

(b) On suppose, en outre, que $r \in [\xi - 1, \xi + 1]$.

En exploitant l'inégalité des accroissements finis, montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|T(r)| \leq M|r - \xi|$

La fonction polynomiale T est dérivable, de dérivée T' continue sur $[\xi - 1, \xi + 1]$,

donc il existe $M = \sup\{|T'(t)|, t \in [\xi - 1, \xi + 1]\}$ et on a d'après l'inégalité des accroissements finis :
pour tout $t \in [\xi - 1, \xi + 1]$, $|T(t) - T(\xi)| \leq M \times |t - \xi|$. Or $T(\xi) = 0$ et en prenant $t \leftarrow r$:

$$\boxed{\text{il existe } M \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } |T(r)| \leq M|r - \xi|.$$

(c) En déduire qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que pour toute fraction $r \in \mathbb{Q}$, non racine de T , $|\xi - r| \geq \frac{C}{q^d}$.

Soit $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, un nombre rationnel, fixé. On suppose que r n'est pas une racine de T .

- Au cas où $r \notin [\xi - 1, \xi + 1]$, alors $|\xi - 1| \geq 1 \geq \frac{1}{q^d}$
- Au cas où $r \in]\xi - 1, \xi + 1[$, alors d'après la question précédente : $|\xi - r| \geq \frac{\frac{|a|}{q^d}}{q^d}$ (en conservant les notations).

On a $a \neq 0$, puisque r n'est pas racine de T .

En prenant, $C = \min(1, \frac{|a|}{M})$, on a bien (dans tous les cas) :

$$\boxed{\text{Pour toute fraction } r \in \mathbb{Q}, \text{ non racine de } T, |\xi - r| \geq \frac{C}{q^d}.$$

III.2. Mesure d'irrationalité de x .

On note pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$,

$$A(x) = \left\{ m \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \text{card}\{(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \mid 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^m}\} = +\infty \right\}$$

$$B(x) = \left\{ m \in \mathbb{R}_+ \mid \exists A > 0 \text{ tel que } \forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{A}{q^m} \right\}$$

(a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $1 \in A(x)$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pour toute entier $q \in \mathbb{N}$, et $p = \lfloor qx \rfloor$, on a $p \leq qx < p + 1$.

Donc $\frac{p}{q} \leq x < \frac{p}{q} + \frac{1}{q}$, ainsi, $\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{1}{q}$.

Ainsi, $\text{card}\{(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \mid 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q}\} = +\infty$, donc

$$\boxed{1 \in A(x)}$$

(b) Soient $m_1 < m_2$.

i. Montrer que $m_2 \in A(x) \Rightarrow m_1 \in A(x)$.

Soient $0 \leq m_1 < m_2$ deux nombres réels positifs. Pour tout entier naturel q , $q^{m_1} < q^{m_2}$, donc $\frac{1}{q^{m_1}} > \frac{1}{q^{m_2}}$.

Ainsi, si $0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{m_2}}$, alors $0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{m_1}}$.

Donc encore si $\text{card}\{(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \mid 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{m_2}}\} = +\infty$, alors $\text{card}\{(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \mid 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{m_1}}\} = +\infty$.

$$\boxed{m_2 \in A(x) \Rightarrow m_1 \in A(x) \text{ et } A(x) \text{ est de la forme } [0, \mu_1(x)[\text{ ou } [0, \mu_1(x)].}$$

$\mu_1(x) = \sup A(x)$ existe bien si et seulement si $A(x)$ est majoré. Sinon, on a $\alpha = +\infty$

On note $\mu_1(x) = \begin{cases} \sup A(x) & \text{si } A(x) \text{ majoré} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que $A(x) = [0, \mu_1]$ ou $A(x) = [0, \mu_1[$.

ii. Montrer que $m_1 \in B(x) \Rightarrow m_2 \in B(x)$.

Soit $0 \leq m_1 < m_2$.

De même si $\exists A > 0$ tel que $\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{A}{q^{m_1}}$ alors $\forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{A}{q^{m_2}}$

$$\boxed{m_1 \in B(x) \Rightarrow m_2 \in B(x) \text{ et } B(x) \text{ est de la forme } [\beta, +\infty[\text{ ou }]\beta, +\infty[.}$$

$\mu_2(x) = \inf B_2(x)$ existe bien si et seulement si $B(x)$ est non vide. Sinon, on a $\beta = +\infty$

On note $\mu_2(x) = \begin{cases} \inf B(x) & \text{si } B(x) \text{ non vide} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que $B(x) = [\mu_2, +\infty[$ ou $B(x) =]\mu_2, +\infty[$.

(c) Montrer que si $m_1 \in A(x)$ et $m_2 \in B(x)$, alors nécessairement : $m_1 < m_2$.

