CPGE MPSI Le 28.01.17
2016-2017

Devoir Surveillé n°6

CORRECTION

Exercice

1. Il s'agit de factorisation bien connue maintenant :

$$\boxed{R_3 = X^3 - 1 = \underbrace{(X-j)(X-j^2)(X-1)}_{\text{sur } \mathbb{C}[X]} = \underbrace{(X^2+X+1)(X-1)}_{\text{sur } \mathbb{R}[X]}}$$

/1,5

$$\boxed{R_4 = X^4 - 1 = \underbrace{(X-i)(X+i)(X-1)(X+1)}_{\text{sur } \mathbb{C}[X]} = \underbrace{(X^2+1)(X-1)(X+1)}_{\text{sur } \mathbb{R}[X]}}$$

2. Il s'agit des racines n^{e} de l'unité. /1

$$\boxed{\text{L'ensemble des racines (sur } \mathbb{C}\text{) du polynôme } R_n = X^n - 1 \text{ est } \{e^{2ik\pi/n}, k \in [\![0, n-1]\!]\}}$$

3. Soit $r = \dfrac{p}{q}$, une fraction irréductible.
$\xi_r = e^{2i\pi r}$ est une racine n^{e}de l'unité si et seulement si $\xi^n = 1$
si et seulement si $\dfrac{np}{q} \in \mathbb{Z}$ i.e. $q|np$
Puis, comme la fraction est irréductible, $p \wedge q = 1$, donc d'après le lemme de Gauss : /1

$$\boxed{\xi_r = e^{2i\pi r} \text{ est une racine } n^{\text{e}}\text{de l'unité si et seulement si } q|n}$$

On dit que ξ_r est une racine primitive n^{e} de l'unité si $q = n$

4. Il y a 6 racines de l'unité : /1

1	racine primitive 1ere	$e^{i\pi/3}$ $(k=1)$	racine primitive 6eme	$e^{2i\pi/3}$ $(k=2)$	racine primitive 3eme
-1	racine primitive 2eme	$e^{4i\pi/3}$ $(k=4)$	racine primitive 3eme	$e^{5i\pi/3}$ $(k=5)$	racine primitive 6eme

5. On note $\Phi_n = \displaystyle\prod_{\xi \in \mathfrak{P}_n} (X - \xi)$, où $\mathfrak{P}_n$ est l'ensemble des racines n^{e}primitive de l'unité.
Si ξ est une racine n^{e} primitive de l'unité, alors c'est une racine de R_n.
Donc toutes les racines de Φ_n, sont des racines de R_n.
Par ailleurs, ce sont des racines simples, /1

$$\boxed{\text{donc } \Phi_n | R_n}.$$

6. Clairement, $\Phi_1 = X - 1$, puis comme -1 est la seule racine primitive 2^{e} de l'unité, $\Phi_2 = X + 1$.
De même j et j^2 sont les seules racines primitives 3^{e} de l'unité, donc $\Phi_3 = (X-j)(X-j^2) = X^2 + X + 1$.
Enfin, avec le tableau vue en question 4, $\Phi_6 = (X - e^{i\pi/3})(X - e^{5i\pi/3}) = X^2 - 2\cos\frac{\pi}{3}X + 1 = X^2 - X + 1$.
Bilan /1,5

$$\boxed{\Phi_1 = X - 1 \qquad \Phi_2 = X + 1 \qquad \Phi_3 = (X-j)(X-j^2) = X^2 + X + 1 \qquad \Phi_6 = X^2 - X + 1}$$

7. Soient $n, m \in \mathbb{N}$.

Piste de recherche...
On peut chercher à résoudre cet première partie de question par algorithme d'Euclide, mais cela n'est pas très efficace. Nous allons chercher les racines communes, tout simplement

Soit D, irréductible tel que $D|\Phi_n$ et $D|\Phi_m$.
$\Phi_n \wedge \Phi_m$ est alors le produit de tels polynômes D
Or si D n'est pas constant, $D = X - a$ (sur $\mathbb{C}$)
et donc a est racine de Φ_n et a racine de Φ_m.
Donc a est à la fois une racine primitive de n^{e} et m^{e} de l'unité.
C'est impossible si $n \neq m$: a n'admet qu'une écriture irréductible. */1*

$$\boxed{\text{Si } n \neq m,\ \Phi_n \wedge \Phi_m = 1.}$$

Piste de recherche...

Cette fois-ci, il est possible de faire la démonstration avec l'algorithme d'Euclide (d'ailleurs on l'a fait en cours).
Mais nous allons continuer avec un raisonnement sur les racines communes à R_n et R_m.

