Sixième partie

Algèbre linéaire & bilinéiare

Chapitre 27

Espaces vectoriels

Résumé -

Les espaces vectoriels sont aujourd'hui la structure principale (ou première) de tout cours de mathématiques spéciales dans le monde. Il y a (au moins deux raisons) : la première est historique : c'est le lien qu'ils jouent naturellement avec la géométrie (en toute dimension). Mais pour nous c'est la seconde raison qui est prioritaire : c'est le lieu de la linéarité. Or la science physique (actuelle) est la science de la linéarité. Les espaces vectoriels sont donc parfaitement adaptés au co-développement maths/physique.
Dans l'ensemble de ce chapitre : on opère sur ces structures ou les sous-espaces induits (image par application linéaire, addition et intersection) ou sur ces objets (combinaison linéaire, génératrice et/ou indépendante)...

Sommaire

1. Problèmes

? Problème 117 - Structure de la géométrie vectorielle

En physique, on travaille beaucoup avec des vecteurs (forces, positions...). Ces vecteurs peuvent être de dimension 2, 3, voire 6 (dans l'espace des phases...).
En mathématiques, on aime dégager les objets de leur histoire pour retenir que la structure sous-jacente.
Si on appelle espace vectoriel, un ensemble de vecteurs et les opérations que l'on peut poser sur cet ensemble, que peut être (que doit être) un espace vectoriel ?
Puis existe-t-il d'autres problèmes physiques ou mathématiques dans lesquels les espaces vectoriels peuvent être les bons cadres d'étude ?

? Problème 118 - Sous-espaces vectoriels

On suppose que F et G sont des espaces vectoriels (inclus dans un même espace vectoriel). Ils sont donc stables par combinaison linéaire.
A quelle condition, l'ensemble $F \cap G$ est un espace vectoriel ?
A quelle condition, l'ensemble $F \cup G$ est un espace vectoriel ?

? Problème 119 - Anneau de sous-espaces vectoriels

Si L, M, N sont des sous-espaces vectoriels d'un espace E, a-t-on

$$L \cap (M + (L \cap N)) = (L \cap M) + (L \cap N)$$

$$L \cap (M + N) = (L \cap M) + (L \cap N)$$

? Problème 120 - Application qui conserve la structure

On considère $f : E \to F$, une application f d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F.
E, comme F, sont des structures assez rigides (espace vectoriel) dont la particularité est la stabilité par la combinaison linéaire.
Quelles propriétés donner à f, pour que la structure rigide se transporte de E à F par f ?
A quelle condition simple nécessaire et/ou suffisante peut-on affirmer que f est surjective, resp. injective ?

? Problème 121 - Projection

En début d'année, nous avons vu qu'il est pratique d'avoir pour une décomposition $E = F \uplus G$, des applications $\mathbf{1}_F$ et $\mathbf{1}_G$, ainsi, on peut décomposer tout x de F en $x = \mathbf{1}_F(x) \times x + \mathbf{1}_G(x) \times x$ et éviter d'étudier des sous-cas... Pour les espaces vectoriels, nous voyons que les ensembles (espaces) se décomposent plutôt en somme qu'en réunion : $E = F \oplus G$. Il faudrait pouvoir alors, envoyer la partie sur F et celle sur G. Comment définir proprement deux applications $f : E \to F$ et $g : E \to G$, telles que $\forall\ x \in E, x = f(x) + g(x)$? Unique(s) ?

2. Structure d'espace vectoriel

2.1. Loi de composition externe

Définition - Loi de composition externe
Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une **loi de composition externe sur** E à domaine d'opérateurs $\mathbb{K}$ est une application de $\mathbb{K}\times E$ dans E (on la note généralement par un point) :

$$\begin{array}{rl} \mathbb{K}\times E & \to E \\ (\lambda, x) & \mapsto \lambda\cdot x \end{array}$$

