CPGE MPSI 2016-2017 — Le 04.03.17

Devoir Surveillé n°7
CORRECTION

Problème 1

A.Préliminaires

A la première lecture...

1. Ne pas oublier ce qu'une forme est à valeurs dans $\mathbb{K}$

2. Vue la question, il s'agit d'exploiter les applications linéaires précédentes, et donc il doit s'agir d'exprimer $\mathscr{PM}ag$ comme image ou image réciproque (noyau ?) de σ_r. Peut-être faut-il ajouter une somme d'espace ou une intersection...

3. Il s'agit juste d'une restriction. Dans ce cas, la plupart des propriétés est conservée.

1. Soit $r \in [\![1, n]\!]$.
   Soient $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$\sigma_r(\lambda A + \mu B) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_{k,j} + \mu b_{k,j}) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} + \mu \sum_{k=1}^{n} b_{k,j}$$

   Et donc $\sigma_r(\lambda A + \mu B) = \lambda\sigma_r(A) + \mu\sigma_r B$
   De même pour τ_r, s et t.
   Enfin, comme ces applications linéaires sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, /1

$$\boxed{\text{on peut affirmer } \forall\ r \in [\![1, n]\!],\ \sigma_r, \tau_r \text{ et Tr et Atr sont des formes linéaires de } E}$$

2. Soit $\forall\ k \in [\![2, n]\!]$, $\varphi_k = \sigma_k - \sigma_1$ et $\psi_k = \tau_k - \tau_1$.
   Alors φ_k et ψ_k sont des applications linéaires de E.
   Et $\mathscr{PM}ag = \bigcap_{k=2}^{n} \Big(\text{Ker } (\varphi_k) \cap (\text{Ker } \psi_k\Big)$.
   Comme une intersection d'espace vectoriel est un espace vectoriel,
   on en déduit

$$\boxed{\mathscr{PM}ag \text{ est un sev de } E}$$

   De même $\mathcal{M}ag = \text{Ker } (s - \sigma_1)_{|\mathscr{PM}ag} \bigcap \text{Ker } (t - \tau_1)_{|\mathscr{PM}ag}$, d'où /1

$$\boxed{\mathcal{M}ag \text{ est un sev de } \mathscr{PM}ag}$$

3. Par définition, $d = \sigma_{1|\mathscr{PM}ag}$, donc comme σ_1 : /0,5

$$\boxed{d \text{ est une forme linéaire sur } \mathscr{PM}ag}$$

B. Etude des tableaux magiques 3×3

A la première lecture...

1. Il faut bidouiller avec les propriétés des matrices magiques. On pourra exploiter les symétries

2. Comme en CE2

3. Peut-on en donner la valeur exactement ? En tout cas, il suffit visiblement de 3 coefficients (bien choisis) pour décrire une et une seule matrice magique

4. Il s'agit sûrement d'une question sur le ≪ bien choisis ≫précédent. Tout ne doit pas marcher, il y a a priori deux façons de ne pas bien marcher :
— il peut y avoir plusieurs solutions
— il peut y avoir aucune solution

5. (a) Il faut écrire, cela doit tomber tout seul, comme un fruit mûr
(b) A priori 2 variables libres, donc un espace de dimension 2 ou plus (selon le nombre de pivots nuls trouvés). A confirmer par le calculs...
(c) On a explicitement la famille base de $\mathcal{M}ag$
(d) Cela confirme une dimension de 3

1. Petite observation et cas particuliers

   (a) On considère $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leq 3\\ 1\leqslant j\leq 3}} \in \mathcal{M}ag$.

   Comme c'est une matrice magique, elle vérifie donc :

$$3d(A) = tr(A) + \sigma_2(A) + Atr(A) \quad \text{et} \quad 2d(A) = \tau_1(A) + \tau_3(A)$$

$$\begin{cases} 3d(A) = (a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3}) + (a_{1,2} + a_{2,2} + a_{3,2}) + (a_{3,1} + a_{2,2} + a_{1,3}) \\ 2d(A) = (a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3}) + (a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3}) \end{cases}$$

   Et donc en soustrayant, on obtient : /1

$$\boxed{d(A) = 3a_{2,2}}$$

   (b) Puisque c'est une matrice magique, on a donc $d(A) = 3 \times a_{2,2} = 9$ puis on complète et finalement on obtient /1

$$\boxed{\begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{2} & 2 \\ 0 & \mathbf{3} & 6 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}}$$

   (c) Ainsi, nous voyons qu'il suffit de trois valeurs (bien situées) dans un matrice de taille 3 pour génÈérer une matrice magique.

   Cela nous donne le sentiment que **3 valeurs génèrent** les vecteurs de $\mathcal{M}ag$.

   Ainsi comme $\mathcal{M}ag$ est un $\mathbb{R}$e.v. de dimension finie, on en conclue que /1

$$\boxed{\dim \mathcal{M}ag \leq 3}$$

Remarques !

On peut se demander si la donnée de trois valeurs : $a_{1,1} = a$, $a_{1,2} = b$ et $a_{2,2} = c$ permettent de générer toutes les matrices magiques... cela semble possible, la matrice suivante nous le montre :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & 3c - a - b \\ 4c - 2a - b & \mathbf{c} & 2a + b - 2c \\ a + b - c & 2c - b & 2c - a \end{bmatrix}$$

   (d) On essaye de compléter les matrices suivantes, en commentant nos calculs, cela permettra de voir quels sont les coefficients importants !

   On sait que $(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{2,2})$ est un triplet de base. Pour chacune des matrices, on va noter comme paramètre $\lambda = a_{2,2}$ et donc $d(A) = 3\lambda$.

   Dans ce cas, *la première matrice* devient

$$\begin{bmatrix} 2\lambda - 2 & 1 & \lambda + 1 \\ 3 & \lambda & 2\lambda - 3 \\ \lambda - 1 & 2\lambda - 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   Et l'on se rend compte, que cette matrice est bien magique, mais n'est pas unique... $(a_{1,2}, a_{2,1}, a_{3,3})$ n'est pas d'un triplet de base.

   Par exemple, on peut avoir

$$\lambda = 0 : \begin{bmatrix} -2 & \mathbf{1} & 1 \\ \mathbf{3} & 0 & -3 \\ -1 & -1 & \mathbf{2} \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \lambda = 2 : \begin{bmatrix} 2 & \mathbf{1} & 3 \\ \mathbf{3} & 2 & 1 \\ 1 & 3 & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

   La seconde matrice impose $d(A) = 3 + 4 + 5 = 12$ et $a_{2,2} = 4$, soit la matrice magique unique :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

   $(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{13})$ est un triplet de base.

