Chapitre 26

Le corps des fractions de l'anneau intègre des polynômes

Résumé -

Nous avons vu au chapitre précédent un lien fort entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$. Ces deux anneaux intègres présentent un autre problème en commun : ce ne sont pas des corps, c'est-à-dire que la plupart de leurs éléments ne sont pas inversibles.
Pour éviter ce problème pour $\mathbb{Z}$, nous avons construit $\mathbb{Q}$, corps des fractions rationnelles grâce à la relation d'équivalence $(p_1, q_1)\mathscr{R}(p_2, q_2)$ ssi $q_1 \times p_2 = q_2 \times p_1$.
Nous exploitons le même principe ici pour construire $\mathbb{K}(X)$, le corps des fractions rationnelles.
Nous nous concentrons alors sur la décomposition en éléments simples de toutes fractions, cela est souvent bien pratique lorsque l'on rencontre des fonctions rationnelles (à intégrer par exemple...).

Sommaire

1. Problèmes

? Problème 114 - $Z \to \mathbb{Q}$ et $\mathbb{K}[X] \to ??$

Si l'on conduit le même processus de construction qui permet de passer de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$ (afin d'obtenir un corps) à partir de $\mathbb{K}[X]$, qu'obtient-on ?
Quel est ce processus déjà ?

? Problème 115 - Intégration de fractions

Depuis le début d'année, on a rencontré des (fonctions) fractions rationnelles essentiellement dans le cours du calcul d'intégrales.
La stratégie consistait alors à réduire le plus possible la complexité du numérateur, et de factoriser le dénominateur afin d'obtenir une décomposition en éléments simples. Nous avons pratiqué cette méthode dans des cas simples, sans en voir la théorie.
Est-il toujours possible de décomposer toute fraction rationnelle en éléments simples ? Et qu'est-ce que cela peut signifier ?
En réinvestissant la théorie, est-il possible de trouver un algorithme de décomposition (qui marcherait à tous les coups) ?
Quelle conséquence pour les intégrations de fractions rationnelles.

? Problème 116 - Paramétrage rationnel du cercle

Une paramétrisation naturelle du cercle est donné par le couple $(\cos t, \sin t)$. Mais les fonctions cos et sin sont transcendantes.
Considérons le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et la droite d'équation $y = a(x+1)$, de pente a et qui passe par $A(-1,0)$.
L'intersection de ces deux courbes donne les points $M(x,y)$ tels que $1 = x^2 + y^2 = x^2 + a^2(x+1)^2$.
Or on sait que $(-1,0)$ est toujours une solution de cette intersection, on peut donc factoriser l'équation par $x+1$:

$$x^2+a^2(x+1)^2 = 1 \Longleftrightarrow (x+1)[(x-1)+a^2(x+1)] = 0 \Longleftrightarrow (x-1) = 0 \text{ ou } x = \frac{1-a^2}{1+a^2}$$

Comme $a(x+1) = a(\frac{1-a^2}{1+a^2}+1) = \frac{2a}{1+a^2}$ On trouve donc un nouveau paramétrage **rationnel** du cercle : $(\frac{1-a^2}{1+a^2}, \frac{2a}{1+a^2})$.
Ce résultat vous rappelle-t-il quelque chose ?
Comment exploiter cette paramétrisation pour trouver tous les triplets entiers pythagoriciens $(x^2 + y^2 = z^2)$?
Est-ce que la méthode s'adapte à autre chose que le cercle trigonométrique (cubique) ? Qu'en faire ?

2. $\mathbb{K}(X)$, corps des fractions de $\mathbb{K}[X]$ anneau intègre

2.1. Construction de $\mathbb{K}(X)$

Heuristique - Ensemble quotient

On crée l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ à l'image de l'ensemble $\mathbb{Q}$.
$\mathbb{Z}$ était un anneau intègre mais pas un corps, l'ensemble $\mathbb{Q}$ est le plus petit corps contenant

, $\mathbb{Z}$. De même on va créer un corps contenant $\mathbb{K}[X]$.

Définition - Fractions rationnelles (par classe d'équivalence)
La relation binaire définie sur $\mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ par

$$(A_1, B_1)\mathscr{R}(A_2, B_2) \Leftrightarrow A_1B_2 = A_2B_1$$

est une relation d'équivalence.
On note $K(X)$ l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation, un élément F de $\mathbb{K}(X)$ est écrit sous la forme $F = \frac{A}{B}$ (ou $F(X) = \frac{A(X)}{B(X)}$) où $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$.
On a donc $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \Leftrightarrow A_1B_2 = A_2B_1$
F s'appelle une fraction rationnelle.

