

# Fonctions polynomiales et racines

 **Résumé -**

*Au chapitre précédent nous nous sommes centrés sur le développement, l'opération inverse s'appelle la factorisation.*

*Ce chapitre se concentre autour d'un résultat simple mais essentiel : si  $P(a) = 0$ , alors  $P$  est factorisable par  $(X - a)$ , déjà entrevu dans le premier chapitre de l'année.*

*Pour pouvoir écrire cela, il faut d'abord justifier ce que signifie  $P(a)$  ou faire  $X = a$  (pour  $a \in \mathbb{K}$ ). On définit alors ce qu'est une racine d'un polynôme, une racine d'ordre multiple. On généralise alors les relations de Viète qui lient les coefficients d'un polynôme à ses racines.*

*Enfin, on se concentre sur le polynôme d'interpolation de Lagrange. Il est la réponse au problème : trouver le polynôme le plus simple (=petit en degré) qui passe par une série de points donnés.*

*Dans ce chapitre, les résultats d'analyse classique sur  $\mathbb{R}$  (théorème des valeurs intermédiaires, théorème de Rolle...) seront fréquemment mobilisés à cause de la « bijection naturelle » entre l'ensemble des polynômes et l'ensemble des fonctions polynomiales.*

**Sommaire**

---

<b>1. Problèmes</b>	<b>426</b>
<b>2. Fonctions polynomiales et racines</b>	<b>427</b>
2.1. Fonctions polynomiales	427
2.2. Racines d'un polynôme	427
2.3. Nombres maximales de racines et degré de $P$	428
<b>3. Interpolation de Lagrange</b>	<b>430</b>
3.1. Présentation du problème et polynômes de Lagrange	430
3.2. Interpolation (de Lagrange)	430
<b>4. Racines multiples et formule de Taylor</b>	<b>431</b>
4.1. Formules de Taylor (polynômiale)	431
4.2. Multiplicité d'une racine	432
<b>5. Relations coefficients-racines</b>	<b>433</b>
5.1. Polynôme scindé	433
5.2. Fonctions symétriques élémentaires	433
5.3. Applications	435
<b>6. Théorème fondamental de l'algèbre</b>	<b>436</b>
<b>7. Bilan</b>	<b>436</b>

---

## 1. Problèmes

### ? Problème 104 - Egalité de polynômes

Si  $X$  est une « variable » qui ne signifie rien, si ce n'est la règle opératoire, que veut dire que deux polynômes sont égaux.

Par exemple  $X^2 - 1$  et  $(X - 1) \times (X + 1)$  sont-ils égaux? Pourquoi?

### ? Problème 105 - Egalité de polynômes et racines

Si l'on prolonge le problème précédent, à quelle condition deux polynômes  $P$  et  $Q$  sont égaux, si ils vérifient

$$P(a_k) = Q(a_k) \quad \forall k \in \mathbb{N}_p$$

Est-ce que cela dépend de  $p$  (plus il y a de conditions, plus il y a de « chances » (ou nécessité) que  $P = Q$ )?

Est-ce que cela dépend du corps  $\mathbb{K}$  sur lequel on travaille?

(Exemple :  $X^p - X$  s'annule en tous les nombres de  $\frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$  et pourtant ce n'est pas le polynôme nul...)

### ? Problème 106 - Expérience et expression polynomiale

On réalise  $p$  expériences qui donne en des points  $x_1, \dots, x_p$  des valeurs  $y_1, \dots, y_p$  respectivement.

Est-il possible de donner une expression simple (polynomiale, de degré minimal), unique (?) qui lie  $y_i$  à  $x_i$ , pour tout  $i \in \mathbb{N}_p$ ?

### ? Problème 107 - Nombre de racines

On a vu en début d'année (pour  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) ou dans un DS (pour  $\mathbb{K} = \frac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}}$ ) qu'un polynôme de degré  $p$  ne peut admettre plus de  $p$  racines. Est-il possible qu'il en admette exactement  $p$ , à tous les coups (ce qui donne un théorème simple)?

On sait que  $(X - 1)^6$  n'admet qu'une racine : 1. Est-il possible d'élargir la notion de racines pour que le théorème précédent soit juste. Ici, il faudrait dire que 1 est 6 fois racines...