Soit $m_1 \in A(x)$, donc $\text{card}\{(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \mid 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{m_1}}\} = +\infty$.

Alors comme pour $p \neq p', \left| \frac{p}{q} - \frac{p'}{q} \right| > \frac{1}{q}$, pour chaque q , il ne peut exister qu'au plus deux entiers p tel que $0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{m_1}}$.

Donc puisque cet ensemble est infini, cela signifie que $\left\{ q \mid \exists p \in \mathbb{Z} \mid 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{m_1}} \right\} = +\infty$ est infini.

Il existe donc une suite (q_n) strictement croissante et une suite (p_n) , tels que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^{m_1}}$.

Soit $m_2 \in B(x)$. Supposons, par l'absurde que $m_2 \leq m_1$.

Pour tout $A \in \mathbb{R}_+$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A}{q_n^{m_1 - m_2}} = 0$,

donc pour tout $A > 0$, on ne peut donc pas avoir toutes les couples (p_n, q_n) vérifiant $\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| > \frac{A}{q_n^{m_2}}$. Contradiction.

Donc

$$\boxed{m_2 > m_1.}$$

(d) On suppose que $B(x)$ non vide. Montrer que $\forall m < \mu_2(x), m \in A(x)$.

Puisque $m \leq \mu_2$, alors m n'est pas un minorant de $B(x)$.

Donc pour tout réel $A > 0$, il existe (au moins) un rationnels $\frac{p}{q}$ tel que $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{A}{q^m}$.

On va créer une suite infinie de rationnels qui vérifie $\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^m}$.

Prenons $A \leftarrow A_0 = 1$, on trouve une première fraction, $\frac{p_0}{q_0}$ tel que $\left| x - \frac{p_0}{q_0} \right| < \frac{1}{q_0^m}$

Mais ce terme $\left| x - \frac{p_0}{q_0} \right|$ est non nul. Notons $A_1 = \frac{1}{2} q_0 \times \left| x - \frac{p_0}{q_0} \right| > 0$,

on a donc $\left| x - \frac{p_0}{q_0} \right| \geq \frac{A_1}{q_0^m}$.

Il existe donc une seconde fraction $\frac{p_1}{q_1}$ tel que $\left| x - \frac{p_1}{q_1} \right| < \frac{A_1}{q_1^m}$ Et ainsi de suite, on obtient donc la suite désirée.

Donc $m \in A(x)$

$$\boxed{\forall m < \mu_2(x), m \in A(x)}$$

(e) Conclure que $\mu_1(x) = \mu_2(x)$.

On appelle mesure d'irrationalité de $x \in \mathbb{R}$, le nombre définie par l'une des deux formulations suivantes :

$$\mu(x) = \sup \left\{ m \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \text{card}\{(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \mid 0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^m}\} = +\infty \right\}$$

$$\mu(x) = \inf \left\{ m \in \mathbb{R}_+ \mid \exists A > 0 \text{ tel que } \forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{A}{q^m} \right\}$$

Soit $m_2 \in B(x)$. D'après (c), m_2 étant un majorant de $A(x)$, on a $\mu_1(x) \leq m_2$.

Donc $\mu_1(x)$ est un minorant de $B(x)$ et donc $\mu_1(x) \leq \mu_2(x)$.

Puis d'après d, pour tout $\epsilon > 0$, $\mu_2(x) - \epsilon \leq \mu_2(x)$, donc $\mu_2(x) - \epsilon \in A(x)$.

Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$: $\mu_2(x) - \epsilon \leq \mu_1(x)$ donc $\mu_2(x) \leq \mu_1(x)$.
Par double inégalité :

$$\boxed{\mu_1(x) = \mu_2(x)}$$

- (f) Montrer que si ξ est algébrique de degré d et non rationnel, sa mesure d'irrationalité est inférieure à d .

Supposons ξ est algébrique de degré d et non rationnelle.

D'après la partie précédente, alors pour toutes les fractions $r = \frac{p}{q}$, hormis les au plus $d - 1$ autres racines potentiellement rationnelles de T on a $|\xi - r| \geq \frac{C}{q^d}$.

Pour ces $d - 1$ racines, différentes de x (qui est non rationnel), on peut trouver une valeur C' tel que $|\xi - r| \geq \frac{C'}{q^d}$.

Donc $d \in \left\{ m \in \mathbb{R} \mid \exists A > 0 \text{ tel que } \forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{A}{q^m} \right\}$.

$$\boxed{\text{Ainsi } \mu(x) \leq d.}$$

III.3. Nombre de Liouville. On note $\ell_n = \sum_{k=0}^n 10^{-k!}$.