Proposition - Corps des fractions rationnelles
Muni des lois internes + et × définies par

$$\frac{A_1}{B_1} + \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_1B_2 + B_1A_2}{B_1B_2}, \quad \frac{A_1}{B_1} \times \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_1A_2}{B_1B_2}$$

$(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps contenant $\mathbb{K}[X]$ (on identifie B à $\frac{B}{1}$).

Démonstration

2.2. Représentant irréductible. Degré et pôle

Définition - Représentant irréductible
Soit $F = \frac{A}{B}$ et $D = A \wedge B$.
On a donc $A = DP$ et $B = DQ$ avec $P \wedge Q = 1$, et alors $F = \frac{P}{Q}$.
On dit que $\frac{P}{Q}$ est un représentant irréductible de F.

Définition - Degré
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.
L'élément de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$, $\deg A - \deg B$, est indépendant du choix du représentant $\frac{A}{B}$ de F.
On l'appelle degré de la fraction rationnelle F, noté $\deg F$.

Il faut démontrer l'indépendance par représentant.

Démonstration

Proposition - Extension des propriétés sur les degrés
On a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}&\deg(F_1+F_2) \leqslant \max(\deg F_1, \deg F_2)\\&\deg F_1F_2 = \deg F_1 + \deg F_2\\&\deg F = -\infty \Leftrightarrow F = 0\end{aligned}$$

Démonstration

Définition - Racines et pôles
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $\dfrac{P}{Q}$ un représentant irréductible de F. Soit $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une racine (ou un zéro) de F si $P(a) = 0$ (a racine de P) et que a est un pôle de F si $Q(a) = 0$ (a racine de Q).
La multiplicité d'une racine (resp. d'un pôle) de F est sa multiplicité en tant que racine de P (resp. de Q).

Remarque - a pôle et racine de F ?
L'ensemble des racines et l'ensemble des pôles sont disjoints. (pourquoi ?)

Exemple - Racines et les pôles de $\dfrac{X^3+X^2+X-3}{X^2-X}$

2.3. Fonction rationnelle

Définition - Fonction rationnelle
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $\dfrac{P}{Q}$ un représentant irréductible de F. On note Δ_F l'ensemble des pôles de F et on définit alors la fonction rationnelle associée à F par

$$\widetilde{F}: \begin{array}{ll}\mathbb{K}\setminus\Delta_F & \to \mathbb{K}\\ x & \mapsto \dfrac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)}\end{array}$$

Remarque - Egalité des fonctions
Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ou plus généralement un corps infini) on a $\widetilde{F_1} = \widetilde{F_2}$ si et seulement si $F_1 = F_2$.

2.4. Dérivation

Définition - Dérivée
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. La fraction rationnelle $\dfrac{A'B-AB'}{B^2}$ est indépendante du représentant choisi $\dfrac{A}{B}$ de F. On l'appelle dérivée de la fraction rationnelle F,

notée F'.
Les propriétés vis à vis de la somme, du produit, ou du produit par un élément de $\mathbb{K}$ sont les propriétés usuelles.

Il faut démontrer l'indépendance du résultat en rapport au représentant.

Démonstration

Remarque - Dérivation et fonction rationnelle
Lorsque $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ les fonctions rationnelles $\widetilde{F}'$ et $\widetilde{F'}$ coincident.

3. Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles

3.1. Partie entière

Proposition - partie entière
Soit $F=\dfrac{P}{Q}\in\mathbb{K}(X)$ avec $P\wedge Q=1$.
Alors il existe un unique couple $(E,\widehat{F})\in\mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}(X)$ tel que

$$F=E+\widehat{F} \text{ et } \deg\widehat{F}<0.$$

E est appelée partie entière de la fraction F.

Démonstration

Savoir faire - Comment obtenir la partie entière?
Si $\deg F<0$ alors $E=0$,
sinon on effectue la division euclidienne de P par Q :
$P=EQ+R$ et $F=\frac{P}{Q}=E+\dfrac{R}{Q}$.

3.2. Principe de décomposition sur un corps $\mathbb{K}$

Théorème - Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ une fraction irréductible. Q se décompose en produit de polynômes irréductibles

$$Q = \lambda Q_1^{k_1} \dots Q_p^{k_p} = \lambda \prod_{j=1}^{p} Q_j^{k_j}.$$

Alors F s'écrit de manière unique, E étant la partie entière,

$$F = E + \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{P_{1j}}{Q_j} + \frac{P_{2j}}{Q_j^2} + \cdots + \frac{P_{k_j j}}{Q_j^{k_j}} \right)$$

où $P_{ij} \in \mathbb{K}[X], \deg P_{ij} < \deg Q_j$.
Cette décomposition s'appelle la **décomposition en éléments simples** sur $\mathbb{K}$ (ou dans $\mathbb{K}(X)$) de la fraction F.
Si $Q_j = X - a_j$, $a_j \in \mathbb{K}$, $\left(\dfrac{P_{1j}}{Q_j} + \dfrac{P_{2j}}{Q_j^2} + \cdots + \dfrac{P_{k_j j}}{Q_j^{k_j}} \right)$ s'appelle la **partie polaire** de F relative (ou associée) au polynôme Q_j (ou au pôle a_j si $Q_j = X - a_j$).