### ? Problème 108 - Construction de $\mathbb{K}[X, Y, Z, \dots]$

On peut rencontrer des opérations polynomiales de plusieurs variables : dans un calcul algébriques, deux nombres peuvent être à étudier en particulier comme variables, les autres étant des paramètres. Avec la formule des « petits Bernoullis » :

$$b^n - a^n = (b - a) \left( \sum_{k=0}^{n-1} b^k a^{n-1-k} \right)$$

Comment construire les polynômes de plusieurs variables  $Y^n - X^n$ ?

Est-ce que si  $\forall P \in \mathbb{K}[X, Y] : \forall a \in \mathbb{K}, P(a, a) = 0 \implies P = (X - Y)Q$ ?

### ? Problème 109 - Développement de $\prod_{k=1}^n (X - x_k)$

Lorsqu'on développe ce polynôme, on trouve une expression du type

$$P = \sum_{i=0}^n a_i X^i.$$

Quel est le lien entre ces nombres  $a_i$  et les  $x_k$  ?

Le développement de petite valeur (et le théorème de Viète) donne le sentiment que pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $a_i$  est une fonction polynomiale en les  $n$  variables  $x_j$ .

Quelle est cette expression? Que se passe-t-il lorsqu'on inverse dans cette expression  $x_i$  avec  $x_j$ ? On parle de polynôme symétrique.

Réciproquement, est-ce que tout polynôme symétrique en  $\{x_k\}$  est une expression (polynomiale?) des  $a_i$  ?

## 2. Fonctions polynomiales et racines

### 2.1. Fonctions polynomiales

#### Définition - Fonctions polynomiales

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ . L'application

$$\begin{aligned} \tilde{P}: \mathbb{K} &\rightarrow \mathbb{K} \\ x &\mapsto a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \end{aligned}$$

est appelée fonction polynomiale associée à  $P$ .

#### Remarque - De la fonction polynomiale au polynôme?

L'application  $\tilde{P}$  se conçoit bien, mais la réciproque n'est pas forcément évidente a priori.

Etant donnée une fonction, dont on sait qu'elle est polynomiale, pourquoi pourrait-on lui associer comme antécédent un unique polynôme?

Autrement écrit, a-t-on nécessairement  $\tilde{P} = \tilde{Q} \implies P = Q$ ?

#### Théorème - Correspondance polynôme et fonction polynomiale

Soient  $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ ,  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ . On a

$$\begin{aligned} \widetilde{PQ} &= \tilde{P}\tilde{Q} \\ \widetilde{\lambda P} &= \lambda\tilde{P} \\ \widetilde{P+Q} &= \tilde{P} + \tilde{Q} \\ \widetilde{P \circ Q} &= \tilde{P} \circ \tilde{Q} \end{aligned}$$

De plus si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , on a  $\tilde{P}' = \widetilde{P'}$ .

#### Démonstration

### 2.2. Racines d'un polynôme

#### Définition - Racine

Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $a \in \mathbb{K}$ .

On dit que  $a$  est racine de  $P$  (ou est un zéro de  $P$ ) si  $\tilde{P}(a) = 0$ .

**Théorème - Racine et division**

Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $a \in \mathbb{K}$ .

Alors  $a$  est racine de  $P$  si et seulement il existe  $T \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P = (X - a)T$ .

Dans ce cas on dit que  $X - a$  divise  $P$  dans  $\mathbb{K}[X]$ .

**Démonstration****Proposition - Factorisation**

Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ ,  $k$  racines (distinctes) de  $P$ .

Alors  $\prod_{i=1}^k (X - a_i)$  divise  $P$  (i.e. il existe  $T \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $P = T \times \prod_{i=1}^k (X - a_i)$ ).

**Démonstration****2.3. Nombres maximales de racines et degré de  $P$** **Corollaire - Nombre maximal de racines**

Un polynôme non nul de degré inférieur ou égal à  $n$  admet au plus  $n$  racines,

ce qui équivaut à :

Un polynôme de degré inférieur ou égal à  $n$  qui admet au moins  $n + 1$

racines est nul.