   Pour *la troisième matrice*, on aurait $d(A) = 3a_{2,2} = 9$, et $d(A) = 5 + 3 + 2 = 10$, ce qui donne une contradiction. Cela signifie que lorsqu'une matrice est magique, les trois coordonnées $a_{1,1}, a_{2,2}$ et $a_{3,3}$ sont linéairement dépendantes ! /1,5

   Ce résultat comme d'ailleurs celui obtenu à propos de la première matrice, nous amène à croire que $\dim \mathcal{M}ag \geq 3$.

2. Recherche de l'ensemble des solutions

   (a) Soit $A \in \mathcal{M}ag$, alors les coefficients de A vérifient les équations $\sigma_2(A) - \sigma_1(A) = \sigma_3(A) - \sigma_1(A) = \tau_1(A) - \sigma_1(A) = \tau_2(A) - \sigma_1(A) = \tau_3(A) - \sigma_1(A) = s(A) - \sigma_1(A) = t(A) - \sigma_1(A) = 0$.
   Ils sont donc solutions du système (S) : /0,5

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrl}
-a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} & a_{2,1} & +a_{2,2} & +a_{2,3} & & & & =0 \\
-a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} & & & & +a_{3,1} & +a_{3,2} & +a_{3,3} & =0 \\
 & -a_{1,2} & -a_{1,3} & +a_{2,1} & & & +a_{3,1} & & & =0 \\
-a_{1,1} & & -a_{1,3} & & +a_{2,2} & & & +a_{3,2} & & =0 \\
-a_{1,1} & -a_{1,2} & & & & +a_{2,3} & & & +a_{3,3} & =0 \\
 & -a_{1,2} & -a_{1,3} & & +a_{2,2} & & & & +a_{3,3} & =0 \\
-a_{1,1} & -a_{1,2} & & & +a_{2,2} & & +a_{3,1} & & & =0
\end{array}\right.$$

$\boxed{\text{les 9 coefficients de } A \text{ sont solutions d'un système de 7 équations à 9 inconnues.}}$

   (b) Le sytème est composé de 7 équations à 9 inconnues, on applique le pivot de Gauss pour résoudre le système (S)

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrll}
-a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} & a_{2,1} & +a_{2,2} & +a_{2,3} & & & & =0 & \\
 & a_{1,2} & & -a_{2,1} & & -a_{2,3} & & +a_{3,2} & & =0 & L_4-L_1 \\
 & -a_{1,2} & -a_{1,3} & +a_{2,1} & & & +a_{3,1} & & & =0 & \\
 & & & -a_{2,1} & -a_{2,2} & -a_{2,3} & +a_{3,1} & +a_{3,2} & +a_{3,3} & =0 & L_2-L_1 \\
 & & a_{1,3} & -a_{2,1} & -a_{2,2} & & & & +a_{3,3} & =0 & L_5-L_1 \\
 & -a_{1,2} & -a_{1,3} & & +a_{2,2} & & & & +a_{3,3} & =0 & \\
 & & a_{1,3} & -a_{2,1} & & -a_{2,3} & +a_{3,1} & & & =0 & L_7-L_1
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrll}
-a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} & a_{2,1} & +a_{2,2} & +a_{2,3} & & & & =0 & \\
 & a_{1,2} & & -a_{2,1} & & -a_{2,3} & & +a_{3,2} & & =0 & \\
 & & -a_{1,3} & & & -a_{2,3} & +a_{3,1} & +a_{3,2} & & =0 & L_3+L_2 \\
 & & & -a_{2,1} & -a_{2,2} & -a_{2,3} & +a_{3,1} & +a_{3,2} & +a_{3,3} & =0 & \\
 & & a_{1,3} & -a_{2,1} & -a_{2,2} & & & & +a_{3,3} & =0 & \\
 & & -a_{1,3} & -a_{2,1} & +a_{2,2} & -a_{2,3} & & +a_{3,2} & +a_{3,3} & =0 & L_6+L_2 \\
 & & a_{1,3} & -a_{2,1} & & -a_{2,3} & +a_{3,1} & & & =0 &
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrll}
-a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} & a_{2,1} & +a_{2,2} & +a_{2,3} & & & & =0 & \\
 & a_{1,2} & & -a_{2,1} & & -a_{2,3} & & +a_{3,2} & & =0 & \\
 & & -a_{1,3} & & & -a_{2,3} & +a_{3,1} & +a_{3,2} & & =0 & \\
 & & & -a_{2,1} & -a_{2,2} & -a_{2,3} & +a_{3,1} & +a_{3,2} & +a_{3,3} & =0 & \\
 & & & -a_{2,1} & -a_{2,2} & -a_{2,3} & +a_{3,1} & +a_{3,2} & +a_{3,3} & =0 & L_5+L_3 \\
 & & & -a_{2,1} & +a_{2,2} & & -a_{3,1} & & +a_{3,3} & =0 & L_6-L_3 \\
 & & & -a_{2,1} & & -2a_{2,3} & +2a_{3,1} & +a_{3,2} & & =0 & L_7+L_3
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrll}
-a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} & a_{2,1} & +a_{2,2} & +a_{2,3} & & & & =0 & \\
 & a_{1,2} & & -a_{2,1} & & -a_{2,3} & & +a_{3,2} & & =0 & \\
 & & -a_{1,3} & & & -a_{2,3} & +a_{3,1} & +a_{3,2} & & =0 & \\
 & & & -a_{2,1} & -a_{2,2} & -a_{2,3} & +a_{3,1} & +a_{3,2} & +a_{3,3} & =0 & \\
 & & & & & & 0 & & & =0 & L_5-L_4 \\
 & & & & a_{2,2} & -a_{2,3} & +a_{3,1} & & -a_{3,3} & =0 & L_7-L_4 \\
 & & & & +2a_{2,2} & a_{2,3} & -2a_{3,1} & -a_{2,3} & & =0 & L_6-L_4
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrrrrrrrll}
-a_{1,1} & -a_{1,2} & -a_{1,3} & a_{2,1} & +a_{2,2} & +a_{2,3} & & & & =0 & \\
 & a_{1,2} & & -a_{2,1} & & -a_{2,3} & & +a_{3,2} & & =0 & \\
 & & -a_{1,3} & & & -a_{2,3} & +a_{3,1} & +a_{3,2} & & =0 & \\
 & & & -a_{2,1} & -a_{2,2} & -a_{2,3} & +a_{3,1} & +a_{3,2} & +a_{3,3} & =0 & \\
 & & & & a_{2,2} & -a_{2,3} & +a_{3,1} & & -a_{3,3} & =0 & \\
 & & & & & 3a_{2,3} & -4a_{3,1} & -a_{2,3} & 2a_{3,3} & =0 & L_7-2L_6
\end{array}\right.$$

   Ainsi, /1,5

$\boxed{\text{le rang du système vaut 6.}}$

   On peut donc choisir 3=9-6 paramètres (ou variables libres).
   L'espace vectoriel du « noyau du système » sera donc de dimension 3.