- (a) Montrer que (ℓ_n) est une suite croissante majorée donc convergente. On note $\ell = \lim(\ell_n)$.

$$\ell_{n+1} - \ell_n = \sum_{k=0}^{n+1} 10^{-k!} - \sum_{k=0}^n 10^{-k!} = 10^{-(n+1)!} > 0.$$

Donc (ℓ_n) est une suite croissante.

Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k! > k$, donc $10^{-k!} < 10^{-k}$.

$$\text{Ainsi } \ell_n = \sum_{k=0}^n 10^{-k!} \leq \sum_{k=0}^n 10^{-k} = \sum_{k=0}^n (0,1)^k = 1 \times \frac{1 - 0,1^{n+1}}{1 - 0,1} \leq \frac{10}{9}.$$

Donc (ℓ_n) est également majorée.

$$\boxed{(\ell_n) \text{ est une suite croissante majorée donc convergente de limite } \ell, \text{ par définition.}}$$

- (b) Montrer que la mesure d'irrationalité de ℓ est supérieur à n , pour tout entier n .

Soit $n \in \mathbb{R}$. ℓ_n est une addition (finie) de n nombres décimaux, qui sont donc des fractions.

Ainsi ℓ_n est un nombre décimal, mieux : c'est une fraction,

cette fraction s'écrit sous la forme $\frac{p}{10^{n!}}$ où $p = \sum_{k=0}^n 10^{n!-k!} \in \mathbb{N}$.

La suite (ℓ_n) est croissante tendant vers ℓ , donc $\ell_n \leq \ell_{n+1} \leq \ell$. Ainsi :

$$|\ell - \ell_n| = \ell - \ell_n \geq \ell_{n+1} - \ell_n = 10^{-(n+1)!} = \frac{1}{10^{(n+1)n!}} = \left(\frac{1}{10^{n!}} \right)^{n+1}$$

Ainsi, pour tout entier n , on a trouvé une fraction $\ell_n = \frac{p}{q}$ tel que $\left| \ell - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{q^{n+1}}$.

Par conséquent :

$$\left\{ m \in \mathbb{R} \mid \exists A > 0 \text{ tel que } \forall (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{A}{q^m} \right\} \text{ est vide}$$

Donc

$$\boxed{\text{La mesure d'irrationalité de } \ell \text{ est supérieur à } n, \text{ pour tout entier } n. \text{ On dit qu'elle est infinie}}$$

- (c) Conclure que ℓ (nombre de Liouville) est transcendant.

ℓ ne peut pas être algébrique d'ordre n , pour tout entier n . Donc

$$\boxed{\ell \text{ (nombre de Liouville) est transcendant.}}$$

III.4. Mesure d'irrationalité et fractions continues.

On considère une suite (a_n) d'entiers naturels non nuls. On lui associe suites de nombres d'entiers $(p_k)_{k \geq -1}$ et $(q_k)_{k \geq -1}$ définies par récurrence :

$$\begin{cases} p_{-1} = 1 & p_0 = a_0 & \forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1} \\ q_{-1} = 0 & q_0 = 1 & \forall n \in \mathbb{N}, q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \end{cases}$$

- (a) Montrer que $(q_n)_{n \geq 1}$ est une suite strictement positive et strictement croissante d'entiers naturels.
On admet qu'il en est de même pour (p_n) .

Notons que $q_1 = a_1 q_0 + q_{-1} = a_1 \in \mathbb{N}^*$, il peut être égal à 1 donc q_1 peut être égal à q_0 .

$$q_2 = a_2 q_1 + q_0 \geq q_1 + 1 > q_1.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $\mathcal{P}_n$: « $q_{n+1} \in \mathbb{N}$ et $q_{n+1} > q_n > 0$ ».

— Les calculs inductifs donnent $q_1 = a_1 > 0$ et $q_2 = a_2 a_1 + 1 \in \mathbb{N}$ et $q_2 \geq q_1 + 1 > q_1$.

Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

$q_{n+2} = a_{n+2} q_{n+1} + q_n$ somme et produit d'entiers naturels donc $q_{n+2} \in \mathbb{N}$.

et par ailleurs, $q_{n+2} > a_{n+2} q_{n+1}$ car $q_n > 0$.

Puis, comme $a_{n+2} \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+2} \geq 1$, donc $q_{n+2} > q_{n+1}$.

Et on sait, d'après $\mathcal{P}_n$ que $q_{n+1} > 0$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$(q_n)_{n \geq 1}$ est une suite strictement positive, strictement croissante, d'entiers naturels.

- (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$.

Notons, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $d_n = q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}$. Alors

$$d_{n+1} = q_{n+1} p_n - p_{n+1} q_n = [a_{n+1} q_n + q_{n-1}] p_n - [a_{n+1} p_n + p_{n-1}] q_n = p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = -d_n$$

Donc (d_n) est une suite géométrique de raison (-1) . $d_0 = 1 \times 1 - a_0 \times 0 = 1$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = (-1)^n \times 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n$.