Soit D, irréductible tel que $D|R_n$ et $D|R_m$.
$R_n \wedge R_m$ est alors le produit de tels polynômes D
Or si D n'est pas constant, $D = X - a$ (sur $\mathbb{C}$)
et donc a est racine de R_n et a racine de R_m.
Donc a est à la fois une racine n^{e} et m^{e} de l'unité.
On a donc $a^n = 1$ et $a^m = 1$.
D'après le théorème de Bézout, on peut considérer $u, v \in \mathbb{Z}$ tel que $n \wedge m = un + vm$.

$$a^{n\wedge m} = a^{un+vm} = (a^{n})^{u} \times (a^m)^v = 1 \times 1 = 1$$

donc a est une racine $n \wedge m$ de l'unité.
Ainsi $R_n \wedge R_m | R_{n\wedge m}$. */1,5*
Réciproquement , si a est racine $n \wedge m$ de l'unité ;
comme il existe n_1, $m_1 \in \mathbb{Z}$ tels que $n = n_1 \times (n \wedge m)$ et $m = m_1 \times (n \wedge m)$,
alors $a^n = (a^{n\wedge m})^{n_1} = 1$ et $a^m = (a^{n\wedge m})^{m_1} = 1$.
Donc a est racine n^{e} et m^{e} de l'unité. */1*
Ainsi $R_{n\wedge m}|R_n$ et $R_{n\wedge m}|R_m$, donc $R_{n\wedge m}|(R_n \wedge R_m)$

$$\boxed{R_n \wedge R_m = R_{n\wedge m}}$$

8. Commençons par noter que les racines de R_n et de Φ_d sont des racines simples. */0,5*
Soit z une racine n^{e} de l'unité, alors z est de la forme $e^{2i\pi r}$ avec $r|n$.
Donc il existe $r|n$ tel que z est une racine r^{e}primitive. */1*
Ainsi $R_n | \displaystyle\prod_{r, r|n} \Phi_r$.
Réciproquement, toutes les racines de Φ_r sont des racines n^{e}dès que $r|n$. */1*

$$\boxed{\text{Bilan : } R_n = \prod_{d|n} \Phi_d.}$$

On a donc, puisque les diviseurs de 6 sont 1, 2, 3 et 6 : */1*

$$\boxed{R_6 = \Phi_1 \times \Phi_2 \times \Phi_3 \times \Phi_6 = (X-1)(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)}$$

Remarques !

Avec cette dernière formule, on montre par récurrence, que Φ_n est un polynôme à coefficients entiers. La plupart du temps ces coefficients sont dans $\{-1, 0, 1\}$, mais ce n'est pas nécessairement le cas (ce n'est pas le cas de Φ_{105}).
Ces polynômes Φ_n sont appelés les polynômes cyclotomique (comme « division du cercle ») et comme souvent, ils ont d'abord été étudiés par Gauss.
C'est à cette occasion, qu'il a démontré le résultat de Gauss démontré en fin du dernier DM

Problème

A. Quelques sommes classiques

Piste de recherche. . .
Pour ces beaucoup de questions ici, on fait les calculs comme cela est demandé. . .quitte à commencer par la droite !

1. Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, et $f_1, f_2 \in F$,

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \Delta(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) &= (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x+1) - (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x)\\ &= \lambda_1 f_1(x+1) + \lambda_2 f_2(x+1) - \lambda_1 f_1(x) - \lambda_2 f_2(x)\\ &= \lambda_1(f_1(x+1) - f-1(x)) + \lambda_2(f_2(x+1) - f_2(x))\\ &= (\lambda_1\Delta(f_1) + \lambda_2\Delta(f_2))(x)\end{aligned}$$

De même pour ∇. /1

$$\boxed{\Delta \text{ et } \nabla \text{ sont des applications linéaires.}}$$

2. Soient f et g deux applications de F.

$$\begin{aligned}(\nabla(f\times g))(x) = f(x)g(x) - f(x-1)g(x-1) &= f(x)g(x) - f(x-1)g(x) + f(x-1)g(x) - f(x-1)g(x-1)\\ &= \nabla(f)(x)g(x) + f(x-1)\nabla(g)(x)\end{aligned}$$

Et selon le même principe :

$$\begin{aligned}(\Delta(f\times g))(x) = f(x+1)g(x+1) - f(x)g(x) &= f(x+1)g(x+1) - f(x+1)g(x) + f(x+1)g(x) - f(x)g(x)\\ &= f(x+1)\Delta(g)(x) + \Delta(f)(x)g(x)\end{aligned}$$

/1,5

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Donc pour tout } x\in\mathbb{R},\ (\nabla(f\times g))(x) = (\nabla f)(x)\times g(x) + f(x-1)\times(\nabla g)(x)\\ \text{et } (\Delta(f\times g))(x) = (\Delta f)(x)\times g(x) + f(x+1)\times(\Delta g)(x)\end{array}}$$

Remarques !
Là comme à la question précédente, on aurait pu utiliser le fait que $\Delta f(x) = \nabla f(x-1)$. C'est pourquoi nous avons des résultats semblables entre les deux opérateurs.