(c) Nous allons choisir les trois paramètres :
$z = \frac{1}{3}(a_{3,1} + a_{3,2} + a_{3,3})$
$x = \frac{1}{3}(a_{3,1} + a_{3,2} - 2a_{3,3})$
$y = \frac{1}{3}(2a_{3,1} - a_{3,2} - a_{3,3})$
En nous inspirant du résultat à trouver, sinon on aurait pu choisir comme paramètre les trois éléments d'un triplet de base... Le système (S) donne

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccc} a_{3,1} = y + z & a_{3,2} = x - y + z & a_{3,3} = -x + z \\ a_{2,3} = -x - y + z & a_{2,2} = z & a_{2,3} = x + y + z \\ a_{1,3} = x + z & a_{2,3} = -x + y + z & a_{3,3} = -y + z \end{array} \right.$$

Et donc $A = x \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,
ainsi *\/1,5*

$$\boxed{\mathcal{M}ag = \text{vect}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} ; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)}$$

(d) On remarque que les deux triplets proposés pour la première et troisième matrice de la question 7 ne permettent pas d'avoir la connaissance de z pour le premier cas et de y pour le second. Cette ignorance nous rend impossible de trouver une unique solution. */1*

C. Etude généralisé sur les tableaux de taille $n \times n$

Piste de recherche...

1. (a) Formaliser une propriété ($A \in \mathcal{PM}ag$) par un calcul équivalent ($AJ = JA = \lambda J$). Facile
(b) A faire
(c) La question n'arrive que maintenant...Peut-être est-il plus simple d'exploiter pour A^{-1} la caractérisation par le calcul vue juste quelques lignes plus haut.
(d) Cela sent le piège. On trouve un contre-exemple : une matrice non inversible, pseudo-magique avec un nombre d non nul...J ?

2. (a) Une somme directe (sans exploiter les dimensions). Peut-être un raisonnement en analyse synthèse. Cela donnera aussi les projecteurs p et q
(b) Libre+génératrice.
(c) Somme des dimensions pour une somme directe d'espaces vectoriels
(d) Une diagonale forte par rapport aux autres coefficients

3. (a) Une somme directe (sans exploiter les dimensions). Peut-être un raisonnement en analyse synthèse. Cela donnera aussi les projecteurs p et q
(b) Il faut exploiter les noyaux de formes linéaires (hyperplans). Pour chacun (si la famille est libre), la dimension perd une unité.
(c) Conclusion-bilan

1. Caractérisation des matrices pseudo-magiques et étude de d

(a) $\forall\ A \in E$,

$$A \times J = \begin{pmatrix} \tau_1(A) & \cdots & \tau_1(A) \\ \vdots & & \vdots \\ \tau_n(A) & \cdots & \tau_n(A) \end{pmatrix} \text{ et } J \times A = \begin{pmatrix} \sigma_1(A) & \cdots & \sigma_1(A) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_n(A) & \cdots & \sigma_n(A) \end{pmatrix}$$

Donc si $A \in \mathcal{PM}ag$ $A \times J = J \times A = d(a) \cdot J$
Réciproquement, supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A \times J = J \times A = \lambda \cdot J$
Cela signifie donc que $\forall\ i \in [\![1, n]\!]$, $\sigma_i(A) = \tau_i(A) = \lambda$, et donc $A \in \mathcal{PM}ag$.
Par double implication : */2*

$$\boxed{A \in \mathcal{PM}ag \text{ ssi } \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } A \times J = J \times A = \lambda \cdot J \text{ et dans ce cas } \lambda = d(a)}$$

(b) On constate d'abord que si $A, B \in \mathcal{PM}ag$, alors $A + B$ et $A \times B \in \mathcal{PM}ag$. Pour montrer ce que l'on vient d'énoncer et les relations vérifiées par d, on utilise la caractéristique précédente.
— Pour $A + B$, c'est facile à montrer :

$$(A + B) \times J = A \times J + B \times J = [d(A) + d(B)] \times J$$

et de même

$$J \times (A + B) = [d(A) + d(B)] \times J$$

Par conséquent : $A + B \in \mathcal{PM}ag$ et $d(A + B) = d(A) + d(B)$.

— En ce qui concerne $A \times B$, on a :

$$(A \times B) \times J = A \times (B \times J) = d(B) \cdot A \times J = d(A)d(B)J$$

et de même

$$J \times (A \times B) = d(A)d(B)J$$

Ainsi on peut affirmer que $A \times B \in \mathcal{PM}ag$ et $d(A \times B) = d(A) \times d(B)$.

Donc /1

$$\boxed{d \text{ est un morphisme d'anneaux}}$$

(c) Soit $A \in \mathcal{PM}ag$ inversible, alors $A^{-1} \times A \times J = I_n \times J = d(A)A^{-1}J$
donc $d(A) \neq 0$ (sinon, on aurait $J = 0_n$).
Puis donc $A^{-1} \times J = \dfrac{1}{d(A)} J$ et de même : $J \times A^{-1} = \dfrac{1}{d(A)} J$
Ainsi /2

$$\boxed{\text{si } A \in \mathcal{PM}ag \text{ inversible alors } d(A) \neq 0,\ A^{-1} \in \mathcal{PM}ag \text{ et } d(A^{-1}) = \frac{1}{d(A)}}$$

(d) $J \in \mathcal{PM}ag$, car $J^2 = nJ$, et $d(J) = n \neq 0$.
Or J n'est pas inversible (la première colonne de J est égale à la seconde !).
Donc /1

$$\boxed{\text{la réciproque est fausse}}$$

2. Décomposition de $\mathcal{PM}ag$ en espaces supplémentaires.
On définie : $\mathcal{M}_1^* = \text{Ker } d$ et $\mathcal{M}_2 = \text{vect}J$.

(a) Analyse : Soit $A = B + \lambda J$ où $B \in \mathcal{M}_1^*$. Alors $d(A) = d(B) + \lambda d(J)$,
donc $\lambda = \frac{d(A)}{n}$, car $d(J) = n$ et $d(B) = 0$; puis $B = A - \frac{d(A)}{n} J$
La décomposition est donc nécessairement unique.
Synthèse : Soit $A \in \mathcal{PM}ag$. Soit $B = A - \frac{d(A)}{n} J$, alors $B \in \mathcal{PM}ag$.
Et $d(B) = d(A) - \frac{d(A)}{n} d(J) = d(A) - \frac{d(A)}{n} n = 0$; donc $B \in \mathcal{M}_1^*$
Et aussi $\frac{d(A)}{n} J \in \mathcal{M}_2$. Comme $A = B + \frac{d(A)}{n} J$
On peut conclure que /1,5

$$\boxed{\mathcal{M}_1^* \oplus \mathcal{M}_2 = \mathcal{PM}ag}$$

(b) On pose $\forall\ i, j \in [\![2, n]\!] : A_{i,j} = E_{1,1} + E_{i,j} - E_{i,1} - E_{1,j}$.
On sait déjà que la famille $(A_{i,j})_{\substack{2 \leqslant i \leqslant n \\ 2 \leqslant j \leqslant n}}$ est libre.
De plus $\forall\ 2 \leqslant i \leqslant n, 2 \leqslant j \leqslant n$, $A_{i,j} \in \mathcal{M}_1^*$ (cette remarque n'est pas nécessaire).
Enfin, montrons qu'elle est génératrice de cet espace.
Soit $B \in \mathcal{M}_1^* \subset E$, donc on sait que $B = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} b_{i,j} E_{i,j}$.
Or $B \in \mathcal{M}_1^*$, d'où