Définition - Espace vectoriel
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif. On appelle $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** (notation $\mathbb{K}$-e.v.) ou **espace vectoriel sur** $\mathbb{K}$ tout triplet $(E,+,\cdot)$ formé d'un ensemble E, d'une loi interne $+$ sur E et d'une loi externe $\cdot$ sur E à domaine d'opérateurs $\mathbb{K}$ tel que :
• $(E,+)$ est un groupe commutatif
• Et on a les quatre propriétés suivantes :
$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$, $\forall(x,y)\in E^2$,

$$\begin{array}{l} \alpha\cdot(\beta\cdot x) = (\alpha\beta)\cdot x \\ (\alpha+\beta)\cdot x = (\alpha\cdot x)+(\beta\cdot x) \\ \alpha\cdot(x+y) = (\alpha\cdot x)+(\alpha\cdot y) \\ 1\cdot x = x \end{array}$$

Les éléments de E s'appellent des vecteurs.
Les éléments de $\mathbb{K}$ s'appellent des scalaires.
L'élément neutre de E pour $+$ s'appelle le vecteur nul, il est noté 0_E ou $\vec{0}_E$.
Par abus de langage on dira que E est un $\mathbb{K}$-e.v. (à la place de $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.)

Pour aller plus loin - Notation et point de vue géométrique
Jusqu'à maintenant les vecteurs rencontrés en mathématiques (et souvent en physique) s'écrivent plutôt $\vec{AB}$ ou $\vec{x}$. Cela permet de bien faire la différence avec la notation des nombres (scalaire) $k\in\mathbb{K}$ dans l'écriture $k\cdot\vec{x}$.
On peut plaider pour conserver cette notation :
- *C'est visuel : on ne confond pas les deux types d'objets*
- *Cela donne un vrai sens géométrique à ce cours d'algèbre linéaire*

Mais malheureusement, comme cela est un peu réducteur (le point de vue géométrique), on préférera l'écriture sans flèche. On notera plutôt en lettres grecs les scalaires et en lettres latines les vecteurs : $\lambda\cdot x$ (en science physique, on note souvent en gras les vecteurs : $k\cdot\mathbf{x}$)...
Le point de vue géométrique n'est néanmoins pas à bannir. Il s'agit « seulement » d'une forme particulière incarnation des espaces vectoriels (mais il permet aussi de voir les choses).

Remarque - Corps $\mathbb{K}$
Dans la suite on s'intéressera presqu'exclusivement au cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Ce sont les cas figurants au programme, mais la définition peut s'étendre à d'autres cas, par exemple $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{K}=\mathbb{F}_p(=\dfrac{\mathbb{Z}}{p\mathbb{Z}})$.

Proposition - Premières propriétés
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour $x\in E$ et $\lambda\in\mathbb{K}$ on a :

$$\begin{array}{l} 0\cdot x = 0_E \\ (-1)\cdot x = -x \\ \lambda\cdot(-x) = (-\lambda)\cdot x = -(\lambda\cdot x) \\ \lambda\cdot 0_E = 0_E \\ \lambda\cdot x = 0_E \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E \end{array}$$

Pour aller plus loin - Module
On appelle A-module, un ensemble $(F,+,\cdot)$ muni des mêmes propriétés que E, espace vectoriel, à la différence que A est un anneau et non un corps.
Cela n'est pas sans conséquence sur la question des bases, dont nous reparlerons plus loin.
A part cela, il y a beaucoup de points communs

Démonstration

2.2. Exemples fondamentaux d'espaces vectoriels

Proposition - Espace vectoriel des matrices
$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration

Proposition - Espace vectoriel des polynômes
$\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration

Proposition - Espaces produits
Soient $E_1, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$-e.v. (avec le même corps $\mathbb{K}$). On définit sur $E = E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ les lois $+$ et $\cdot$ par :

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 \underset{E_1}{+} y_1, x_2 \underset{E_2}{+} y_2, \dots, x_n \underset{E_n}{+} y_n)$$

$$\lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda \underset{E_1}{\cdot} x_1, \dots, \lambda \underset{E_n}{\cdot} x_n)$$

Alors $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v., de vecteur nul $(0_{E_1}, \dots, 0_{E_n})$.

Remarque - Application classique
On utilise généralement ce résultat avec des E_i sous-espaces vectoriels (cf paragraphe suivant) d'un même espace vectoriel E, voire égaux, mais ce n'est pas obligatoire.

Exercice
A démontrer

$\mathbb{K}$ muni de la loi interne $+$ et de la loi $\times$ comme loi externe à domaine d'opérateurs $\mathbb{K}$ étant un $\mathbb{K}$-e.v. on en déduit que

Corollaire - Exemple crucial !
$\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-e.v de vecteur nul $(0, \dots, 0)$: $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-e.v. et $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-e.v.