3. Il s'agit simplement d'un télescopage, on peut faire aussi une récurrence sur $p \geqslant n$. Enfin on peut utiliser un invariant de boucle.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons, pour tout $p \geqslant n$, $S_p = \left(\sum_{k=n}^{p} (\Delta f)(k)\right) - f(p+1)$. Alors

$$S_{p+1} - S_p = \Delta f(p+1) - f(p+2) - (-f(p+1)) = 0$$

Donc S_p est constante, égale à $S_n = \Delta f(n) - f(n+1) = f(n+1) - f(n) - f(n+1) = -f(n)$. /1,5

$$\boxed{\text{Ains pour tout } p \geqslant n,\ \sum_{k=n}^{p} (\Delta f)(k) = S_p + f(p+1) = f(p+1) - f(n)}$$

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Delta(h)(x) = c^{x+1} - c^x = c^x(c-1) = (c-1)h(x)$.
Par linéarité de Δ, on a donc $\Delta(\frac{1}{c-1}h) = h$ $(c \neq 1)$. /1

$$\boxed{\text{Avec } h_1 = \tfrac{1}{c-1}h, \text{ on a donc } \Delta h_1 = h}$$

Puis, d'après la question précédente :

$$\sum_{k=n}^{p} c^k = \sum_{k=n}^{p} h(k) = \sum_{k=n}^{p} \Delta(h_1)(k) = h_1(p+1) - h_1(n) = \frac{1}{c-1}(c^{p+1} - c^n)$$

/1,5

$$\boxed{\text{Donc } \sum_{k=n}^{p} c^k = \frac{c^{p+1} - c^n}{c-1}}$$

Remarques !

C'est le résultat bien connu sur la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique. Mais ici, on n'attendait pas une exploitation directe de ce résultat. De toute façon, il faudra élargir (=généraliser) cette méthode à d'autres résultats...

5. D'après la question 3. appliquée à $f \times g$, puis d'après la question 2 :

$$fg(p+1)-fg(n) = \sum_{k=n}^{p} \Delta(fg)(k) = \sum_{k=n}^{p} \Delta(gf)(k) = \sum_{k=n}^{p} ((\Delta g)(k)f(k) + g(k+1)(\Delta f)(k))$$

Par opérations algébriques bien connues : /1,5

$$\boxed{\sum_{k=n}^{p} f(k)\,(\Delta g)\,(k) = (fg)(p+1) - (fg)(n) - \sum_{k=n}^{p} g(k+1)\,(\Delta f)\,(k)}$$

Remarques !

Pour celui qui à l'oeil, cette formule est une sorte d'intégration par parties. La somme joue le rôle de l'intégrale et la fonction Δ, cela de la dérivation de f.

6. On applique directement la formule précédente, avec $g = h_1$, donc $\Delta g = h$ et $f : x \mapsto x$,

$$\sum_{k=n}^{p} kc^k = \sum_{k=n}^{p} f(k)\Delta(h_1)(k) = (fh_1)(p+1) - (fh_1)(n) - \sum_{k=n}^{p} h_1(k+1)(\Delta f)(k)$$

Or $\Delta f(k) = f(k+1) - f(k) = k+1-k = 1$.

$$\sum_{k=n}^{p} kc^k = \frac{(p+1)c^{p+1} - nc^n}{c-1} - \sum_{k=n}^{p} \frac{1}{c-1}c^{k+1} = \frac{(p+1)c^{p+1} - nc^n}{c-1} - \frac{c}{c-1}\sum_{k=n}^{p} c^k$$

$$= \frac{(p+1)c^{p+1} - nc^n}{c-1} - \frac{c}{c-1}\frac{c^{p+1} - c^n}{c-1} = \frac{(p+1)(c^{p+1} - c^p) - n(c^{n+1} - c^n) + c^{p+2} - c^{n+1}}{(c-1)^2}$$

Donc /2

$$\boxed{\sum_{k=n}^{p} kc^k = \frac{(p+2)c^{p+1} - (p+1)c^p + nc^n - (n+1)c^{n+1}}{(c-1)^2}}$$

Remarques !