— $\forall\ i \in [\![2, n]\!]$, $b_{i,1} = -\sum\limits_{j=2}^{n} b_{i,j}$

— $\forall\ j \in [\![2, n]\!]$, $b_{1,j} = -\sum\limits_{i=2}^{n} b_{i,j}$

— $b_{1,1} = -\sum\limits_{j=2}^{n} b_{1,j} = \sum\limits_{i=2}^{n} \sum\limits_{j=2}^{n} b_{i,j}$

Ce qui donne $B = b_{1,1}E_{1,1} + \sum_{2 \leq i \leq n} b_{i,1}E_{i,1} + \sum_{2 \leq j \leq n} b_{1,j}E_{1,j} + \sum_{\substack{2 \leq i \leq n \\ 2 \leq j \leq n}} b_{i,j}E_{i,j}$

soit $B = [\sum_{\substack{2 \leq i \leq n \\ 2 \leq j \leq n}} b_{i,j}]E_{1,1} - \sum_{2 \leq i \leq n} \sum_{2 \leq j \leq n} b_{i,j}E_{i,1}$
$- \sum_{2 \leq j \leq n} \sum_{2 \leq i \leq n} b_{1,j}E_{i,1} + \sum_{\substack{2 \leq i \leq n \\ 2 \leq j \leq n}} b_{i,j}E_{i,j}$

d'où $B = \sum_{\substack{2 \leq i \leq n \\ 2 \leq j \leq n}} b_{i,j} \underbrace{(E_{i,j} + E_{1,1} - E_{1,j} - E_{i,1})}_{A_{i,j}}$

Donc /1,5

$$\boxed{\text{la famille } (A_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \text{ est une base de } \mathcal{M}_1^*}$$

(c) Nous avons trouvé une base de $\mathcal{M}_1^*$, composée de $(n-1)^2$ vecteurs, ainsi /1

$$\boxed{\dim \mathcal{M}_1^* = (n-1)^2 \text{ et de } \dim \mathcal{PM}ag = n^2 - 2n + 1 \text{ (car } \dim \mathcal{M}_2 = 1).}$$

/1

(d)

$$\boxed{I_3 \text{ est pseudo-magique mais non magique}}$$

3. La dimension de $\mathcal{M}ag$
   (a) Comme pour la question 2.(b), $\forall\ A \in \mathcal{M}ag$, $\exists!(B,\lambda) \in \mathcal{M}_1 \times \mathbb{R}$ tel que $A = B + \lambda J$, c'est le couple donné par $\lambda = \frac{d(a)}{n}$ et $B = A - \frac{d(a)}{n} J$.
   On a bien ici $B \in \text{Ker } d$, mais surtout $B \in \mathcal{M}ag$ (comme A).
   Et donc /1
   $$\boxed{\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}ag}$$
   (b) On sait que $\mathcal{M}_1 = \{A \in \mathcal{M}_1^* / \text{Tr } (A) = \text{Atr } (A) = 0\}$
   On sait de plus que si $A' \in \mathcal{M}_1^*$, alors les n^2 coefficients de A' sont solutions d'un système de rang égale à $n^2 - \dim \mathcal{M}_1^* = 2n - 1$.
   Donc si $A \in \mathcal{M}_1$, les n^2 coefficients de A sont les solutions d'un système d'équations de rang égale à $2n - 1 + 2$, ce $+2$ correspondant aux deux équations supplémentaire $\text{Tr } (A) = \text{Atr } (A) = 0$, à condition que celles-ci soient indépendante des précédentes.
   Mais c'est bien le cas, puisque l'on peut trouver une matrice de $\mathcal{M}_1^*$ mais avec $\text{Atr } (A) \neq 0$. Par exemple
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & & -1 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & -1 & & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   Et de même pour $\text{Tr } (A) \neq 0$
   Ainsi $\dim \mathcal{M}_1 = n^2 - (2n+1)$, c'est-à-dire /2
   $$\boxed{\dim(\mathcal{M}_1) = \dim(\mathcal{M}_1^*) - 2 = n^2 - 2n - 1}$$
   (c) On a donc $\underline{\dim \mathcal{M}ag = n^2 - 2n = n(n-2)}$ /0,5
   On ne peut pas compléter la première matrice (du moins de manière unique), puisque nous est données 7 valeurs alors que $\dim \mathcal{M}ag = 4 \times 2 = 8$. /1,5
   Précisément, on obtient en fonction d'un paramètre λ.
   Pour la seconde matrice $\lambda = 6$
   $$\boxed{\begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & \lambda - 3 \\ \lambda - 5 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & \lambda - 3 & 4 \\ 2 & \lambda & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}}$$

Problème 2

A. Deux exemples

1. (a) $\text{Im } u = \text{Im } M = \text{vect}(C_1, C_2, C_3, C_4)$, où C_i est la i$^{\text{e}}$colonne de M.
   Or $C_1 = C_2$ et $C_3 = -C_4$. On a donc $\text{Im } u = \text{vect}(C_1, C_3)$ Et comme C_1 et C_3 ne sont pas colinéaires, alors /1
   $$\boxed{\text{rg}(u) = 2 \text{ et une base de Im } u \text{ est } (e_1 - e_2, e_3 - e_4)}$$
   Comme $C_1 = C_2$, alors $u(e_1 - e_2) = 0$ et comme $C_3 = -C_4$, alors $u(e_3 + e_4) = 0$,
   donc comme $\dim \text{Ker } u = 2$ (d'après le théorème du rang), donc /0,5
   $$\boxed{\text{une base de Ker } u \text{ est la famille } (e_1 - e_2, e_3 + e_4)}$$

Vu dans des copies...

« rang$(u) = \dim(\text{vect}(e_1, e_2, e_3, e_4))$, donc rang$(u) = 4$ »

« Le rang de u est 3 car $\dim(M) = 3$ »

« rg$(u) = 4$.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 + e_2 \\ -e_1 - e_2 \\ -e_3 + e_4 \\ e_3 - e_4 \end{pmatrix} = F$$
D'où Im $u = \text{vect}(F)\ldots$ »

« $M \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$ Donc u est de rang 2.

$\text{Im } u = \text{vect}\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\} = \text{vect}\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\}$ *On a donc une base de Im u qui est* $\{f(e_1), f(e_3)\}$.