### Démonstration

#### Corollaire - Critère de nullité d'un polynôme

On rappelle que  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  tel que  $\forall a \in \mathbb{K}, \tilde{P}(a) = 0$  alors  $P = 0$ .

### Démonstration

#### ⚠ Attention - Cas de corps non fini...

- ⋈ Ce résultat (ainsi que le suivant) se généralise à  $\mathbb{K}$  corps infini mais pas
- ⋈ au cas où  $\mathbb{K}$  est fini.

#### Corollaire - Bijection $\mathbb{K}[X]$ et fonction polynomiale

L'application de  $\mathbb{K}[X]$  dans l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients dans  $\mathbb{K}$  qui à  $P$  associe  $\tilde{P}$  est une bijection. On peut donc confondre polynôme et fonction polynomiale et noter  $P(a)$  au lieu de  $\tilde{P}(a)$ .

Ce corollaire permet de clore la question que nous nous étions posées en début de chapitre.

### Démonstration

#### Corollaire - Égalité de FONCTIONS polynomiales

Deux fonctions polynomiales sur  $\mathbb{R}$  ou sur  $\mathbb{C}$  sont égales si et seulement si elles ont même degré et mêmes coefficients.

### Démonstration

#### Exercice

Soit  $(P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$  tels que  $\tilde{P}(0) = \tilde{Q}(0), \tilde{P}(1) = \tilde{Q}(1), \tilde{P}(2) = \tilde{Q}(2)$ . Montrer que  $P = Q$ .

### 3. Interpolation de Lagrange

#### 3.1. Présentation du problème et polynômes de Lagrange

##### ↗ Heuristique - Problème d'interpolation

Pour toute cette partie, on considère :  $x_1, \dots, x_n$  des éléments distincts de  $\mathbb{K}$  et  $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ .

En fait on cherche  $P$  le plus simple possible (= de degré minimal) tel que pour tout  $i \in \mathbb{N}_n$ ,  $P(x_i) = y_i$ .

On appelle un tel problème, un problème d'interpolation. C'est un problème classique en science...

##### Proposition - Polynômes de Lagrange

Les polynômes définis par

$$L_i = \frac{\prod_{h \neq i} (X - x_h)}{\prod_{h \neq i} (x_i - x_h)}$$

vérifient  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $L_i(x_j) = \delta_i^j$ .

##### Démonstration

##### ⚠ Attention - Dépendance de $L_i$

⚡ Bien que la notation semble faire croire que les  $L_i$  ne dépendent que de  $i$  (ou  $x_i \dots$ ). Il n'en est rien.

⚡ Chaque  $L_i$  dépend bien de  $x_i$  mais aussi totalement de la famille  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  donc de chaque  $x_h$ .

#### 3.2. Interpolation (de Lagrange)

##### Théorème - Interpolation selon Lagrange (minimal en degré)

Il existe un unique polynôme  $P$  de degré inférieur ou égal à  $n - 1$  vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(x_i) = y_i.$$

C'est  $P = \sum_{i=1}^n y_i L_i$ .

## Démonstration

En prenant  $y_i = f(x_i)$ , on a le corollaire suivant :

**Corollaire - Interpolation aux fonctions**

Soient  $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$  et  $x_1, \dots, x_n$   $n$  points distincts de  $I$ , alors il existe un unique polynôme  $P$  de degré  $n - 1$  coïncidant avec  $f$  en ces  $n$  points (polynôme d'interpolation de Lagrange de  $f$ ).

**Proposition - Interpolation selon Lagrange (général en degré)**

Les polynômes  $Q \in \mathbb{K}[X]$  tels que  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, Q(x_i) = y_i$  sont les polynômes de la forme  $\sum_{i=1}^n y_i L_i + T$  où  $T \in \mathbb{K}[X]$  admet  $x_1, \dots, x_n$  pour racines (entre autres).