Comment vérifier que la formule obtenue est juste ?
On peut prendre un cas particulier et calculer à la main...

B. Polynômes factoriels

Pour tout entier naturel n, on note E_n l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.
On pose $F_0 = 1$ et pour tout entier k, $F_k = X(X-1)\cdots(X-k+1)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \geqslant n$, $\deg F_k = k$.
Donc la famille $(F_0, F_1, \ldots F_n)$ est une famille de polynômes de degré échelonnée.
Il s'agit donc d'une famille libre de E_n.
Par ailleurs, elle est composée de $n+1 = \dim(E_n)$ vecteurs, /1

$$\boxed{\text{donc } (F_0, F_1, \ldots F_n) \text{ est une base de } E_n.}$$

2. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
On commence par noter que Δ est définie sur F et non sur E_n.
Mais si $P \in E_n$ alors $\tilde{P} : x \mapsto P(x)$ est une fonction polynomiale de F et $\Delta\tilde{P}$ a du sens et a pour image une fonction polynomiale également, de degré inférieur ou égale à celui de P. /1

$$\boxed{\text{Donc on peut sans difficulté élargir la définition de } \Delta : \text{de } F \text{ à } E_n}$$

Puis, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Delta(F_n)(x) = F_n(x+1) - F_n(x) = (x+1)x(x-1)\cdots(x-n+2) - x(x-1)\cdots(x-n+1)$$
$$= x(x-1)\cdots(x-n+2)[(x+1)-(x-n+1)]$$
$$= x(x-1)\cdots(x-n+2)k = nF_{n-1}(x)$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\Delta(F_n) - nF_{n-1})(x) = 0$, le polynôme $\Delta(F_n) - nF_{n-1}$ admet une infinité de racines, il est nul. */1*

$$\boxed{\text{Et donc on peut écrire } \Delta F_n = nF_{n-1}}$$

3. On a tout simplement grâce à la linéarité de Δ : */1*

$$\Delta^3(F_5) = \Delta^2(\Delta(F_5)) = \Delta^2(5F_4) = 5\Delta^2(F_4) = 5\Delta(\Delta(F_4)) = 5 \times 4\Delta(F_3)$$

$$\boxed{\Delta^3(F_5) = 60F_2}$$

Soit $m \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence sur $h \leqslant m$, $\quad \mathcal{H}_h$: « $\Delta^h(F_m) = \dfrac{m!}{(m-h)!}F_{m-h}$ ».

— $\Delta^0(F_m) = \mathrm{id}(F_m) = F_m = \dfrac{m!}{m!}F_{m-0}$, donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.
— Soit $h < m$. Supposons que $\mathcal{H}_h$ est vérifiée.
On a donc, d'après $\mathcal{H}_h$, et par linéarité :

$$\Delta^{h+1}(F_m) = (\Delta \circ \Delta^h)(F_m) = \Delta\left(\frac{m!}{(m-h)!}F_{m-h}\right) = \frac{m!}{(m-h)!}\Delta(F_{m-h})$$
$$= \frac{m!}{(m-h)!}(m-h)F_{m-h-1} = \frac{m!}{(m-(h+1))!}F_{m-(h+1)}$$

Donc $\mathcal{H}_{h+1}$ est vraie.

On a donc montrer par récurrence que pour $h \leqslant m$, $\Delta^h(F_m) = \dfrac{m!}{(m-h)!}F_{m-h}$.

Ainsi $\Delta^m(F_m) = m!F_0$ et donc c'est un polynôme constant, les Δ-dérivation suivante seront toutes nulles. */2*

$$\boxed{\text{Par conséquent, } \Delta^h(F_m) = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-h)!}F_{m-h} & \text{si} \quad h \leqslant m \\ 0 & \text{si} \quad h > m \end{cases}}$$

4. $X^3 = X(X-1)(X-2) + 3X^2 - 2X = X(X-1)(X-2) + 3X(X-1) + X = F_3 + 3F_2 + F_1$
Par conséquent, et par linéarité : */1*

$$\boxed{\Delta(X^3) = \Delta(F_3) + 3\Delta(F_2) + \Delta(F_1) = 3F_2 + 6F_1 + F_0}$$

Remarques !
On peut vérifier :
$\Delta(X^3) = (X+1)^3 - X^3 = X^3 + 3X^2 + 3X + 1 - X^3 = 3X^2 + 3X + 1 = 3X(X-1) + 6X + 1\ldots$