$\text{Ker } u = \text{vect}\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\} = \text{vect}\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\}$ *soit* $\{e_1, e_3\}$ »

(b) Le calcul donne :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \qquad (/1)$$

On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, alors on voit que $M^2 = 2A$ et $M^3 = -4A$.

Remarquons également que $M \times A = 2A$.

Posons, pour tout entier $n \geqslant 2$, $\mathscr{P}_n$:"$M^n = 2^{n-1}A$".

— $\mathscr{P}_2$ est vraie, nous l'avons vu plus haut.

— Soit n, supposons que $\mathscr{P}_n$ est vraie.
Alors $M^n = 2^{n-1}A$ et donc $M^{n+1} = M \times M^n = 2^{n-1}MA = 2^n A$ d'après une remarque précédente.
Ainsi, $\mathscr{P}_{n+1}$ est également vraie. /1,5

$$\boxed{\text{Donc pour tout } p \geqslant 2,\ M^p = 2^{p-1}A = 2^{p-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

(c) i. Comme pour la question (a) et connaissant M^2, nous pouvons affirmer : /1

$$\boxed{\text{une base de Im } u^2 \text{ est } (e_3 - e_4)\text{, c'est également une base de Im } u^3}$$

$$\boxed{\text{une base de } \ker u^2 \text{ est } (e_1, e_2, e_3 + e_4)\text{, c'est également une base de Ker } u^3}$$

ii. Puisque tout les M^k sont colinéaires à A dès que $k \geqslant 2$,
on a donc /1

$$\boxed{\forall\, k \geqslant 2,\ \text{Ker } u^k = \text{Ker } u^2,\ \text{Im } u^k = \text{Im } u^2 \text{ dont on donne des bases plus haut}}$$

iii. Soit $x \in \text{Ker } u^2 \cap \text{Im } u^2$.
Donc il existe $y \in E$ tel que $x = u^2(y)$.
Or $u^2(x) = 0$, donc $u^4(y) = u^2(u^2(y)) = 0$ donc $y \in \text{Ker } u^4$.
Or $\text{Ker } u^4 = \text{Ker } u^2$, donc $y \in \text{Ker } u^2$ et donc $x = u^2(y) = 0$.
Ainsi $\text{Ker } u^2 \cap \text{Im } u^2 = \{0\}$ (/2).
Par ailleurs, $\dim(\text{Ker } u^2 + \text{Im } u^2) = \dim(\text{Ker } u^2) + \dim(\text{Im } u^2)$ car la somme est directe
$\dim(\text{Ker } u^2 + \text{Im } u^2) = 2 + 2 = 4 = \dim(E)$.
et $\text{Ker } u^2 + \text{Im } u^2 \subset E$ avec égalité des dimension, donc $\text{Ker } u^2 + \text{Im } u^2 = E$. /1

$\boxed{\text{Bilan } E = \text{Ker } u^2 \oplus \text{Im } u^2}$.

2. (a) $d(X+1) = 1 = d(X)$ donc /0,5

$$\boxed{d \text{ n'est pas injectif}}$$

Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, on a $d\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1}\right) = P$. /1

$$\boxed{d \text{ est surjectif}}$$

Si $\mathbb{K}[X]$ était de dimension finie, on aurait : pour tout application linéaire u de $\mathbb{K}[X]$:
u injective$\Leftrightarrow$ u bijective $\Leftrightarrow$ u surjective.
Or d est bien linéaire sur $\mathbb{K}[X]$, surjective sans être injective, /0,5

$$\boxed{\text{donc nécessairement } \mathbb{K}[X] \text{ n'est pas de dimension finie}}$$

Vu dans des copies...

« d est surjective car c'est un endomorphisme ce qui signifie que d est une application linéaire de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$.
d n'est pas injective car contre-exemple : soit $P(X) = X^3 + X^2 + X + 1$, $P'(X) = X^2 + X + 1$ donc P' n'est pas strictement croissante. »
« P' admet au moins un polynôme P par l'application d.
Mais il existe plusieurs polynômes P dont la dérivée est P' (par d).
Donc d est surjectif mais n'est pas injectif.
Comme d n'est pas injectif, il existe une infinité de polynôme dans $\mathbb{K}[X]$ dont la dérivé est P'.
Donc $\mathbb{K}[X]$ n'est pas de dimension finie. »

(b) On a (par récurrence) : $\forall\ n \geqslant q$, $d^q(X^n) = \frac{n!}{(n-q)!}X^{n-q}$ et pour $n < q$, $d^q(X^n) = 0$.
Puis par linéarité de d^q : /1

$$\boxed{\text{Ker } d^q = \mathbb{K}_{d-1}[X]}$$

B. Noyaux et images itérés

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, pour tout entier naturel p, on notera $I_p = \text{Im } u^p$ et $K_p = \text{Ker } u^p$.

1. Soit $x \in K_p$, alors $x \in \text{Ker } u^p$ donc $u^{p+1}(x) = u\big(u^p(x)\big) = u(0) = 0$ car u linéaire donc $x \in K_{p+1}$ et donc /0,5

$$\boxed{K_p \subset K_{p+1}}$$

Soit $y \in I_{p+1}$, donc il existe $x \in E$ tel que $y = u^{p+1}(x) = u^p\big(u(x)\big)$.
donc $y \in I_p$, et par conséquent : /0,5

$$\boxed{I_{p+1} \subset I_p}$$

Vu dans des copies...

« Soit $x \in K_{p+1}$, alors $u(x)^{p+1} = 0$ donc $u(x)^p \times u(x) = 0$.
Or $u(x) \neq 0$, donc $u(x)^p = 0$ ainsi $x \in K_p$.
Donc $K_p \subset K_{p+1}$ »

2. On suppose que E est de dimension finie et u injectif.
Alors u est bijectif et u est surjectif.
Soit $y \in E$, alors $\exists\ x_1, x_2, \dots x_p$ tel que :
$y = u(x_1)$, $x_1 = u(x_2)$, $x_2 = u(x_3) \dots x_{p-1} = u(x_p)$ car u surjectif.
Alors $y = u(x_1) = u^2(x_2) = u^3(x_3) = \cdots = u^p(x_p)$, donc $y \in \text{Im } u^p$.
Ainsi, $E \subset I_p$, l'inclusion réciproque est évidente, donc

$$\boxed{I_p = E}$$

Avec le théorème du rang, on a $\dim(K_p) = 0$ et donc /1

$$\boxed{K_p = \{0\}}$$

3. On suppose que E est de dimension finie n non nulle et u non injectif.
(a) Notons que $K_r \subset K_{r+1}$, donc $\dim K_r \leqslant \dim(K_{r+1})$ avec égalité ssi $K_r = K_{r+1}$.
Faisons un raisonnement par l'absurde.
Si pour tout $r \leqslant n$, $K_r \neq K_{r+1}$, alors $\dim(K_r) < \dim(K_{r+1})$ et $\dim(K_{r+1}) \leqslant \dim(K_r) + 1$.
Donc $\dim(K_{n+1}) = \sum_{r=0}^{n} \big(\dim(K_{r+1}) - \dim(K_r)\big) \leqslant \sum_{r=0}^{n} 1 = (n+1)$.
car $K_0 = \{0\}$ et donc $\dim(K_0) = 0$.
On a donc $K_{n+1} \subset E$ avec des dimensions plus grandes...
Par conséquent, il y a une contradiction donc il existe $r \leqslant n$ tel que $K_r = K_{r+1}$.
Il y a nécessairement un plus petit élément (dans $\mathbb{N}$) /2

$$\boxed{\text{Donc il existe un plus petit entier naturel } r \leqslant n \text{ tel que : } K_r = K_{r+1}}$$