## Démonstration

## 4. Racines multiples et formule de Taylor

### 4.1. Formules de Taylor (polynômiale)

**Théorème - Formule de Taylor**

Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $\deg P = n$ ,  $a \in \mathbb{K}$ . Alors :

$$P = P(a) + P'(a)(X - a) + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!} (X - a)^n = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$$

## Démonstration

◆ **Pour aller plus loin - Problème LA-GRANGE/TAYLOR**

Dans l'interpolation de Lagrange, on cherche  $P$  minimal (en degré) tel que

$$\forall i \in \mathbb{N}_r, \quad P(x_i) = y_i$$

Dans l'interpolation de Taylor, on cherche  $P$  minimal (en degré) tel que

$$\forall i \in \mathbb{N}_r, \quad P^i(x) = y_i$$

Il arrive, qu'on rencontre des problèmes d'interpolation mixte entre ces deux problèmes (HERMITE...)

✂ **Savoir faire - Division euclidienne et formule de Taylor**

La définition de la division euclidienne (et son usage) sera présentée au chapitre suivant... Cet exercice semble un peu trop précoce, mais il est bien en lien avec la formule de Taylor

Exercice

Soient  $n > 2$  et  $a \in \mathbb{C}$ . Déterminer le reste et le quotient dans la division euclidienne de  $X^n + 1$  par  $(X - a)^3$ .

## 4.2. Multiplicité d'une racine

**Définition - Racine de multiplicité  $m$**

Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $a \in \mathbb{K}$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ . On dit que  $a$  est racine de multiplicité  $m$  (ou d'ordre (de multiplicité)  $m$ ) de  $P$  si  $(X - a)^m$  divise  $P$  mais  $(X - a)^{m+1}$  ne divise pas  $P$ .

Par extension, si  $P(a) \neq 0$ , on dit parfois que  $a$  est une racine de multiplicité 0 de  $P$  (c'est-à-dire n'est PAS racine de  $P$ ...).

On note  $\mu(a, P)$ , l'ordre de multiplicité de  $a$  comme racine de  $P$  (il peut être nul)

✂ **Savoir faire - Exploitation d'une racine d'ordre  $m$**

$a$  est racine d'ordre  $m$  ssi  $P(X) = (X - a)^m Q(X)$ , avec  $Q(a) \neq 0$

**Théorème - Caractérisation des racines multiples**

Soient  $P \in \mathbb{K}[X]$ ,  $a \in \mathbb{K}$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ . Alors  $a$  est racine de multiplicité  $m$  de  $P$  si et seulement si

$$P(a) = P'(a) = \dots = P^{(m-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(m)}(a) \neq 0$$

## Démonstration



**Exercice**

Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que  $(X+1)^{n+1} - X^{n+1} - 1$  ait au moins une racine multiple (c'est-à-dire de multiplicité  $\geq 2$ ) dans  $\mathbb{C}$ .

**5. Relations coefficients-racines****5.1. Polynôme scindé**

Nous allons formaliser des résultats vus en début d'année dans l'art de calculer.

**✂ Savoir faire - Corps algébriquement clos**

Un corps dont tous les polynômes sont nécessairement scindés est appelé un corps algébriquement clos.

Nous en reparlerons lorsque nous aurons vu le théorème fondamental de l'algèbre

**Définition - Polynôme scindé**

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ . On dit que  $P$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  si  $P$  s'écrit

$$P = a_n \prod_{i=1}^n (X - x_i)$$

où les  $x_i$  sont les racines de  $P$  dans  $\mathbb{K}$  comptées avec leur multiplicité (c'est-à-dire écrites autant de fois que leur multiplicité) et  $a_n$  est le coefficient dominant de  $P$ .

**STOP Remarque - Corps  $\mathbb{K}$** 

Ce résultat dépend du corps  $\mathbb{K}$ .

**5.2. Fonctions symétriques élémentaires****Définition - Fonctions symétriques élémentaires**

Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme scindé sur  $\mathbb{K}$  tel que  $\deg P = n$ .

Soient  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ses racines comptées avec leur multiplicité. On définit

les fonctions symétriques élémentaires des racines :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= x_1 + \dots + x_n \\ \sigma_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_1 x_n + \dots + x_{n-1} x_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \\ &\vdots \\ \sigma_k &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k} \\ &\vdots \\ \sigma_n &= x_1 x_2 \dots x_n \end{aligned}$$

**Savoir faire - Ecrire ces sommes (de Newton)**

$\sigma_k$  correspond à la somme de tous les possibles en prenant exactement  $k$  éléments de  $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$  et en multipliant les nombres  $x_i$  indexés par ces  $k$  éléments :

$$\sigma_k = \sum_{I_k \subset \binom{\mathbb{N}_n}{k}} \prod_{i \in I_k} x_i$$

Evidemment, même si cela ne se note pas  $\sigma_k$  dépend aussi de  $n \dots$

**Analyse - Relation de récurrence**

**Pour aller plus loin - Généralisation**

Plus fort :  
 Tout polynôme symétrique de  $\mathbb{K}^n$  dans  $\mathbb{K}$  s'exprime à l'aide des fonctions symétriques élémentaires  $\sigma_k$ .