On a donc, d'après l'écriture sous forme factorielle : */2*

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{k=0}^{n}(F_3 + 3F_2 + F_1)(k) = \sum_{k=0}^{n}\Delta(\frac{1}{4}F_4 + \frac{3}{3}F_3 + \frac{1}{2}F_2)(k)$$
$$= \left(\frac{1}{4}F_4 + F_3 + \frac{1}{2}F_2\right)(n+1) - \left(\frac{1}{4}F_4 + F_3 + \frac{1}{2}F_2\right)(0)$$
$$= \frac{1}{4}\left((n+1)n(n-1)(n-2) + 4(n+1)n(n-1) + 2(n+1)n\right) = \frac{(n+1)n}{4}\left(n^2 - 3n + 2 + 4n - 4 + 2\right)$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{(n+1)^2n^2}{4}}$$

C. Schéma de Hörner

On considère un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, de degré n ($a_n \neq 0$).

Soit z un réel, on cherche à évaluer le plus rapidement possible $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$

1. De façon naïf pour calculer z^k, il faut $k-1$ multiplication : une pour passer de z^i à z^{i+1}, et on faut cela pour i de 1 à $k-1$.
   Enfin, il faut une dernière multiplication pour calculer $a_k z^k$. /1

   Donc pour calculer $a_k z^k$ de manière naïve, il y a k multiplication à opérer

   Pour calculer chacun des $n+1$ termes $a_k z^k$, il faut donc /1

   $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ multiplications et $n-1$ additions pour évaluer $P(z)$ par la méthode naïve.

2. Programmes.
   (a) Le programme complété est le suivant : /0,5

```python
def Puissance (z,n):
    """
    Evalue la valeur z^n
    """
    Puiss=1
    for i in range(n) :
          Puiss=Puiss*z
    return(Puiss)
```

   (b) Le programme complété est le suivant : /0,5

```python
def PdeZ(P,z):
    """
    Evalue la valeur de P(z)
    """
    deg=len(P)
    res=0
    for k in range(deg) :
          res=res+P[k]*Puissance(z,k)
    return(res)
```

3. (a) On note $Q = \sum_{i=1}^{n} b_i X^{i-1}$.

$$Q \times (X - z) = \sum_{i=1}^{n} b_i X^{i-1}(X - z) = \sum_{i=1}^{n} (b_i X^i - z b_i X^{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} b_i X^i - \sum_{i=1}^{n} z b_i X^{i-1}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} b_i X^i - \sum_{i=0}^{n-1} z b_{i+1} X^i = b_n X^n + \sum_{i=1}^{n-1} (b_i - z b_{i+1}) X^i - z b_1 X^0$$

Or $b_n = a_n$, pour tout $i \in \mathbb{N}_{n-1}$, $b_i - z b_{i+1} = a_i$ et enfin $z b_1 = b_0 - a_0$, donc

$$Q \times (X - z) = a_n X^n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i X^i + a_0 - b_0 = P - b_0$$

/1,5

On a donc $P = Q(X - z) + b_0$. En substituant z à X, on a $P(z) = 0 + b_0 = b_0$.

Cette méthode pour calculer $P(z)$ s'appelle le schéma de Hörner

(b) Un programme pourrait être le suivant : /1

```python
def Horner(P,z):
    """
    Evalue la valeur de P(z), par le schéma de Hörner
    """
    deg=len(P)
    b=P[deg-1]
    for k in range(1,deg) :
          b=P[deg-k-1]+z*b
    return(b)
```

(c) Au coeur de la boucle, il y a une addition et un produit.
Et il y a $n-1 = \deg(P)$ boucles. Le reste des opérations ne sont que des affectations, sans coût mesuré. Il faut donc /0,5

$$\boxed{n-1 \text{ multiplications et } n-1 \text{ additions pour évaluer } P(z) \text{ par la méthode de Hörner}}$$

(d) On applique directement les calculs, on trouve : /1

$$\boxed{b_5 = 3,\ b_4 = -1,\ b_3 = -8,\ b_2 = -1,\ b_1 = -12, \text{ et } b_0 = P(2) = -10}$$

4. L'application répétée du schéma de HÖRNER permet également de calculer les dérivées successives et le polynôme de TAYLOR.

(a) On considère le polynôme P_0 de la question 3.(d).

Par définition de l'algorithme, $P_1 = Q = \displaystyle\sum_{j=1}^{5} b_{0,j}X^{j-1}$.