- (c) On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = \frac{p_n}{q_n}$.

Montrer que $(r_{2n})_n$ et $(r_{2n+1})_n$ sont des suites adjacentes.

On note $x = \lim(r_{2n}) = \lim(r_{2n+1}) = \lim(r_n)$.

Notons $u_n = r_{2n}$, on a donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= r_{2n+2} - r_{2n} = (r_{2n+2} - r_{2n+1}) - (r_{2n+1} - r_{2n}) = \frac{p_{2n+2} q_{2n+1} - q_{2n+2} p_{2n+1}}{q_{2n+2} q_{2n+1}} - \frac{p_{2n+1} q_{2n} - q_{2n+1} p_{2n}}{q_{2n+1} q_{2n}} \\ &= \frac{-(-1)^{2n+2}}{q_{2n+2} q_{2n+1}} - \frac{-(-1)^{2n+1}}{q_{2n+1} q_{2n}} \leq 0 \end{aligned}$$

car $(q_k) \geq 0$. Donc (u_n) est décroissante.

Notons $v_n = r_{2n+1}$, on a donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= r_{2n+3} - r_{2n+1} = (r_{2n+3} - r_{2n+2}) - (r_{2n+2} - r_{2n+1}) = \frac{p_{2n+3} q_{2n+2} - q_{2n+3} p_{2n+2}}{q_{2n+3} q_{2n+2}} - \frac{p_{2n+2} q_{2n+1} - q_{2n+2} p_{2n+1}}{q_{2n+2} q_{2n+1}} \\ &= \frac{-(-1)^{2n+3}}{q_{2n+3} q_{2n+2}} - \frac{-(-1)^{2n+2}}{q_{2n+2} q_{2n+1}} \geq 0 \end{aligned}$$

car $(q_k) \geq 0$. Donc (v_n) est décroissante.

Enfin, calculons

$$v_n - u_n = r_{2n+1} - r_{2n} = \frac{-(-1)^{2n+1}}{q_{2n+1} q_{2n}} = \frac{1}{q_{2n} q_{2n+1}}$$

Or (q_n) est une suite strictement croissante d'entiers (donc $q_n \geq n$, par récurrence simple), elle diverge donc vers $+\infty$, donc $(v_n - u_n) \rightarrow 0$.

Les trois conditions sont vérifiées :

(r_{2n}) et (r_{2n+1}) sont donc adjacentes, les extractions paires et impaires ayant même limite : (r_n) converge.

- (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x - r_n| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2}$

La question précédente permet d'affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n \leq x \leq u_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

• Supposons que n est pair.

alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $r_n = r_{2k} = u_k$.

$$\text{Donc } |x - r_n| = |x - u_k| = u_k - x \leq u_k - v_k = r_{2n} - r_{2n+1} = \frac{q_{n+1} p_n - q_n p_{n+1}}{q_n q_{n+1}} = \frac{(-1)^{2k}}{q_{n+1} q_n}.$$

• Supposons que n est impair.

alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $r_n = r_{2k+1} = v_k$.

$$\text{Donc } |x - r_n| = |x - v_k| = x - v_k \leq u_{k+1} - v_k = r_{2n+2} - r_{2n+1} = \frac{q_{n+1}p_{n+2} - q_{n+2}p_{n+1}}{q_{n+1}q_{n+2}} = \frac{-(-1)^{2k+1}}{q_{n+2}q_{n+1}}.$$

Donc, dans tous les cas :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, |x - r_n| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

La dernière inégalité étant donnée par croissance de (q_n) .

(e) (*) Montrer que pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$,

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq |x - r_n| \implies q \geq q_n$$

Autrement écrit : on ne peut pas faire de meilleure approximation de x par $\frac{p_n}{q_n}$ avec une fraction dont le dénominateur est plus petit que q_n .

On suppose que les fractions sont irréductibles.

On va raisonner par contraposée. Supposons que $q < q_n$ et montrons que cela impose $\left| x - \frac{p}{q} \right|$.

Dans un premier temps, nous ajoutons l'hypothèse : $q_{n-1} < q < q_n$.

Cherchons à exprimer (p, q) en fonction des nombres (p_n, q_n) , considérons donc le système à deux inconnues (y, z) :

$$\begin{cases} yp_n + zp_{n-1} = p \\ yq_n + zq_{n-1} = q \end{cases}$$

Son déterminant est $p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n+1}$ et donc le système se résout facilement :

$$\begin{cases} y = (-1)^{n+1}(pq_{n-1} - qp_{n-1}) \\ z = (-1)^{n+1}(p_n q - q_n p) \end{cases}$$

Par ailleurs, on a $q \neq q_n$, donc on ne peut pas avoir $z = 0$ (sinon $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$), ni $y = 0$.

et $y, z \in \mathbb{Z}$, donc puisque $q \in [q_{n-1}, q_n]$, nécessairement y et z ne sont pas de même signe : $yz < 0$.