(b) Nous savons que $I_{r+1} \subset I_r$,
et par ailleurs : $\dim(I_r) = \dim E - \dim(K_r) = \dim E - \dim(K_{r+1}) = \dim(I_{r+1})$.
Donc on a égalité des espaces vectoriels : /1

$$\boxed{I_r = I_{r+1}}$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. On va montrer que $K_{r+p} = K_{r+p+1}$, on sait déjà que $K_{r+p} \subset K_{r+p+1}$.
Vérifions l'inclusion réciproque. Soit $x \in K_{r+p+1}$.
Donc $u^{r+p+1}(x) = 0$, donc $u^{r+1}\big(u^p(x)\big)$ et donc $u^p(x) \in K_{r+1}$.
Or $K_{r+1} = K_r$, donc $u^p(x) \in K_r$ donc $0 = u^r\big(u^p(x)\big) = u^{r+p}(x)$ et $x \in K_{r+p}$.
Alors $K_{r+p} \subset K_{r+p+1}$.
Par double inclusion : $K_{r+p} = K_{r+p+1}$.
Ainsi, la suite $(K_{r+p})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite constante, donc *I1*

$$\boxed{\forall\ p \in \mathbb{N},\ K_{r+p} = K_r}$$

Là encore : $I_{r+p} \subset I_r$ et ces deux espaces ont même dimension (théorème du rang),

$$\boxed{\text{donc } \forall\ p \in \mathbb{N},\ I_{r+p} = I_r}$$

Vu dans des copies...
« Montrons que $K_r = K_{r+p}$ par récurrence.
Ceci est vrai initialement d'aprËs la question précédente.
Supposons que $K_r = K_{r+p}$.
Alors $K_{r+p+1} = K_{r+p} \times K = K_r \times K = K_{r+1} = K_r$.
Ainsi $\forall\ p \in \mathbb{N}, \quad K_r = K_{r+p}$ »

(c) Soit $x \in K_r \cap I_r$,
alors il existe y tel que $x = u^r(y)$ et donc $u^{2r}(y) = u^r(x) = 0$ car $x \in K_r$.
Ainsi $y \in K_{2r}$. Or $K_{2r} = K_r$, donc $x = u^r(y) = 0$.
Par conséquent, $K_r \cap I_r = \{0\}(/1)$.
Là encore, pour des raisons de dimensions (cf. A.(c) iii.), on a *I1*

$$\boxed{E = K_r \oplus I_r}$$

4. Non !
Nous voyons que *I1*

$$\boxed{\text{avec l'exemple de } d \text{ de la première partie : Ker } d^q \neq \text{Ker } d^{q+1}, \text{ pour tout } q \in \mathbb{N}.}$$

5. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$, puisque les espaces sont en supplémentaires : $\dim(F_p) + \dim I_{p+1} = \dim(I_p)$ */0,5*

$$\boxed{\text{et donc } \dim(F_p) = \dim I_p - \dim I_{p+1} = a_p}$$

Vu dans des copies...
« $a_p = \dim(I_p) - \dim(I_{p+1})$. Or $F_p \oplus I_{p+1} = I_p$.
Donc $F_p + I_{p+1} = I_p$ donc $F_p = I_p - I_{p+1}$, donc $\dim(F_p) = \dim(I_p) - \dim(I_{p+1}) = a_p$ »

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$,
Soit $x \in I_{p+1}$
Alors il existe x' tel que $x = u^{p+1}(x')$.
Or $u^p(x') \in I_p$ donc il existe un unique $(y, z) \in I_{p+1} \times F_p$ tel que $u^p(x') = y + z$.
Puis $x = u^{p+1}(x') = u\left(u^p(x')\right) = u(y + z) = u(y) + u(z)$.
Or $y \in I_{p+1}$ donc il existe y' tel que $y = u^{p+1}(y')$ et donc $u(y) = u^{p+2}(y') \in I_{p+2}$ et $u(z) \in u(F_p)$
Donc $I_{p+1} \subset I_{p+2} + u(F_p)$.
Réciproquement, si $x \in u(F_p)$, alors il existe $a \in F_p$ tel que $x = u(a)$.
or $F_p \subset I_p$, donc $a \in I_p$, et il existe $b \in E$ tel que $a = u^p(b)$ et $x = u^{p+1}(b) \in I_{p+1}$.
donc $u(F_p) \subset I_{p+1}$ et nous savions que $I_{p+2} \subset I_{p+1}$.
donc comme ce sont des espaces vectoriels : $u(F_p) + I_{p+2} \subset I_{p+1}$ (/2).
On a donc démontré par double inclusion : */1,5*

$$\boxed{\text{pour tout } p \in \mathbb{N},\ I_{p+1} = I_{p+2} + u(F_p)}$$

(c) $\dim(I_{p+1}) = \dim(I_{p+2} + u(F_p)) = \dim(I_{p+2}) + \dim\big(u(F_p)\big) - \dim\big(I_{p+2} \cap u(F_p)\big)$
Donc $\dim(F_{p+1}) = a_{p+1} = \dim(I_{p+1}) - \dim(I_{p+2}) = \dim\big(u(F_p)\big) - \dim\big(I_{p+2} \cap u(F_p)\big) \leqslant \dim\big(u(F_p)\big)$ /1

$$\boxed{\dim(F_{p+1}) = a_{p+1} \leqslant \dim\big(u(F_p)\big)}$$

(d) On applique le théorème du rang à $\tilde{u}$, on a : $\dim(F_p) = \dim(\text{Ker } \tilde{u}) + \dim(\text{Im } \tilde{u})$.
Or $\dim(\text{Ker } \tilde{u}) \geqslant 0$ (à noter que l'on a $\text{Ker } \tilde{u} = F_p \cap \text{Ker } u$) et $\text{Im } \tilde{u} = u(F_p)$, donc /1,5