On a donc d'après les calculs précédents : $P_1 = 3X^4 - X^3 - 8X^2 - X - 12$ et le reste vaut $P_0(2) = -10$.
On applique l'algorithme de HÖRNER à P_1, on trouve $P_2 = 3X^3 + 5X^2 + 2X + 3$ et reste $P_1(2) = -6$.
On applique l'algorithme de HÖRNER à P_2, on trouve $P_3 = 3X^2 + 11X + 24$ et reste $P_2(2) = 51$.
On applique l'algorithme de HÖRNER à P_3, on trouve $P_4 = 3X+17$ et reste $P_3(2) = 58$.
On applique l'algorithme de HÖRNER à P_1, on trouve $P_5 = 3$ et reste $P_4(2) = 23$. /2

Remarques !

On notera que l'algorithme peut se présenter dans un tableau, selon la méthode de RUFFINI *(d'ailleurs, cette méthode s'appelle ailleurs l'algorithme de* HÖRNER-RUFFINI*).*
Chaque case en ligne i et colonne j possède le nombre $b_{i-1,j-1}$ et il s'obtient en faisant le calcul $b_{i,j} = zb_{i,j+1} + b_{i-1,j+1} = 2b_{i,j+1} + b_{i-1,j+1}$ (ici $z = 2$).
Le tableau se remplit donc facilement de droite à gauche et de bas en haut (3 calculs sont expliqués) :

	reste	X^0	X^1	X^2	X^3	X^4	X^5
P_0		14	-10	15	-6	-7	3
P_1	-10	-12	-1	-8	$-1 = (2\times 3 + (-7))$	$3(=3)$	
P_2	-6	3	2	5	3		
P_3	51	$24(= 2\times 11 + 2)$	11	3			
P_4	58	17	3				
P_5	23	3					
P_6	3						

(b) On a donc obtenu

$$P_0 = P_1(X-2)+b_{0,0} = \big(P_2(X-2)+b_{1,0}\big)(X-2)+b_{0,0} = P_2\times(X-2)^2+b_{1,0}(X-2)+b_{0,0}$$

$$= \cdots = b_{5,0}(X-2)^5 + b_{4,0}(X-2)^4 + b_{3,0}(X-2)^3 + b_{2,0}(X-2)^2 + b_{1,0}(X-2) + b_{0,0}$$

/1,5

$$\boxed{\text{On a donc } P(X) = 3(X-2)^5 + 23(X-2)^4 + 58(X-2)^3 + 51(X-2)^2 - 6(X-2) - 10}$$

(c) L'algorithme de *Hörner* nous a donné la décomposition selon la base des $(X-2)^k$.

Or cette base est aussi celle de la décomposition de Taylor : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{5} \frac{P^{(k)}(2)}{k!}(X-2)^k$.

Comme il s'agit d'une base, la décomposition est unique, et il est permis de faire une identification, on a donc /2

$$\boxed{\begin{array}{ccc} P^{(5)}(2) = 3\times 5! = 360, & P^{(4)}(2) = 23\times 4! = 552, & P^{(3)}(2) = 58\times 3! = 348, \\ P^{(2)}(2) = 51\times 2! = 102, & P^{(1)}(2) = -6\times 1! = -6, & P^{(0)}(2) = -10 \end{array}}$$

Remarques !

De tels calculs méritent une vérification... Mais on ne va pas tout reprendre, on va juste calculer $P^{(3)}(2)$, il y aurait eu plus d'occasion de se tromper (et cela se serait répartis).
Or (on ne calcule que les gros coefficients de P_0, i.e X^k avec $k \geqslant 3$)pour les $P^{(3)}(X) = 180X^2 - 168X - 36$ et donc $P^{(3)}(2) = 720 - 336 - 36 = 348$. YES ! !

(d) D'après l'exemple précédent, la valeur de $P^{(k)}(z)$ est obtenu en calculant le terme

$$k! \times b_{k,0}$$

Et pour obtenir le nombre $b_{k,0}$, on applique $k+1$ fois l'algorithme de HÖRNER, mais il faut garder en mémoire le résultat polynomiale (les P_i). Ils seront codé sous forme de liste. Cela donne le programme suivant (par exemple) : */1,5*

```python
def Horner_Taylor(P,z,k):
    """
    Evalue la valeur de P^(k)(z), par le schéma de Hörner
    """
    T=P
    fac=1
    for i in range(k+1):
        fac=fac*(i+1)
        Q=T
        deg=len(Q)
        b=0
        T=[]
        for j in range(deg) :
            b=Q[deg-j-1]+z*b
            T=[b]+T
        r=T[k]
    return(r*fac/(k+1))
```