Enfin :

$$qx - p = (yq_n + zq_{n-1})x - (yp_n + zp_{n-1}) = y(q_n - xp_n) + z(q_{n-1} - xp_{n-1}) = yq_n(x - r_n) + zq_{n-1}(x - r_{n-1})$$

y et z sont de signe opposé, de même pour $x - r_n$ et $x - r_{n-1}$.

Faisons l'hypothèse (SPDG) que $yq_n(x - r_n) < 0$ et donc de même $zq_{n-1}(x - r_{n-1}) < 0$ et $qx - p < 0$.

$|qx - p| = -(qx - p) = -(yq_n(x - r_n)) - zq_{n-1}(x - r_{n-1}) = |yq_n||x - r_n| + |zq_{n-1}||x - r_{n-1}| \geq |yq_n - zq_{n-1}||x - r_n|$
car $|x - r_n| < |x - r_{n-1}|$ et y et z sont de signe contraire.

Enfin, $yq_n - zq_{n-1}$ est un nombre entier non nul : $|qx - p| \geq |x - r_n|$, donc $q \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq q_n \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right|$.

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{q_n}{q} \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| \geq \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right|$$

Puisque $q < q_n$. On a donc $q_{n-1} < q < q_n \implies \left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right|$

Si $q < q_{n-1}$, c'est encore pire, car il existe $s < n$ tel que $q_{s-1} < q < q_s$ et donc $\left| x - \frac{p}{q} \right| \geq \left| x - \frac{p_s}{q_s} \right| \geq \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right|$.

$$\boxed{\left| x - \frac{p}{q} \right| \leq |x - r_n| \implies q \geq q_n}$$

(f) (***) Démontrer que la mesure d'irrationalité de x vérifie :

$$\mu(x) = 1 + \limsup \frac{q_{n+1}}{q_n}$$

On appelle $\limsup(u_n)$ la limite de la suite $(\tilde{u}_n)$, où pour tout entier n , $\tilde{u}_n = \sup\{u_k, k \geq n\}$.

On démontre que dans tous les cas où (u_n) est bornée : $(\tilde{u}_n)$ est une suite décroissante, minorée donc convergente. Sa limite est la plus grande des valeurs d'adhérence de (u_n) .

Je vous renvoie à l'article : Jonathan Sondow, « Irrationality measures, irrationality bases, and a theorem of Jarnik », 2004, arXiv :math/0406300

On termine cette partie en trouvant un critère qui donne accès à la mesure d'irrationalité d'un nombre x obtenu à partir de la suite (a_n) donnée.

Cela ne semble pas tout à fait satisfaisant, puisqu'il faudrait d'abord connaître x avant de connaître (a_n) .

C'est l'algorithme de décomposition en fractions continues qui permet de passer de x à (a_n) dans un premier temps, avant de retrouver ensuite les suites (p_n) et (q_n) associées à x .

On peut, pour étudier cela, reprendre le DS 3 en 2016-2017 ou le DS3 en 2019-2020 ou encore le DS6 2020-2021.

IV Pseudo-transformation de Laplace et transcendance de e

On note, pour toute fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$:

$$\mathcal{I}(f) : t \mapsto \int_0^t e^{t-u} f(u) du$$

IV.1. Si $f : x \mapsto x^a$, quelle relation existe-t-il entre $\mathcal{I}(f)$ et F_a (définie en partie I) ?

On a $F_a : x \mapsto \int_0^x e^{-t} t^a dt$. Donc

$$\mathcal{I}(f)(x) = e^x \int_0^x e^{-u} u^a du = e^x F_a(x)$$

IV.2. Résoudre, en exploitant en particulier la méthode de la variation de la constante l'équation différentielle :

$$y' - y = P$$

L'équation se résout sur $\mathbb{R}$, où elle est sous forme normalisée (ou résolue).

L'équation homogène a pour ensemble de solution : $\mathcal{S}_H = \{t \mapsto C e^t, C \in \mathbb{R}\}$ On applique la méthode de la variation de la constante. On cherche donc une solution de E de la forme $\tilde{y}x \mapsto C(x)e^x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{y}' - \tilde{y} = C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x = P$, donc $C'(x) = e^{-x}P(x)$.

Prenons, une solution : $\tilde{y}(x) = C(x)e^x = e^x \int_0^x P(t)e^{-t} dt = \mathcal{I}(P)(x)$.

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto C e^x + \mathcal{I}(P)(x), C \in \mathbb{R}\}$$

IV.3. Soit $P : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$.