$$\boxed{\dim(F_p) \geqslant \text{rang}(\tilde{u}) = \dim(u(F_p))}$$

(e) On a donc pour tout p : $a_{p+1} = \dim F_{p+1} \leqslant \dim u(F_p) \leqslant \dim F_p = a_p$.
Donc la suite (a_p) est décroissante, c'est exactement /1

$$\boxed{\dim I_{p+1} - \dim I_{p+2} \leqslant \dim I_p - \dim I_{p+1}}$$

(f) En effet dans ce cas $a_r = 0$,
comme (a_r) est décroissante à valeur entière positive, on a donc $\forall\ p \in \mathbb{N},\ a_{r+p} = 0$.
Cela correspond donc à $\dim(I_{r+p}) = \dim(I_{r+p+1})$, avec les inclusions : $I_{r+p+1} \subset I_{r+p}$,
cela donne l'égalité des espaces. Tous les espaces $(I_{r+p})_p$ sont égaux : /0,5

$$\boxed{\forall\ p \in \mathbb{N},\ I_r = I_{r+p}}$$

C. Cas des endomorphismes nilpotents

Rappelons que nous avons démontrer pour finir la partie précédente que :
la suite $b_p = \dim(\text{Ker } u^{p+1}) - \dim(\text{Ker } u^p)$ est (toujours) décroissante.

1. Si $M_{\mathscr{B}}(u) = J_4$, alors $M_{\mathscr{B}}(u^p) = (J_4)^p (/1)$.
Or $J_4^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_4^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et pour $p \geqslant 3$, $J_4^p = J_4^{p-3} \times J_4^3 = 0$. /1

$$\boxed{\text{Donc } M_{\mathscr{B}}(u^3) = 0,\ u^3 = 0 \text{ donc } u^3 \text{ est nilpotent et } r, \text{ plus petit entier tel que } u^r = 0 \text{ vaut } 3}$$

2. Étude de la suite des noyaux itérés d'un endomorphisme nilpotent.

(a) $u^r = 0$, donc pour tout $x \in E$, $u^r(x) = 0$ donc $x \in K_r$ et ainsi $E \subset K_r$.
L'inclusion réciproque est évidente (tout se passe dans E), donc

$$\boxed{K_r = E}$$

Puis par inclusion successive : $K_r \subset K_{r+1} \subset E$, donc $K_{r+1} = K_r = E$
et donc /0,5

$$\boxed{b_r = \dim(K_{r+1}) - \dim(K_r) = n - n = 0}$$

(b) Nous savons de la partie B (mais cela est rappelé) que la suite (b_p) est décroissante.
De plus $\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} b_k = \sum_{k=0}^{r-1} \big(\dim(K_{k+1}) - \dim(K_k)\big) = \dim(K_r) - \dim(K_0)$ par téléscopage.
Or $K_r = E$, donc $\dim(K_r) = n$ et $u^0 = id$, donc $K_0 = \{0\}$ donc $\dim(K_0) = 0$.
Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} b_k = n - 0 = n$. Donc /1,5

$$\boxed{\text{la suite } B = (b_0, b_1, \ldots b_{r-1}) \text{ est bien une partition de } n = \dim(E).}$$

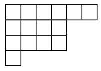
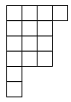
3. Tableau de Young de u.

(a) Par définition de transposition, le nombre de case de la première ligne de $(b_0, b_1, \ldots b_{r-1})^{-1}$ est égal au nombre de case de la première colonne de $(b_0, b_1, \ldots b_{r-1})$.
Or il y a autant de case dans cette première colonne que de lignes, tout simplement : il y en a ici r (de b_0 à b_{r-1}, il y a $(r-1) - 0 + 1 = r$ lignes).
Donc /1

$$\boxed{\text{le nombre de case de la première ligne de } \Upsilon(u) \text{ est égal à } r}$$

(b) Supposons donc que $\Upsilon(u) = (6, 4, 4, 1)$.

i. On a donc les tableau de Young suivant :

$\Upsilon(u)$:  d'inverse 

/1

$$\boxed{\text{Donc } [\Upsilon(u)]^{-1} = (4, 3, 3, 3, 1, 1)}$$

ii.

$$\boxed{\text{D'après ce que l'on a vu : } r = 6}$$

Et $n = \sum_{i=0}^{r-1} b_i = \sum_j c_j = 6 + 4 + 4 + 1 = 15$ (/0,5) (autant de cases pour $[\Upsilon(u)]^{-1}$ que $\Upsilon(u)$) On a vu à la question précédente : /1

$$\boxed{B = (b_0, b_1, \dots b_r) = (4, 3, 3, 3, 1, 1)}$$

ce qui signifie :
$\dim(K_0) = 0$ $\dim(K_1) = 4$ $\dim(K_2) = 7$ $\dim(K_3) = 10$
$\dim(K_4) = 13$ $\dim(K_5) = 14$ $\dim(K_6) = 15$.

iii. $K_5 \neq E$, donc il existe $v_1 \in E$ tel que $v_5 \notin K_5$ i.e. $u^5(v_1) \neq 0$.
Par ailleurs, comme $K_6 = E$, on a $u^6(v_1) = 0$.
Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{i=0}^{5} \lambda_i u^i(v_1) = 0$.
en composant par u^5, on a : $u^5(0) = 0 = u^5\left(\sum_{i=0}^{5} \lambda_i u^i(v_1)\right) = \sum_{i=0}^{5} \lambda_i u^{5+i}(v_1) = \lambda_0 u^5(v_1)$.
car $\forall\ i \geqslant 6$, $u^i(v_1) = 0$. Or $u^5(v_1) = 0$ et donc $\lambda_0 = 0$ d'où $\sum_{i=1}^{5} \lambda_i u^i(v_1) = 0$
puis, de même : $u^4(0) = 0 = \lambda_1 u^5(v_1)$ et donc $\lambda_1 = 0$ d'où $\sum_{i=2}^{5} \lambda_i u^i(v_1) = 0$
puis, de même : $u^3(0) = 0 = \lambda_2 u^5(v_1)$ et donc $\lambda_2 = 0$ d'où $\sum_{i=3}^{5} \lambda_i u^i(v_1) = 0$
puis, de même : $u^2(0) = 0 = \lambda_3 u^5(v_1)$ et donc $\lambda_3 = 0$ d'où $\sum_{i=4}^{5} \lambda_i u^i(v_1) = 0$
puis : $u(0) = 0 = \lambda_4 u^5(v_1)$ et donc $\lambda_4 = 0$ d'où $\sum_{i=5}^{5} \lambda_i u^i(v_1) = 0$ et donc $\lambda_5 = 0$.
On a nécessairement : $\forall\ i \in \{0, .., 5\}$, $\lambda_i = 0$.
Alors /1,5

$$\boxed{\text{la famille } \big(v_1, u(v_1) \dots u^5(v_1)\big) \text{ est une famille libre (de } E = \mathbb{R}^n)}$$