D. Polynômes d'interpolation

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient $a < b$, deux réels et α_1, α_2,...α_{n+1}, $n+1$ réels deux à deux distincts de l'intervalle $[a,b]$.
On note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et on note $Q_0 = 1$ et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$Q_i = \prod_{k=1}^{i} (X - \alpha_k)$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $i \geqslant n$, $\deg Q_i = i$.
   Donc la famille $(Q_0, Q_1, \dots Q_n)$ est une famille de polynômes de degré échelonnée.
   Il s'agit donc d'une famille libre de E_n.
   Par ailleurs, elle est composée de $n+1 = \dim(E_n)$ vecteurs, */1*

   $$\boxed{\text{donc } (Q_0, Q_1, \dots Q_n) \text{ est une base de } E_n.}$$

Remarques !
Tellement classique, que c'est la deuxième fois qu'on nous pose la question

2. Soit $P \in E_n$. On note $(\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_n)$ les coordonnées de P dans la base $(Q_0, Q_1, \dots Q_n)$.
   Donc $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i Q_i$. Soit $j \in [\![0,n]\!]$, et $i \in [\![1,n+1]\!]$,

   $$Q_j(\alpha_i) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \leqslant j \\ \prod_{k=1}^{j}(\alpha_i - \alpha_k) & \text{si} \quad i > j \end{cases}$$

   $(\lambda_0, \lambda_1, \dots \lambda_n)$ est donc solution su système d'équations linéaires triangulaire */1,5*

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lllllll} \lambda_0 & & & & & = & P(\alpha_1) \\ \lambda_0 & +(\alpha_2-\alpha_1)\lambda_1 & & & & = & P(\alpha_2) \\ \lambda_0 & +(\alpha_3-\alpha_1)\lambda_1 & +(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)\lambda_2 & & & = & P(\alpha_3) \\ \vdots & & & \ddots & & = & \vdots \\ \lambda_0 & +(\alpha_{n+1}-\alpha_1)\lambda_1 & +(\alpha_{n+1}-\alpha_1)(\alpha_{n+1}-\alpha_2)\lambda_2 & \cdots & +(\alpha_{n+1}-\alpha_1)\cdots(\alpha_{n+1}-\alpha_n)\lambda_n & = & P(\alpha_3) \end{array}\right.}$$

3. On se place dans le cas particulier de $n = 3$, $a = 0$, $b = 5$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 3$ et $\alpha_4 = 4$.
On cherche à trouver les λ_i tels que
$$R_0 = 1 - \frac{3}{2}X + \frac{9}{4}X^2 - \frac{1}{4}X^3 = \lambda_0 + \lambda_1 X + \lambda_2 X(X-2) + \lambda_3 X(X-2)(X-3)$$
En développant et identifiant, on trouve *$/1$*
$$\boxed{\lambda_3 = \frac{-1}{4},\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_1 = 2,\ ,\lambda_0 = 1}$$

4. Soit f une fonction définie sur $[a, b]$.

Remarques !
On peut exploiter le polynôme d'interpolation de Lagrange, au moins pou répondre à la première question (existence), mais cela ne donne pars l'écriture sur la base des Q_i. Nous allons donc procéder autrement, par inversion du système.

Il s'agit donc de trouver P, définie par $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i Q_i$ et donc le système précédent, mais avec un second membre de la forme $(f(\alpha_i))_i$.
Ce système est triangulaire supérieure, avec sur la diagonale des coefficients non nuls, il est donc inversible.
Il admet donc une unique solution, quelle que soit f. *$/1{,}5$*

$\boxed{\text{pour tout fonction } f, \text{ il existe un unique polynôme } P_n \text{ de } E_n \text{ qui coïncide avec } f \text{ en tout } \alpha_i}$

Les premiers calculs montrent qu'il faut prendre :
— $\lambda_0 = f(\alpha_1)$
— $\lambda_1 = \dfrac{f(\alpha_2) - f(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha 1}$
— ...

En fait, on définie par récurrence (sur le nombre d'éléments du crochet) les différences divisées :
— $[f(\alpha_k)] = f(\alpha_k)$
— $[f(\alpha_k), f(\alpha_{k+1})] = \dfrac{f(\alpha_{k+1}) - f(\alpha_k)}{\alpha_{k+1} - \alpha_k}$
— $(\dots)$ puis $[f(\alpha_k), f(\alpha_{k+1}, \dots f(\alpha_{k+h})] = \dfrac{[f(\alpha_{k+1}), \dots f(\alpha_{k+h})] - [f(\alpha_k, \dots f(\alpha_{k+h-1})]}{\alpha_{k+h} - \alpha_k}$.