(a) Pourquoi P est-elle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$?

P est une fonction polynomiale, donc

$$P \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.$$

(b) Soit $t \geq 0$. Soit $\Phi : u \mapsto e^{t-u} \sum_{h=0}^n P^{(h)}(u)$.

Simplifier le calcul de $\Phi'(u)$.

Soit $t > 0$, fixé.

Φ est le produit d'exponentielle et de fonctions polynomiale donc est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $u \in \mathbb{R}$:

$$\Phi'(u) = -e^{t-u} \sum_{h=0}^n P^{(h)}(u) + e^{t-u} \sum_{h=0}^n P^{(h+1)}(u) = e^{t-u} \left[\sum_{h=1}^{n+1} P^{(h)}(u) - \sum_{h=0}^n P^{(h)}(u) \right] = e^{t-u} [P^{(n+1)}(u) - P^{(0)}(u)]$$

par télescopage. Or $P^{(n+1)} = 0$ et $P^{(0)} = P$, on a donc :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \Phi'(u) = -e^{t-u} P(u)$$

(c) En déduire

$$\mathcal{I}(P)(t) = e^t \sum_{h=0}^n P^{(h)}(0) - \sum_{h=0}^n P^{(h)}(t)$$

On a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{I}(P)(t) = \int_0^t e^{t-u} P(u) du = - \int_0^t \Phi'(u) du = -[\Phi(u)]_0^t = \Phi(0) - \Phi(t)$$

On remplace par l'expression de Φ :

$$\mathcal{I}(P)(t) = e^t \sum_{h=0}^n P^{(h)}(0) - \sum_{h=0}^n P^{(h)}(t)$$

IV.4. Supposons que $e(=\exp(1))$ soit un nombre algébrique (de degré d).

Donc il existe $d \in \mathbb{N}$, puis $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{Z}$ tels que $\sum_{k=0}^d \lambda_k e^k = 0$ avec $\lambda_0 \neq 0$.

On note T la fonction polynomiale : $T : x \mapsto \sum_{k=0}^d \lambda_k x^k$.

(a) On considère toujours une polynôme $P = \sum_{k=0}^n a_k x^k$, quelconque.

Montrer que

$$\sum_{k=0}^d \lambda_k \mathcal{I}(P)(k) = - \sum_{k=0}^d \sum_{h=0}^n \lambda_k P^{(h)}(k)$$

On notera ce nombre $J(P)$

On reprend la relation précédente : $\mathcal{I}(P)(k) = e^k \sum_{h=0}^n P^{(h)}(0) - \sum_{h=0}^n P^{(h)}(k)$.

Donc

$$\mathcal{J}(P) := \sum_{k=0}^d \lambda_k \mathcal{I}(P)(k) = \underbrace{\sum_{k=0}^d \lambda_k e^k}_{=T(e)=0} \sum_{h=0}^n P^{(h)}(0) - \sum_{k=0}^d \sum_{h=0}^n \lambda_k P^{(h)}(k)$$

$$\mathcal{J}(P) = \sum_{k=0}^d \lambda_k \mathcal{I}(P)(k) = - \sum_{k=0}^d \sum_{h=0}^n \lambda_k P^{(h)}(k)$$

(b) Soit $s \in \mathbb{N}^*$. On considère $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et on note $P_k(x) = (x-k)^s$.

Montrer que $P_k^{(h)}(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \neq s \\ s! & \text{sinon} \end{cases}$.

Posons, pour tout $h \in \llbracket 0, s \rrbracket$, $\mathcal{P}_h$: « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_k^{(h)}(x) = \frac{s!}{(s-h)!} x^{s-h}$ ».

— Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_k^{(0)}(x) = P_k(x) = (x-k)^s = \frac{s!}{s!} (x-k)^s = \frac{s!}{(s-0)!} (x-k)^{s-0}$ Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $h \in \llbracket 0, s-1 \rrbracket$. Supposons que $\mathcal{P}_h$ est vérifiée.

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $P_k^{(h)}(x) = \frac{s!}{(s-h)!} x^{s-h}$.

C'est une fonction polynomiale dérivable : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$P_k^{(h+1)}(x) = (s-h) \times \frac{s!}{(s-h)!} x^{s-h-1} = \frac{s!}{(s-h-1)!} x^{s-h-1}$$

Donc $\mathcal{P}_{h+1}$ est vraie.

Ensuite, $P_k^{(s)} = \frac{s!}{0!} x^0 = s!$, polynôme constant. Toutes les dérivées suivantes sont nulles.