Exercice
Montrer que $\mathbb{C}^n$ est également un $\mathbb{R}$-e.v.

Définition - Famille presque nulle
On considère un espace vectoriel E défini sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ lui-même par exemple).
On dit qu'une famille $(y_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est presque nulle, si $\{i \in I \mid y_i \neq 0\}$ est fini.
On note alors $E^{(I)}$ cet ensemble (des familles de E presque nulle).
Alors $(E^{(I)},+,\cdot)$ est un espace vectoriel

Exercice
On a $(y_i)+(z_i) = (y_i+z_i)$. A démontrer

Exemple - $\mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$

Proposition - Espaces de fonctions
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et X un ensemble quelconque. On munit $\mathscr{F}(X,E)$ des lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$f+g : \begin{array}{l} X \to E \\ x \mapsto f(x) \underset{E}{+} g(x) \end{array} \qquad \text{et} \qquad \lambda\cdot f : \begin{array}{l} X \to E \\ x \mapsto \lambda \underset{E}{\cdot} f(x) \end{array}$$

Alors : $(\mathscr{F}(X,E),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. (pour E $\mathbb{K}$-e.v.) d'élément neutre l'application nulle (application constante égale à 0_E).

Démonstration

Analyse - Cas particuliers

Histoire - Du sens (physique) de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geqslant 4$

Cela a-t-il un sens « physique » de s'intéresser à un espace vectoriel de dimension $n > 5$? La relativité nous fait voir l'espace-temps comme un ensemble à 4 dimensions et ensuite ?
Pour le mathématicien la question ne se pose pas…
Et pourtant, la mathématique et la physique ont partie liée ; l'histoire montre que les couper l'un de l'autre ne conduit que vers un assèchement (même si les acteurs ont souvent un penchant pour l'une ou pour l'autre).
Alors nous répondrons à la question : l'espace des phases d'un objet de N molécules n'est-il pas de dimension $6N$?

Corollaire - Exemples multiples
$\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$ (I intervalle de $\mathbb{R}$), $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

2.3. Combinaisons linéaires

Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.

Définition - Combinaison linéaire
On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire de la famille finie $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments de E s'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \lambda_1 \cdot x_1 + \lambda_2 \cdot x_2 + \ldots + \lambda_n \cdot x_n$$

Proposition - Stabilité linéaire
Si x et y sont combinaisons linéaires de la famille $(x_1,\dots,x_n)$
alors pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda \cdot x + \mu \cdot y$ est combinaison linéaire de la famille $(x_1,\dots,x_n)$.
Plus généralement, toute combinaison linéaire de vecteurs qui sont des combinaisons linéaires de la famille $(x_1,\dots,x_n)$ est une combinaison linéaire de la famille $(x_1,\dots,x_n)$.

Histoire - Grassmann

C'est à Hermann Grassmann (1809-1877), mathématicien d'origine allemande que l'on doit la formalisation des espaces vectoriels (ainsi que la plupart des résultats de ce cours). Ces idées datent de 1844 : Théorie de l'extension linéaire. Mais il a totalement été oublié par la postérité mathématique avant de réapparaitre au milieu du XXe siècle.
Sa vie, à lui également, pourrait faire l'objet d'un biopic…

Démonstration

Définition - Généralisation : combinaison linéaire de famille
Soit I un ensemble infini et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E.
On dit que $x \in E$ est combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$ s'il est combinaison linéaire d'un nombre **fini** d'éléments de cette famille.
Ce qui peut aussi s'écrire : il existe une famille presque nulle (ou à support compact) $(\lambda_i)_{i\in I}$(c'est-à-dire comportant seulement un nombre fini de λ_i non nuls) telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i \cdot x_i$. Ou encore, il existe $J \subset I$, fini et $(\lambda_i)_{i\in J}$ tel que $x = \sum_{i\in J} \lambda_i \cdot x_j$.

3. Sous-espaces vectoriels

3.1. Définition et caractérisation

Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{K}$-e.v.

Définition - Sous-espace vectoriel
Soit F une partie non vide de E.
On dit que F est un sous-espace vectoriel de E
si F est stable pour les deux lois + et $\cdot$
et si F muni des lois induites est un $\mathbb{K}$-e.v.