Par exemple (exercice!), si on note  $S_p = \sum_{i=1}^n x_i^p$ , on a :

1.  $S_p - \sigma_1 S_{p-1} + \dots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} S_{p-n} + (-1)^n \sigma_n S_{p-n} = 0$  pour  $p \geq n$
2.  $S_p - \sigma_1 S_{p-1} + \dots + (-1)^{p-1} \sigma_{p-1} S_1 + (-1)^p \sigma_p \times p = 0$  pour  $1 \leq p \leq n-1$

Ce résultat est à la base du théorème de Galois sur les racines des équations polynomiales de degré  $\geq 5$ .

**Exercice**

Ecrire  $\sigma_3$  et  $\sigma_4$  pour  $n = 5$

**Heuristique - Relation coefficients-racines (par récurrence)**

Notons  $P_n = \lambda(X - x_1) \dots (X - x_n)$ , on a donc  $P_n = (X - x_n)P_{n-1}$ .  
 Et donc pour tout  $k \in \mathbb{N}$

$$[P_n]_k = [P_{n-1}]_{k-1} - x_n [P_{n-1}]_k$$

Cette relation ressemble beaucoup à la relation vue plus haut (avec un changement de signe).

Par ailleurs  $[P_n]_n = \lambda$  et  $\sigma_0 = 1$  (somme vide).

On montre alors par récurrence (sur  $n$  et pour tout  $k$ ) :

$$\sigma_k^n = (-1)^k \frac{[P_n]_{n-k}}{\lambda} = (-1)^k \frac{[P_n]_{n-k}}{[P_n]_n}$$

**Théorème - Relations coefficients-racines**

On a les relations suivantes entre les coefficients et les racines (écrites avec leur multiplicité) du polynôme scindé  $P$  :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

## Démonstration

## 5.3. Applications

✍️ **Heuristique - Fonctions symétriques générales**

Cela permet d'écrire toute expression polynomiale en les racines d'un polynôme, invariante par permutation, en fonction des coefficients du polynôme.

on peut en effet prouver qu'une telle expression s'exprime facilement à l'aide des  $\sigma_k$ .  
 en particulier  $S_k = x_1^k + \dots + x_n^k$  s'exprime à l'aide des coefficients.

Exercice

Déterminer les triplets  $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$  tels que

$$\begin{cases} a + b + c & = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 & = 3 \\ a^3 + b^3 + c^3 & = 1 \end{cases}$$

✍️ **Savoir faire - Comment trouver la bonne combinaison en  $\sigma_i$  ?**

Voici une méthode, elle n'est pas unique.

Assuré du théorème d'existence (que nous ne démontrons pas), nous pouvons chercher une méthode pour exprimer tout polynôme symétrique.

Soit  $P$  un tel polynôme (par exemple  $P = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$ ).

- Il faut d'abord trouvé le degré de  $P$ ,  
 si on remplace tous les  $x_i$  par  $X$ , on obtient un polynôme d'un certain degré  $n$ .  
 Si ce polynôme possède plusieurs degré, alors on le coupe en addition de polynômes dont les monomes sont tous de même degré.  
 Sur notre exemple  $n = 4$
- Connaissant le degré de  $P$ , on considère des facteurs à identifier devant le produit des  $\sigma_i$  de degré  $n$ .  
 Il faut savoir que pour tout  $i$ ,  $\deg(\sigma_i) = i$ .  
 On a donc sur notre exemple :

$$P = A\sigma_1^4 + B\sigma_2^2 + C\sigma_1^2\sigma_2 + D\sigma_1\sigma_3$$

(3 racines, donc pas de  $\sigma_4$ )