On a alors : *$/2$*
$$\boxed{P_n = \sum_{k=0}^{n} [f(\alpha_0), \dots f(\alpha_k)] Q_k}$$

Remarques !
La démonstration n'est pas aisé, et plutôt technique. Mais elle se fait !!

5. Etude de la validité de l'approximation de f. On suppose, de plus, f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
   (a) Comme $x \in [a, b]$ est distincts des α_i, alors le nombre $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n+1}) \neq 0$.
   On peut donc choisir *$/1$*
$$\boxed{A_x = \frac{P_n(x) - f(x)}{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{n+1})},\ \text{on a alors } \varphi_{A_x}(x) = 0}$$
   (b) On sait que $\varphi(x) = 0$ et pour tout α_i, $\varphi(\alpha_i) = f(\alpha_i) - P_n(\alpha_i) - 0 = 0$.
   Donc φ admet $n + 2$ racines distinctes.
   Montrons alors par récurrence que pour tout $h \in \mathbb{N}$, $h \leqslant n + 2$,
   $\mathcal{P}_h$: « $\varphi^{(h)}$ admet $n + 2 - h$ racines distinctes dans $[a, b]$ ». *$/1{,}5$*
   — $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   — Soit $h \in \mathbb{N}$, $h \leqslant n + 1$. Supposons que $\mathcal{P}_h$ est vraie et montrons $\mathcal{P}_{h+1}$.
   $f^{(h)}$ admet $n + 2 - h$ racines distinctes sur $[a, b]$, on peut les appeler x_i, avec $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+2-h}$.
   Or entre deux racines x_i, x_{i+1} de $f^{(h)}$, le théorème de Rolle affirme qu'il existe au moins une racine y_i de $(f^{(h)})' = f^{(h+1)}$.
   $f^{(h+1)}$ a donc $n + 1 - h$ racines y_j, elles vérifient :
   $$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots y_{n+1-h} < x_{n+2-h}.$$
   Ces racines sont nécessairement distinctes et $\mathcal{P}_{h+1}$ est vérifiée.

La récurrence est démontrée, on trouve alors pour $h = n+1$:
$f^{(n+1)}$ admet une racine dans $[a, b]$.
Or $\deg(P_n) = n$, donc $P_n^{(n+1)} = 0$.
De même $(X - \alpha_1)\dots(X - \alpha_{n+1})$ a pour terme dominant $1 \times X^{n+1}$,
donc la dérivée $(n+1)^{\text{e}}$ de ce polynôme vaut $(n+1)!$.
Enfin, par linéarité de $(n+1)^{\text{e}}$ dérivation, on trouve $\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - (n+1)!A$.
Nous savons que cette fonction admet une racine η, et donc /1

$$\boxed{\text{il existe } \eta \in [a, b] \text{ tel que } A_x = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta)}$$

(c) On a alors $\varphi(x) = 0$ et donc $f(x) - P_n(x) = \dfrac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta)(x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_{n+1})$.
En prenant la valeur absolue :

$$\forall\, x \in [a, b], \exists\, \eta \in [a, b] \text{tel que } |f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(\eta)||x - \alpha_1|\cdots|x - \alpha_{n+1}|$$

Or pour tout $x \in [a, b]$ et tout $i \in \mathbb{N}_{n+1}$, $|x - \alpha_i| \leqslant |b - a|$ (car $\alpha_i \in [a, b]$, également). /1,5

$$\boxed{\text{Donc pour tout } x \in [a, b],\ |f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sup\nolimits_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)| \times (b - a)^{n+1}}$$

(d) Toujours avec les mêmes notations, le calcul donne, pour tout $x \in [a, b]$, $x \neq \alpha_1$

$$\frac{f(x) - f(\alpha_1)}{x - \alpha_1} - \frac{P_n(x) - P_n(\alpha_1)}{x - \alpha_1} = \frac{f(x) - P_n(x)}{x - \alpha_1} = A_x(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)\cdots(x - \alpha_{n+1})$$

car, en effet, $f(\alpha_1) = P_n(\alpha_1)$.
En prenant la valeur absolue, on trouve :

$$\left| \frac{f(x) - f(\alpha_1)}{x - \alpha_1} - \frac{P_n(x) - P_n(\alpha_1)}{x - \alpha_1} \right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)||x - \alpha_2|\cdots|x - \alpha_{n+1}|$$

On peut alors passer à la limite : $x \to \alpha_1$, par continuité de la fonction valeur absolue : /2

$$\boxed{|f'(\alpha_1) - P_n(\alpha_1)| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,b]} |f^{(n+1)}(t)||\alpha_1 - \alpha_2|\cdots|\alpha_1 - \alpha_{n+1}|}$$