Exemple - Triviaux

Proposition - Caractérisation
Soit $F \subset E$. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$(1) \quad F \neq \emptyset$$
$$(2) \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x,y) \in F^2, \quad \lambda \cdot x + \mu \cdot y \in F$$

La deuxième condition se traduit par « F est stable par combinaison linéaire ».

Démonstration

Remarque - Elément vide et 0_E
Si F est un sev de E, alors F est non vide est contient nécessairement 0_E.
Réciproquement, si $0_E \in F$, alors F est non vide.
Donc on peut faire évoluer « la recherche de F est-il non vide ? » en « F contient-il 0_E ? »
En outre, si la réponse est non, on peut affirmer que F n'est pas un sev de E (ce que ne permet pas la réponse négative à la première question).

Histoire - Petite citation
« J'ai la confiance la plus ferme que le travail que j'ai consacré à la science exposée ici et qui m'a accaparé une période importante de ma vie, réclamant une mise sous tension extrême de toutes mes forces, ne sera pas perdu.[...] je sais que même si ce travail devait rester en sommeil pendant encore dix-sept ans ou plus, sans emprise sur la Science vivante, il n'en viendra pas moins un temps où il sera tiré de la poussière de l'oubli et où les idées qu'il recèle porteront leurs fruits. [...] Car la vérité est éternelle et divine, et aucune phase du développement de la vérité, si petit que soit le domaine qu'elle comprend, ne peut passer sans laisser de trace; elle perdure, même si l'habit dont des hommes faibles la revêtent tombe en poussière »
Grassmann, Théorie de l'Extension (1862)

Savoir faire - Démontrer que F est un (s.)ev (de E)
Soit $F \subset E$. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$(1') \quad 0_E \in F$$
$$(2) \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \forall (x,y) \in F^2, \quad \lambda.x + \mu.y \in F$$

Exercice
Soit $F \subset E$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

$$(1) \quad F \neq \emptyset$$
$$(2) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \forall (x,y) \in F^2, \quad \lambda.x + y \in F$$

3.2. Exemples

Proposition - Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
L'ensemble des matrices scalaire, l'ensemble des matrices diagonales, l'ensemble des matrices symétriques, l'ensemble des matrices antisymétriques, l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, l'ensemble des matrices triangulaires inférieures sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (ou $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$).

Exercice
A démontrer

Proposition - $\mathbb{K}_n[X]$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration

Proposition - Vision géométrique
Dans $\mathbb{R}^2$: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax+by=0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^2$ (a,b réels fixés, $(a,b) \neq (0,0)$) (droite vectorielle).
Dans $\mathbb{R}^3$: $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=0\}$ est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$ (a,b,c réels fixés, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$) (plan vectoriel). Il y a aussi des droites vectorielles dans $\mathbb{R}^3$.

Proposition - Sev de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$
$\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ sont des s.e.v de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

Démonstration

Exercice
Les ensemble suivants sont-ils des s.e.v de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?
- $\mathcal{P}$: ensembles des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ paires ;
- $\mathcal{I}$: ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ impaires ;
- $F_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(1) = 2f(0)\}$;
- $F_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f(0) = f(1)+1\}$;
- $F_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0\}$.

Et pour l'espace vectoriel des suites numériques :
Exercice
Les ensemble suivants sont-ils des s.e.v de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
- ensemble des suites géométriques de raison q (réel fixé) ;
- ensemble des suites géométriques ;
- ensemble des suites arithmétiques ;
- ensemble des suites convergentes ;
- ensemble des suites convergeant vers 0.

3.3. Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Heuristique - Comme pour les groupes : 2 points de vue

Le nom de sous-espace engendré par une partie A de E donne l'idée du plus petit sous-espace vectoriel de E que l'on peut obtenir en ne prenant que des éléments de A. Un espace strictement plus grand (pour l'inclusion) contient nécessairement des éléments qui ne sont obtenables à partir de combinaison linéaire de A. Ce point de vue correspond bien au nom donné, mais ce n'est pas le point de vue simple mathématiquement qui permet de prouver l'existence.
Le second point de vue consiste à considérer tous les espaces vectoriels qui contiennent la partie A et de prendre parmi ceux-ci le plus petit. Or on sait, qu'en faisant l'intersection des espaces, on obtient nécessairement un ensemble qui contient A (qui est dans tous) et qui est le plus petit. C'est bien le même point de vue choisi que pour les groupes engendrés

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-e.v.