3. Il s'agit ensuite de trouver les valeurs des constantes  $A, B, C \dots$

On peut prendre des valeurs particulières pour  $x_1, x_2 \dots$

Par exemple avec

—  $x_1 = x_2 = 0$  et  $x_3 = x$ , on a  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$  et  $\sigma_1 = x$ ,

$$P = x^4 = Ax^4 \implies A = 1$$

—  $x_1 = x, x_2 = -x, x_3 = 0$ , on a  $\sigma_1 = 0, \sigma_2 = -x^2$ ,

$$P = 2x^4 = Bx^4 \implies B = 2$$

—  $x_1 = x, x_2 = x, x_3 = 0$ , on a  $\sigma_1 = 2x, \sigma_2 = x^2, \sigma_3 = 0$

$$P = 2x^4 = 1(2x)^4 + 2(x^2)^2 + C(2x)^2 \times (x^2) = (16 + 2 + 4C)x^4 \implies C = -4$$

—  $x_1 = 2x, x_2 = -x, x_3 = 2x$ , on a  $\sigma_1 = 3x, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -4x^3$

$$P = 33x^4 = 1(3x)^4 + D(3x) \times (-4x^3) = (81 - 12D)x^4 \implies D = 4$$

Donc

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = \sigma_1^4 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^2\sigma_3 + 4\sigma_1\sigma_3$$

On peut vérifier les calculs...

Exercice

On note  $x_1, x_2, x_3$  les racines de  $X^3 - X^2 + 4X + 1$ .

Calculer  $S = \sum_{i \neq j} x_i^3 x_j$ .

## 6. Théorème fondamental de l'algèbre

Le théorème suivant est admis :

**Théorème - Théorème de d'Alembert-Gauss**

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$ ,  $\deg P \geq 1$ . Alors  $P$  possède au moins une racine dans  $\mathbb{C}$ .

**Remarque - Démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss**

Bien que ce théorème soit énoncé dans cette partie de cours, toutes les démonstrations connues exploitent quelques résultats de topologie (comme le TVI par exemple).

Une démonstration consiste à considérer  $z \mapsto |P(z)|$  et supposer que  $\forall z, |P(z)| > 0$ .

1. On se place sur un fermé  $K$ , il existe  $z_0$  tel que  $\inf_{z \in K} |P(z)| = |P(z_0)| > 0$ , d'après Weierstrass.
2. Or autour de  $z_0$  ( $z_0 + re^{i\theta}$ ,  $r$  petit,  $\theta \in [0, 2\pi[$ ), il y a toujours un  $z$  tel que  $|P(z)| < |P(z_0)|$ ...
3. On peut prendre  $P'(z_0) \in \mathbb{C}$  qui indique la pente de variation, et  $\theta = -\arg(P'(z_0))$ ...

## 7. Bilan

Synthèse

$\rightsquigarrow$  En regardant les valeurs prises (incarnation) par un polynôme (calcul formel) dans un corps, on peut trouver une factorisation (formelle) du polynôme.

**Histoire - D'Alembert**



Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), est un grand mathématicien, flamboyant, du XVIIIème siècle. Il est néanmoins souvent plus connu pour son travail avec Diderot dans la rédaction de la première encyclopédie...

Sa démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss n'a pas résisté aux canons plus exigeants des mathématiciens du XIXème. Il avait montré que toutes racines des polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  ne pouvait se trouver que dans  $\mathbb{C}$  (pas d'extension de corps possible comme pour passer de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{C}$ ).

Quelques années plus tard, Gauss apporta une demi-douzaine de démonstrations différentes de ce théorème...

- ↪ Ces factorisations aident à résoudre le problème d'interpolation qu'on retrouve classiquement en science, grâce au polynôme de Lagrange. Mais aussi le théorème d'interpolation des dérivées (en un même point) avec la formule de Taylor.
- ↪ Cette dernière formule permet de définir également l'ordre de multiplicité d'une racine, ce qui permet de conclure totalement la factorisation, même par des puissances de polynômes (racines de  $P$  de multiplicité  $\geq 2$ ).
- ↪ Si les polynômes se factorisent totalement (théorème de D'Alembert-Gauss), alors on doit retrouver dans les coefficients d'un polynôme, les traces de ses racines (par développement). Ce sont les formules de Newton qui s'appuie sur une forme de super-symétrie!

**Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre**

- Savoir-faire - Division euclidienne et formule de Taylor.
- Savoir-faire - Exploitation d'une racine d'ordre  $m$ .
- Savoir-faire - Corps algébriquement clos.
- Savoir-faire - Ecrire les sommes (de Newton)
- Savoir-faire - Comment trouver la bonne combinaison en  $\sigma_i$ ?

**Notations**

Notations	Définitions	Propriétés	Remarques
$\tilde{P}$	Application $\mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, x \mapsto P(x)$	$\tilde{P}(a) = 0 \iff \exists Q \text{ tq } P = (X - a)Q$	Par abus, on écrit $\tilde{P} = P$
$\mu(a, P)$	(ordre de) multiplicité de $a$ comme racine de $P$	$\mu(a, P) = k \iff P = (X - a)^k Q$ avec $Q(a) \neq 0$	$k = \min\{h \in \mathbb{N} \mid P^{(h)}(a) \neq 0\} + 1$
$L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$	Polynômes d'interpolation de LAGRANGE	$L_i(x_j) = \delta_{i,j}$	Il dépend de <u>tous</u> les nombres distincts $x_1, x_2, \dots, x_n$ considérés Il donne une solution particulière au problème d'interpolation. Il faut l'addition aux solutions homogènes.
$T_{a,P}(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k$	Expression du développement de Taylor de $P$	$T_{a,P} = P$	Elle lie la potentielle racines en $a$ à $P^{(k)}(a)$
$\sigma_k = \sum_{I \subset \binom{[n]}{k}} \prod_{i \in I} x_i$	Fonctions symétriques élémentaires de $P$	$\sigma_k = (-1)^k \frac{[P]_{n-k}}{[P]_n}$ ( $P$ scindé)	$x_1, \dots, x_n$ sont les racines de $P$ (comptées avec leur multiplicité) La formule se générale à tous les polynômes symétriques en les racines de $P$

**Retour sur les problèmes**

104.  $P = Q$  si et seulement si  $\forall k \in \mathbb{N}, [P]_k = [Q]_k$ .
105. Il suffit qu'il y ait  $\max(\deg P, \deg Q) + 1$  éléments distincts de  $\mathbb{K}$  qui annulent  $P - Q$  pour que  $P = Q$  en tout élément de  $\mathbb{K}$ .  
Il peut arriver que deux polynômes soient égaux en tout  $x \in \mathbb{K}$  ( $\mathbb{K}$  fini et de petites dimensions), mais les polynômes sont distincts. Ainsi de  $X + 1$  et  $X^2 + 1$  sur  $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}[X] \dots$
106. Voir cours. C'est le polynôme de Lagrange+Homogène :

$$\sum_{k=1}^p y_k \prod_{i \neq k} \frac{X - x_i}{x_k - x_i} + Q \prod_{i=1}^p (X - x_i)$$

107. Voir cours
108. On a vu au chapitre précédent, dans une remarque, on peut définir (par récurrence) :

$$\mathbb{K}[X_1, X_2 \dots X_{n+1}] = (\mathbb{K}[X_1, \dots X_n])[X_{n+1}]$$

à condition d'accepter de se restreindre aux polynômes définis sur un anneau et non un corps.

Dans ce cas la factorisation est plus compliquée...

On pourrait par exemple exploiter les petits Bernoullis. On fixe  $a \in \mathbb{R}$ .

$$P(X, a) - P(a, a) = \sum_{k=1}^n a_k(a)(X^k - a^k) = (X - a) \sum_{k=1}^n a_k(a) \sum_{i=0}^{k-1} X^i a^{k-1-i} = (X - a)Q_a(X)$$

où donc  $Q_a$  est un polynôme. Mieux :  $\forall k \in \mathbb{N}$ ,  $[Q_a]_k \in \mathbb{K}[a]$ , indépendante de  $a$ .

On peut identifier, on note :  $Q_k$  tel que  $\forall a \in \mathbb{K}$ ,  $Q_k(a) = [Q_a]_k$ .

On obtient ainsi une factorisation de  $P$  par  $X - Y$ .

109. Voir cours.