Enfin, on regarde la valeur en k :

$$P_k^{(h)}(k) = \begin{cases} \frac{s!}{(s-h)!} (k-k)^{s-h} = 0 & \text{si } h < s \\ s! & \text{si } h = s \\ 0 & \text{si } h > s \end{cases}$$

$$P_k^{(h)}(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } h \neq s \\ s! & \text{sinon} \end{cases}$$

(c) On fixe un entier non nul $s \in \mathbb{N}^*$ et on considère le polynôme $P(x) = x^{s-1}(x-1)^s(x-2)^s \dots (x-d)^s$. Montrer que $\mathcal{J}(P)$ est un entier, divisible par $(s-1)!$.

On admettra la formule de Leibniz : si $P = P_1 \times P_2$, alors pour tout $h \in \mathbb{N}$, $P^{(h)} = \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} P_1^{(j)} P_2^{(h-j)}$.

Par définition de T , les nombres λ_k sont tous entiers.

Egalement, par développement de P , on obtient $P = \sum_{i=0}^{ds+s-1} a_i x^i$ où $a_i \in \mathbb{Z}$ (on peut le démontrer par récurrence).

On a alors $P^{(k)}(k) \in \mathbb{Z}$ (addition de produit d'entiers) et donc

$$\boxed{\mathcal{J}(P) \text{ est un entier.}}$$

Mais soyons plus précis pour la suite.

Soit $h \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$. Nous allons préciser la valeur de $P^{(h)}(k)$ (et... est divisible par $(s-1)!$).

- Si $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$.

Notons $P = \tilde{P}(x) \times R(x)$, où $\tilde{P}(x) = (x-k)^s$ et $R = x^{s-1} \prod_{i \neq k} (x-i)^s$.

D'après la formule de Leibniz, pour tout $h \in \mathbb{N}$, $P^{(h)} = \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \tilde{P}^{(j)} R^{(h-j)}$.

et donc pour tout $h \in \mathbb{N}$, $P^{(h)}(k) = \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \tilde{P}^{(j)}(k) R^{(h-j)}(k)$.

Or d'après la question précédente : $\tilde{P}^{(j)}(k) = 0$ sauf si $j = s$ et dans ce cas elle vaut $s!$, donc la somme se simplifie :

$$P^{(h)}(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } h < s \\ \underbrace{\binom{h}{s} s! R^{(h-s)}(k)}_{j=s} & \text{si } h \geq s \end{cases}$$

Notons que $\binom{h}{s}$ est un nombre entier, ainsi que $R^{(h-s)}(k)$ car R est un polynôme à coefficients entiers.

- Si $k = 0$.

Notons $P = \tilde{P}(x) \times R(x)$, où $\tilde{P}(x) = x^{s-1}$ et $R = \prod_{i=1}^d (x-i)^s$.

D'après la formule de Leibniz, pour tout $h \in \mathbb{N}$, $P^{(h)} = \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \tilde{P}^{(j)} R^{(h-j)}$.

et donc pour tout $h \in \mathbb{N}$, $P^{(h)}(0) = \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} \tilde{P}^{(j)}(0) R^{(h-j)}(0)$.

Or d'après la question précédente : $\tilde{P}^{(j)}(0) = 0$ sauf si $j = s-1$ et dans ce cas elle vaut $(s-1)!$, donc :

$$P^{(h)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } h < s-1 \\ \underbrace{\binom{h}{s-1} (s-1)! R^{(h-s+1)}(0)}_{j=s-1} & \text{si } h \geq s-1 \end{cases}$$

Notons que $\binom{h}{s-1}$ est un nombre entier, ainsi que $R^{(h-s+1)}(k)$ car R est un polynôme à coefficients entiers.

Finalement puisque $(s-1)!$ divise $s!$, alors dans tous les cas $P^{(h)}(k)$ est divisible par $(s-1)!$ (souvent ce terme est nul).

Et donc la combinaison linéaire entière : Donc $(s-1)!$ divise $P^{(h)}(k)$, ceci est vrai pour tout $h \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$. Les λ_k étant entiers :

$$\boxed{\mathcal{J}(P) = - \sum_{k=0}^d \sum_{h=0}^n \lambda_k P^{(h)}(k) \text{ est un entier, divisible par } (s-1)!}$$

(d) (*) Montrer que si s est un nombre premier suffisamment grand $\mathcal{J}(P) \neq 0$.

En revanche, si on précise le calcul précédent, on voit que pour tout $k \neq 0$, $s!$ divise $P^{(h)}(k)$ (pour tout $h \in \mathbb{N}$).

et pour $k = 0$ (et $h \geq s-1$) : $P^{(h)}(0) = \binom{h}{s-1} (s-1)! R^{(h-s+1)}(0)$ avec $R = \prod_{i=1}^d (x-i)^s$. Donc

- si $h < s-1$, on a vu $P^{(h)}(0) = 0$
- si $h = s-1$, $P^{(s-1)}(0) = 1 \times (s-1)! \times R^{(0)}(0) = (s-1)! (-1)^s d(d!)^s$
- si $h > s$, alors un facteur s de la première dérivée de $R = \left(\prod_{i=1}^d (x-i) \right)^s$

donc $R' = s \left(\prod_{i=1}^d (x-i) \right)' \left(\prod_{i=1}^d (x-i) \right)^{s-1}$ est en facteur.

donc $P^{(h)}(0)$ est également divisible par $s!$.