Théorème - Intersection de s.e.v
Soient F_1 et F_2 deux s.e.v de E. Alors $F_1 \cap F_2$ est un s.e.v de E.
Plus généralement, soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de s.e.v de E (I fini ou infini). Alors $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un s.e.v de E.

Démonstration

Si $A \subset E$, $\mathscr{A} = \{B \text{ sev de } E \mid A \subset B\}$ est non vide et admet un plus petit élément :

Définition - Sous espace engendré par une partie
Soit $A \subset E$. L'ensemble des s.e.v de E contenant A admet un plus petit élément pour l'inclusion que l'on appelle sous-espace vectoriel engendré par A, noté $\text{vect}(A)$. C'est l'intersection de tous les s.e.v contenant A.

Démonstration

Pour aller plus loin - Pas de stabilité par réunion. mais une nouvelle opération à la place
La réunion de deux espaces vectoriels n'est pas (en général) un espace vectoriel.
Par contre, certains auteurs notent $A \bigvee B$, l'opération $\text{vect}(A,B)$ définie un peu plus bas.
Cette notation est très compatible avec la suite du cours. On peut la garder en tête pour la suite…

Remarque - Si A est déjà un espace vectoriel
Si A est un s.e.v de E alors $\text{vect}(A) = A$.

Théorème - Caractérisation
Soit $A \subset E$, $A \neq \emptyset$.
$\text{vect}(A)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A :

$$\text{vect}(A) = \{\lambda_1 \cdot a_1 + \cdots + \lambda_n \cdot a_n ;\ n \in \mathbb{N}^*,\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ (a_1, \ldots, a_n) \in A^n\}.$$

Démonstration

Définition - Sous espace vectoriel engendré par une famille
On appelle sous-espace vectoriel engendré par la famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E le s.e.v engendré par $\{x_i ;\ i \in I\}$. C'est donc l'ensemble des combinaisons linéaires (finies) des x_i.

Exemple - Dans le $\mathbb{R}$ev $\mathbb{C}$

Savoir faire - Montrer un espace vectoriel par famille génératrice
Cela peut servir à prouver qu'un ensemble est un espace vectoriel; par exemple

$$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ (x,y,z)=\lambda(1,0,1)+\mu(2,2,1)\}$$
$$=\mathrm{vect}\big((1,0,1),(2,2,1)\big)$$

est un s.e.v de $\mathbb{R}^3$.

L'exercice suivant est à savoir faire :
Exercice
Caractériser par une équation le s.e.v de $\mathbb{R}^3$ engendré par $A=\{(1,1,1),(1,0,1)\}$.

3.4. Somme de sous-espaces vectoriels

$F+G=\mathbf{vect}(F\cup G)$

Soit $(E,+,.)$ un $\mathbb{K}$-e.v.

Définition - Somme d'espaces vectoriels
Soient $F_1,\dots,F_n$ des s.e.v de E ($n\in\mathbb{N}^*$). On appelle somme des s.e.v F_i l'ensemble

$$F_1+F_2+\dots+F_n=\{x_1+x_2+\dots+x_n \mid \forall i\in[\![1,n]\!],\ x_i\in F_i\}$$

Pour aller plus loin - Moins loin
Voici la définition exacte de la réunion vectorielle : $A+B=A\bigvee B$

Théorème - Addition et partie engendrée
$F_1+F_2+\dots+F_n$ est un s.e.v de E et on a $F_1+F_2+\dots+F_n=\mathrm{vect}(F_1\cup\ldots\cup F_n)$ (c'est le plus petit s.e.v de E qui contienne $F_1\cup\ldots\cup F_n$.)

Démonstration

Exercice

Dans $\mathbb{R}^3$, vérifier que $F = \{(x, 0, 0) ; x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x, x, 0) ; x \in \mathbb{R}\}$ sont des s.e.v de $\mathbb{R}^3$ et déterminer $F + G$.

Nous avons vu que $F \cap G$ est un sev. Il n'en est pas de tout du même de $F \cup G$.
Cette notion est remplacée dans le cadre des espaces vectoriels par $F + G$.