Heuristique - Principe de démonstration

On exploite une formule de Bézout généralisée pour démontrer l'existence (par récurrence sur p).
Puis avec la formule de Taylor, on simplifie les fractions.

Pour aller plus loin - A quoi cela peut servir?

Une application déjà vue de la décomposition en éléments simples concerne le calcul de primitive/intégrale d'une fraction rationnelle.
Une autre application peut se faire pour les série génératrice rationnelle (avec des séries géométriques) ou bien le calcul de DL_n. Par exemple, avec $\frac{X^3}{(X-1)^3(X-2)^2} = \cdots = \frac{1}{(X-1)^3} + \frac{5}{(X-1)^2} + \frac{12}{(X-1)} + \frac{8}{(X-2)^2} - \frac{12}{X-2}$*, on peut affirmer :*
$\frac{x^3}{(x-1)^3(x-2)^2} \underset{x\to 1}{=} \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{5}{(x-1)^2} + \frac{12}{x-1} + 20$

Démonstration

Proposition - Pôles simples
Si a est un pôle simple de $F = \dfrac{P}{Q}$ ($\deg F < 0$), pour trouver la partie polaire $\dfrac{\lambda}{X-a}$, on peut utiliser $\lambda = \dfrac{P(a)}{\widehat{Q}(a)} = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$ où $\widehat{Q}$ est telle que $Q = (X-a)\widehat{Q}$.

Ce second résultat (avec Q', facile à obtenir car polynôme) évite même la factorisation de Q

Démonstration

Savoir faire - Obtenir la partie polaire - cas pôle simple

Si a est un pôle simple de $F = \dfrac{P}{Q}$, la partie polaire $\dfrac{\lambda}{X-a}$ s'obtient avec $\lambda = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$

Savoir faire - Obtenir la partie polaire - cas d'un pôle multiple

En isolant la partie polaire relative au pôle a de multiplicité m, on a, pour $Q = (X-a)^m \hat{Q}$,

$$F = \sum_{k=1}^{m} \frac{\lambda_k}{(X-a)^k} + \frac{P_1}{\hat{Q}}.$$

• En multipliant cette égalité par $(X-a)^m$ et en substituant a à X on trouve λ_m.
• On retranche ensuite $\dfrac{\lambda_m}{(X-a)^m}$ à F, on obtient donc après simplification une fraction dont a est pôle de multiplicité $m-1$ et on recommence.
Cette méthode est en pratique applicable si m est petit.
D'autres possibilités une fois λ_m obtenu :
• On multiplie par X puis on prend la limite en $+\infty$ de la fonction rationnelle obtenue : cela permet généralement d'obtenir λ_1.
• Si $m \geqslant 3$, on a donc obtenu λ_m et λ_1. Si l'on veut éviter les soustractions successives, on substitue des valeurs particulières simples à X autres que le pôle (0,...)

Cela marche aussi pour $m = 1$.

Exercice

Décomposer en éléments simples la fraction $F = \dfrac{1}{X^2(X-1)^3}$.

3.3. Application de la décomposition sur le corps $\mathbb{C}$

Sur $\mathbb{C}$, on applique le théorème « Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$ », les facteurs irréductibles sont des polynômes de degré 1.

Théorème - Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{C}(X)$ une fraction irréductible. Q se décompose en produit de polynômes irréductibles $Q = \lambda \prod_{j=1}^{p} (X-\alpha_j)^{k_j}$.

Alors F s'écrit de manière unique, E étant la partie entière et $A_{ij} \in \mathbb{C}$,

$$F = E + \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{A_{1j}}{X-\alpha_j} + \frac{A_{2j}}{(X-\alpha_j)^2} + \cdots + \frac{A_{k_j j}}{(X-\alpha_j)^{k_j}} \right)$$

Théorème - Lemme de Gauss-Lucas

Si $P = \lambda \prod_{j=1}^{p} (X-\alpha_j)^{k_j}$ alors $\frac{P'}{P} = \sum_{j=1}^{p} \frac{k_j}{X-\alpha_j}$.

Démonstration

3.4. Application de la décomposition sur le corps $\mathbb{R}$

Sur $\mathbb{R}$, on applique le théorème « Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}$ », les facteurs irréductibles sont des polynômes de degré 1 ou 2 avec $\Delta < 0$.