Finalement, dans le calcul de $\mathcal{J}(P)$, on retrouve $s!$ dans tous les termes sauf pour $P^{(s-1)}(0)$.

Ainsi

$$\mathcal{J}(P) \equiv -\lambda_0(s-1)!(-1)^s(d!)^s \quad [s!]$$

Alors si s est choisi suffisamment grand, premier de sorte que $d!$ et λ_0 ne puisse diviser s , nécessairement $\mathcal{J}(P) \not\equiv 0[s!]$

Si s est un nombre premier suffisamment grand $\mathcal{J}(P) \neq 0$.

IV.5. (a) Montrer que pour tout polynôme P , pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket : |\mathcal{I}(P)(k)| \leq e^n \sup\{|P(t)|, t \in [0, n]\}$

Pour simplifier, notons $M_n = \sup\{|P(t)|, t \in [0, n]\}$.

Soit P , un polynôme quelconque. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\mathcal{I}(P)(k) = \int_0^k e^{k-u} P(u) du$.

Or la variable d'intégration, u appartient à $[0, k] \subset [0, n]$, donc $|P(u)| \leq M_n$.

Donc $|e^{k-u} P(u)| = e^{k-u} |P(u)| \leq e^{k-u} M_n$ car $e^{k-u} > 0$.

Ainsi $|\mathcal{I}(P)(k)| \leq \int_0^k |e^{k-u} P(u)| du \leq \int_0^k e^{k-u} M_n du = M_n [-e^{k-u}]_0^k = M_n e^k \leq M_n e^n$ par croissance de exp.

Pour tout polynôme P , pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket : |\mathcal{I}(P)(k)| \leq e^n \sup\{|P(t)|, t \in [0, n]\}$.

(b) Dans le cas $P(x) = x^{s-1}(x-1)^s(x-2)^s \cdots (x-d)^s$, montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $|\mathcal{I}(P)(k)| \leq e^d d^{s(d+1)-1}$.

Pour tout $t \in [0, d]$, pour tout $j \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $|(t-j)^s| \leq d^s$,

$$\text{donc pour tout } t \in [0, d], |P(t)| = t^{s-1} \prod_{j=1}^d (t-j)^s \leq d^{s-1} \prod_{j=1}^d d^s = d^{(s-1)+sd} = d^{s(d+1)-1}.$$

On a donc un majorant de $\{|P(t)|, t \in [0, d]\}$, il est plus grand que le plus petit : $\sup\{|P(t)|, t \in [0, d]\} \leq d^{s(d+1)-1}$.

On applique donc l'inégalité de la question précédente, pour $n = d$:

Pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $|\mathcal{I}(P)(k)| \leq e^d d^{s(d+1)-1}$.

(c) En prenant $a = \max\{e^d \sum_{k=0}^d |\lambda_k|; d\}$, puis $C = ad^d$ montrer que $|\mathcal{J}(P)| \leq C^s$.

On a alors

$$|\mathcal{J}(P)| = \left| \sum_{k=0}^d \lambda_k \mathcal{I}(P)(k) \right| \leq \sum_{k=0}^d (|\lambda_k| \times |\mathcal{I}(P)(k)|) = e^d d^{s(d+1)-1} \sum_{k=0}^d |\lambda_k| = e^d \underbrace{\sum_{k=0}^d |\lambda_k|}_{\leq a} \times \underbrace{d^{s-1} d^s}_{\leq a^{s-1}} \leq (ad^d)^s = C^s$$

$|\mathcal{J}(P)| \leq C^s$

(d) Conclure.

D'après les questions 4.(d) et 4.(c), si s est premier est suffisamment grand, $\mathcal{J}(P)$ est non nul et divisible par $(s-1)!$,

Donc $|\mathcal{J}(P)| \in [(s-1)! \cdot \mathbb{Z}] \setminus \{0\}$, donc $|\mathcal{J}(P)| \geq (s-1)!$.

On a donc, pour tout s (suffisamment grand) :

$$(s-1)! \leq C^s$$

Or $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{C^s}{(s-1)!} = 0$, donc à partir d'un certain rang $S : \frac{C^s}{(s-1)!} \leq \frac{1}{2}$ donc $(s-1)! > 2C^s$.

On a une contradiction. La seule hypothèse qui reste est que e est algébrique.

e est donc un nombre transcendant.