Savoir faire - Caractérisations. $x \in F \cap G$**,** $x \in F + G$

On a alors

$x \in F \cap G \Longleftrightarrow x \in F$ et $x \in G$,

$x \in F + G \Longleftrightarrow \exists\, a \in F, b \in G$ tels que $x = a + b$.

Attention - Deux erreurs classiques qui en découlent

• Si $x \in F + G$ et $x \notin G \not\Rightarrow x \in F$.

• $E = F \oplus G = F \oplus H \not\Rightarrow G = H$.

Ecrire cela serait confondre les notions de supplémentarité et de complémentarité !

Somme directe

Proposition - Somme directe

Soient $F_1, \dots, F_n$ des s.e.v de E $(n \in \mathbb{N}^*)$. Il y a équivalence de :

(i) tout élément x de $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$ s'écrit de manière unique sous la forme
$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \text{ avec } \forall\, i, x_i \in F_i$$

(ii) $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0_E \Rightarrow \forall\, i, x_i = 0_E$

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que les F_i sont en somme directe et

on note leur somme
$$F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i.$$

Pour aller plus loin - Vision physicienne
En science physique, un excellent réflexe fréquent est celui qui affirme : un vecteur est nul si et seulement si ses coordonnées sont nulles. On passe ainsi aisément d'une équation (vectorielle) à n équation scalaire.
Il arrive de faire la transformation dans les deux sens...

Démonstration

Corollaire - Cas de 2 s.e.v
Soient F_1 et F_2 deux s.e.v de E. F_1 et F_2 sont en somme directe si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

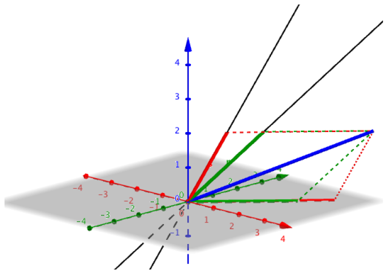
Définition - Espaces supplémentaires
F_1 et F_2 deux s.e.v de E sont dits supplémentaires si $E = F_1 \oplus F_2$,
ce qui équivaut à :
1. $E = F_1 + F_2$
2. $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$

ou à
tout vecteur de E se décompose de manière unique comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2.

Attention - Notation piégée
Lorsqu'on écrit : $E = F_1 \oplus F_2$, il y a bien DEUX affirmations (deux propositions ou deux verbes) :
— $E = F_1 + F_2$
— La somme est directe : $F_1 \oplus F_2$ ou $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$

Exemple - Dans le $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{C}$

Représentation - Deux espaces différents supplémentaires à un même troisième



Les deux droites vectoriels sont toutes les deux supplémentaires au plan $z = 0$ dans $\mathbb{R}^3$.
On peut y voir la décomposition unique de $z = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ pour ces deux espaces supplémentaires. Même si y_1 et y_2 (même plan), ce sont néanmoins des vecteurs différents.

Remarque - Autour de la notion de supplémentaire
• On dit aussi que F_2 est un supplémentaire de F_1 (dans E).
• Ne pas confondre supplémentaire et complémentaire, le complémentaire d'un s.e.v n'est jamais un s.e.v
• E admet un seul supplémentaire, c'est $\{0_E\}$ (et réciproquement).
• Il existe, en général, une infinité de supplémentaires d'un s.e.v (voir l'illustration dans la marge)
Dans ce genre d'exercice, on exploite souvent le raisonnement en analyse-synthèse.

Exercice
Montrer que $\mathscr{P}$ (ensembles des fonctions paires) et $\mathscr{I}$ (ensemble des fonctions impaires) sont des s.e.v supplémentaires de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

4. Applications linéaires

4.1. Définitions et exemples

Définition - Application linéaire
Soit u une application de E dans F. On dit que u est linéaire si

(1) $\forall (x,y)\in E^2, u(x \underset{E}{+} y) = u(x) \underset{F}{+} u(y)$

(2) $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, u(\lambda \underset{E}{.} x) = \lambda \underset{F}{.} u(x)$

Histoire - Introduction des espaces vectoriels et des applications linéaires
Les applications linéaires (et les espaces vectoriels associés) se sont imposées petit à petits dans les manuel de mathématiques supérieures au début du XXe siècle... Elles étaient initialement considérée avec beaucoup d'attention, le domaine semblait difficile (à l'inverse des groupes...). Aujourd'hui, cela se fait vite dès les premiers mois dans les études supérieures, partout dans le monde.
Cette universalité est étonnante : la définition des espaces vectoriels était loin d'être uniforme dans chaque pays. Il semble que ce soit la multiplication des espaces vectoriels de fonctions (et en particulier leurs exploitation par Stefan Banach) qui ait justifié cette introduction de plus en plus précoce.