Théorème - Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$
Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{R}(X)$ une fraction irréductible. Q se décompose en produit de polynômes irréductibles

$$Q = \lambda \prod_{j=1}^{p'} (X-\alpha_j)^{k'_j} \prod_{j=1}^{p''} (X^2+\delta_j X+\gamma_j)^{k''_j}.$$

Alors F s'écrit de manière unique, E étant la partie entière,

$$F = E + \sum_{j=1}^{p'} \left(\frac{A_{1j}}{X-\alpha_j} + \frac{A_{2j}}{(X-\alpha_j)^2} + \cdots + \frac{A_{k'_j j}}{(X-\alpha_j)^{k'_j}} \right) + \sum_{j=1}^{p''} \left(\frac{B_{1j}X+C_{1j}}{X^2+\delta_j X+\gamma_j} + \cdots + \frac{B_{k''_j j}X+C_{k''_j j}}{(X^2+\delta_j X+\gamma_j)^{k''_j}} \right)$$

tous les coefficients A, B, C étant des réels.
La première somme est formée d'éléments simples de première espèce, la seconde d'éléments simples de deuxième espèce.

Pour aller plus loin - Localisation des racines de P'
Le théorème de Rolle appliqué à $\tilde{P}$ permet d'affirmer qu'entre deux racines de P, se trouve une racine de P'. Et si les racines de P sont dans $\mathbb{C}$?
Le théorème de Gauss-Lucas permet d'affirmer que si $P'(\beta) = 0$, alors (en prenant la partie conjuguée) : $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} \frac{k_j}{|\beta-\alpha_j|^2}(\beta-\alpha_j) = 0$.
Donc en notant $\lambda_j = \frac{k_j}{|\beta-\alpha_j|^2}$ *et* $N = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$, *on a* $\beta = \dfrac{1}{N} \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \alpha_j$.
Par conséquent : β est dans l'enveloppe convexe des racines (α_j)

Savoir faire - Décomposition en élément simples de deuxième espèce
On peut
- décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ et regrouper les pôles conjugués : cela marche bien quand la multiplicité est 1 ;
- procéder par identification ;
- quand il ne reste qu'un ou deux coefficients à calculer, on utilise des valeurs particulières : $0, 1, -1, +\infty, -\infty$;
- utiliser une éventuelle parité et l'unicité de la décomposition.

4. Bilan

Synthèse

- ⇝ Exactement de la même manière que $\mathbb{Q}$ étend $\mathbb{Z}$ en intégrant les inversible, on construit le corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$ à partir de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$.
- ⇝ On étend alors la notion de degré et de derivée ; on définit les fractions irréductibles ; on définit aussi les pôles (et racines) des fractions rationnelles.

$\rightsquigarrow$ Un savoir-faire nous mobilise tout particulièrement : l'algorithme de décomposition en éléments simples de $\frac{A}{B}$.
D'abord l'écriture (existence) : on commence par faire la division euclidienne de A par B; puis on factorise le dénominateurs B en produit de puissance d'irréductibles; on trouve enfin les numérateurs (de degré minimal) qu'il faut associé à chacun.
Puis la recherche des coefficients exacts des polynômes (différents savoir-faire à combiner)

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

— Savoir-faire - Comment obtenir la partie entière?
— Savoir-faire - Obtenir la partie polaire - cas pôle simple
— Savoir-faire - Obtenir la partie polaire - cas pôle multiple
— Savoir-faire - Décomposition en éléments simples de deuxième espèce

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$\mathbb{K}(X)$	Corps des fraction rationnelle à partir de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$	$\frac{\mathbb{K}[X]}{\mathscr{R}}$ avec $(A,B)\mathscr{R}(C,D)$ ssi $AD=BC$	Ce sont les classes d'équivalence pour la relation des fractions

Retour sur les problèmes

114. Cours
115. Oui, on se restreint d'abord aux irréductibles avec la décomposition en éléments simples sur les dénominateurs.
116. Supposons que $x^2+y^2=z^2$. On a donc $a\in\mathbb{Q}$ tel que $\dfrac{x}{z}=\dfrac{1-a^2}{1+a^2}$ et $\dfrac{2a}{1+a^2}$.
Si on note $a=\frac{p}{q}$ on trouve en multipliant tout par q^2 :
$x=q^2-p^2$, $y=2pq$ et $z=q^2+p^2$.
C'est exactement toutes les solutions possibles de triplets pythagoriciens premiers entre eux (on peut aussi multiplier par λ). On peut l'adapter au cubique et obtenir une nouvelle loi de groupe… (https ://webmath.univ-rennes1.fr/master/master2/textes/legeay.pdf)