iv. Nous y avons répondu précédemment :

$$\boxed{\dim(\text{Ker } u^4) = 13 \text{ et } \dim(\text{Ker } u^3) = 10}$$

On sait que $K_3 \subset K_4$,
$u^3\big(u^2(v_1)\big) = u^5(v_1) \neq 0$: $u^2(v_1) \neq K_3$ et $u^4\big(u^2(v_1)\big) = u^6(v_1) = 0$: $u^2(v_1) \neq K_4$.
Donc $\text{vect}\big(u^2(v_1)\big) \cap K_3 = \{0\}$: ces deux espaces sont en somme direct dans K_4.
Notons $K_3' = \text{vect}\big(u^2(v_1)\big) \oplus K_3$, c'est un sous-espace vectoriel de K_4,
il est de dimension : $\dim(K_3) + 1 = 11$.
Et il existe G_3, de dimension 2, supplémentaire de K_3' dans K_4, de base (v_2, v_3).
Alors : $\text{vect}\big(v_2, v_3\big) \oplus \text{vect}\big(u^2(v_1)\big) \oplus K_3 = K_4$ (/3).
Finalement /2

$$\boxed{\text{il existe } v_2 \text{ et } v_3 \in \text{Ker } (u^4) \text{ tels que } \text{vect}\big(u^2(v_1), v_2, v_3\big) \oplus \text{Ker } u^3 = \text{Ker } u^4}$$

v. Soit $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in \mathbb{R}$ tel que $\mu_1 u^3(v_1) + \mu_2 u(v_2) + \mu_3 u(v_3) = 0$.
Par linéarité, $u(\mu_1 u^2(v_1) + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3) = 0$, donc $\mu_1 u^2(v_1) + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3 \in \text{Ker } u$.
Or $\text{Ker } u \subset K_3$, donc $\mu_1 u^2(v_1) + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3 \in K_3 \cap G_3 = \{0\}$ (/2).
Donc $\mu_1 u^2(v_1) + \mu_2 v_2 + \mu_3 v_3 = 0$ et comme la famille $\big(u^2(v_1), v_2, v_3\big)$ est libre,

alors $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0$ et donc $\big(u^3(v_1), u(v_2), u(v_3)\big)$ est également libre.
Ce sont des éléments de K_3, en somme directe avec K_2 (/2)

$(u^3(u^3(v_1)) = 0,\ u^2(u^3(v_1)) \neq 0,\ u^3(u(v_2)) = u^4(v_2) = 0\ (v_2 \in K_4),$
$u^2(u(v_2)) = u^3(v_2) \neq 0\ (v_2 \notin K_3)$ de même pour $v_3 \ldots$).

Enfin, si on note $G_2 = \text{vect}\big(u^3(v_1), u(v_2), u(v_3)\big)$, alors $\dim(G_2) = 3$ (la famille est libre), et $\dim K_3 = 10$, $\dim(K_2) = 7$.
G_2 et K_2 sont non seulement en somme directe mais *(/0,75)*

$$\boxed{\text{supplémentaires dans } K_3}$$

On démontre de la même façon que : *(/0,75)*

- $\big(u^4(v_1), u^2(v_2), u^2(v_3)\big)$ est une famille libre (en composant par u)
- $\text{vect}\big(u^4(v_1), u^2(v_2), u^2(v_3)\big)$ est supplémentaire de Ker u dans Ker u^2
  (pour des raisons de dimension également).

vi. On a $u(u^5(v_1)) = 0$, $u(u^3(v_2)) = u^4(v_2) = 0$ et $u(u^3(v_3)) = 0$, donc $u^5(v_1), u^3(v_2), u^3(v_3)$ sont des éléments de K_1.
En outre ils forment une famille libre :
soit $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}$ tel que $\eta_1 u^5(v_1) + \eta_2 u^3(v_2) + \eta_3 u^3(v_3) = 0$.
Par linéarité on a $u^3(\eta_1 u^2(v_1) + \eta_2 v_2 + \eta_3 v_3) = 0$, donc $\eta_1 u^2(v_1) + \eta_2 v_2 + \eta_3 v_3 \in K_3$.
Donc $\eta_1 u^2(v_1) + \eta_2 v_2 + \eta_3 v_3 \in K_3 \cap G_3 = \{0\}$, donc $\eta_1 u^2(v_1) + \eta_2 v_2 + \eta_3 v_3 = 0$.
Puis comme la famille $\big(u^2(v_1), v_2, v_3\big)$ est libre, alors $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0$
et donc $\big(u^5(v_1), u^3(v_2), u^3(v_3)\big)$ est une famille libre de K_1.
On sait que $\dim(K_1) = 4$, et donc avec le théorème de la base incomplète : *(/1)*

$$\boxed{\text{il existe } v_4 \text{ tel que } \big(u^5(v_1), u^3(v_2), u^3(v_3), v_4\big) \text{ forme une base de } K_1 = \text{Ker } u.}$$

vii. On a finalement obtenue une succession de somme directe :
$K_2 = K_1 \oplus G_1$ avec $K_1 = \text{vect}\big(u^5(v_1), u^3(v_2), u^3(v_3), v_4\big)$ et $G_1 = \text{vect}\big(u^4(v_1), u^2(v_2), u^2(v_3)\big)$.
$K_3 = K_2 \oplus G_2$ avec $G_2 = \text{vect}\big(u^3(v_1), u(v_2), u(v_3)\big)$.
$K_4 = K_3 \oplus G_3$ avec $G_3 = \text{vect}\big(u^2(v_1), v_2, v_3\big)$.
$K_5 = K_4 \oplus \text{vect}(u(v_1))$ et $E = K_6 = K_5 \oplus \text{vect}(v_1)$.
En mettant bout à bout tout cela on a

$$\mathcal{B} = \big(u^5(v_1), u^4(v_1), u^3(v_1), u^2(v_1), u(v_1), v_1, u^3(v_2), u^2(v_2), u(v_2), v_2, u^3(v_3), u^2(v_3), u(v_3), v_3, v_4\big)$$

est une famille génératrice (/3) de E, et comme elle possède le bon nombre d'éléments *(/1)*

$$\boxed{\text{c'est donc une base de } E}$$

L'écriture se fait simplement (en notant que $u(u^5(v_1)) = 0 = u(u^3(v_2)) = u(u^3(v_3)) = u(v_4)$, les autres éléments glissent...), on obtient finalement *(/1)*

$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix}
0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
J_6 & 0 & 0 & 0\\
0 & J_4 & 0 & 0\\
0 & 0 & J_4 & 0\\
0 & 0 & 0 & J_1
\end{pmatrix}$$

On a donc démontré que pour u nilpotent de tableau de Young $\Upsilon(u) = (6,4,4,1)$,
il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $M_{\mathcal{B}}(u)$ soit la matrice diagonale par blocs, de blocs J_6, J_4, J_4, J_1