Savoir faire - Montrer qu'une application est linéaire
$u : E \to F$ est linéaire si et seulement si

$$\forall (x,y)\in E^2, \forall (\lambda,\mu)\in \mathbb{K}^2, u(\lambda.x+\mu.y) = \lambda.u(x)+\mu.u(y)$$

Démontrons qu'on a bien cette équivalence.

Démonstration

Proposition - Image par une application linéaire
Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Alors

(1) $u(0_E) = 0_F$

(2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in E^n, \forall (\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n, u\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i.x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.u(x_i)$

Dans le cas d'une famille infinie $(x_i)_{i\in I}$, si $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille presque nulle, on a aussi
$$u\Big(\sum_{i\in I} \lambda_i.x_i\Big) = \sum_{i\in I} \lambda_i.u(x_i).$$
L'image d'une combinaison linéaire est donc la combinaison linéaire des images (avec les mêmes coefficients).

Définition - endo/iso/auto -morphisme
On appelle
- isomorphisme de E dans F toute application linéaire bijective de E dans F;
- endomorphisme de E toute application linéaire de E dans E;
- automorphisme de E un isomorphisme de E dans E;
- forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

On note
- $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F (éventuellement $\mathscr{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ s'il y a une ambiguité sur le corps $\mathbb{K}$) ;
- $\mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ ou E^* l'ensemble des formes linéaires sur E, aussi appelé dual de E;
- $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E (i.e. $\mathscr{L}(E,E)$).

Remarque - Eléments neutres
$Id_E \in \mathscr{L}(E)$ (élément neutre pour $\circ$) ;
l'application nulle de E dans F est linéaire (élément neutre pour $+$).

Exemple - Donner des exemples

Exercice
Soit $E = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ constitué des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Soit D l'application qui à une fonction de E associe sa dérivée et I l'application qui à une fonction f associe la primitive de f qui s'annule en 0.
Vérifier que D et I sont des endomorphismes de E. S'agit-il d'isomorphismes ? Que peut on dire de $D\circ I$ et de $I\circ D$?

Pour aller plus loin - Pourquoi s'intéresser aux applications linéaires
Ce que nous apprend Newton des lois de la physique (démontré d'une certaine façon par les formules de Taylor) : le monde est en première approximation linéaire.
Une application quelconque vérifie toujours au voisinage d'un point $M_0(x_0,y_0,z_0)$:

$$f(M) = f(M_0) + \overrightarrow{u_{f,M_0}}(x-x_0, y-y_0, z-z_0) + o(\|(x-x_0,y-y_0,z-z_0)\|)$$

avec $\overrightarrow{u_{f,M_0}}$, une application linéaire!

Attention - Montrer la bijectivité
L'exemple précédent montrer qu'il faut bien les deux conditions $f\circ g = id$ ET $g\circ f = id$, pour pouvoir affirmer que f (ou g) est bijective...

Exercice
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. On considère l'application

$$\phi : \begin{array}{ll} F\times G & \to E \\ (x,y) & \mapsto x+y. \end{array}$$

Montrer que ϕ est linéaire. A quelle condition sur F et G est-ce un isomorphisme ? Quel est alors l'isomorphisme réciproque ?

Définition - Image et noyau
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle
- noyau de u, l'ensemble $\operatorname{Ker} u = \{x\in E \mid u(x) = 0_F\} = u^{-1}(\{0_F\})$
- image de u, l'ensemble $\operatorname{Im} u = \{y \in F \mid \exists x\in E, y = u(x)\} = u(E)$

Théorème - Transformation par u linéaire, en sev
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
- $\operatorname{Ker} u$ est un s.e.v de E, $\operatorname{Im} u$ est une s.e.v de F
- Plus généralement, si V est un s.e.v de E et W un s.e.v de F, alors $u^{-1}(W)$ est s.e.v de E et $u(V)$ est un s.e.v de F.

On rappelle que $u(V) = \{u(x), x\in V\}$ et $u^{-1}(W) = \{x \in E \mid u(x)\in W\}$

Démonstration

Exercice
Montrer que l'application

$$u : \begin{array}{ll} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto (x+y-z, x-y+2z) \end{array}$$

est une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ et déterminer son noyau et son image.

Théorème - Critère d'injectivité et de surjectivité
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

$$u \text{ est injective } \Leftrightarrow \text{Ker } u = \{0_E\}$$

$$u \text{ est surjective } \Leftrightarrow \text{Im } u = F$$

Pour aller plus loin - Rappel
Ces théorèmes ainsi que les définitions associées nous rappelle les résultat vu sur les morphismes de groupes

Démonstration

Exercice
L'application linéaire D qui à $P \in \mathbb{K}[X]$ associe P' est-elle injective ? surjective ?

4.2. Cas général : structure de $\mathscr{L}(E,F)$

Théorème - Structure d'espace vectoriel
$(\mathscr{L}(E,F),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque - Interprétation
Cela signifie en particulier que la somme de deux applications linéaires est linéaire, ainsi que $\lambda.f$.
On ne fera pas de démonstration.

Théorème - Composition linéaire
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-e.v. et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$.

Démonstration

Théorème - u^{-1} ?
La réciproque d'un isomorphisme de E dans F est un isomorphisme de F dans E.

Démonstration

Définition - Espaces isomorphes
Deux $\mathbb{K}$-e.v. E et F tels qu'il existe un isomorphisme de E dans F sont dits isomorphes.

Théorème - Linéarité de la composition
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors l' application

$$\begin{array}{ll} \mathscr{L}(F,G) & \to \mathscr{L}(E,G) \\ v & \mapsto v \circ u \end{array}$$

est linéaire i.e

$$(\lambda.v_1 + \mu.v_2) \circ u = \lambda.v_1 \circ u + \mu.v_2 \circ u$$

Soit $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors l' application

$$\begin{array}{ll} \mathscr{L}(E,F) & \to \mathscr{L}(E,G) \\ u & \mapsto v \circ u \end{array}$$

est linéaire i.e

$$v \circ (\lambda.u_1 + \mu.u_2) = \lambda.v \circ u_1 + \mu.v \circ u_2$$

Démonstration

4.3. Cas particulier de $\mathscr{L}(E)$

Théorème - Structure de $\mathscr{L}(E)$
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.

— $(\mathscr{L}(E),+)$ est un groupe commutatif;
— $(\mathscr{L}(E),+,.)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel;
— $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$ est un anneau non commutatif (sauf si E de dimension finie égale à 1), en particulier la composée de deux endomorphismes de E est un endomorphisme de E;
— $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u,v) \in \mathscr{L}(E)^2, (\lambda.v) \circ u = \lambda.(v \circ u) = v \circ (\lambda.u)$

On résume ces propriétés en disant que $(\mathscr{L}(E),+,\circ,.)$ est une algèbre sur

$\mathbb{K}$.

Exercice

Donner un contre-exemple pour la commutativité.

Pour aller plus loin - Groupe des inverses

Puisque $(\mathcal{L}(E),+,\circ)$ est un anneau, l'ensemble $(\mathcal{L}(E),\circ)^\times$ des inverses de $\mathcal{L}(E)$, plutôt noté $(GL(E),\circ)$ est un groupe : le groupe linéaire.

Proposition - Règles de calcul dans $\mathcal{L}(E)$

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On définit pour $n \in \mathbb{N}$ u^n par

$$u^0 = Id_E \text{ et } \forall n \geqslant 1, u^n = u \circ u^{n-1} = \underbrace{u \circ u \ldots \circ u}_{n facteurs}.$$

Pour u et v qui commutent ($u \circ v = v \circ u$) on a les formules suivantes :

$(u+v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k}$ (Formule du binôme)
$u^n - v^n = (u-v)\circ(u^{n-1} + u^{n-2}\circ v + \ldots + u \circ v^{n-2} + v^{n-1})$ (Factorisation)
$Id_E - v^n = (Id_E - v)\circ(Id_E + v + v^2 + \ldots + v^{n-2} + v^{n-1})$

On note parfois $u \circ v = uv$.

Attention - uv

En algèbre, uv n'est JAMAIS $u \times v$, cela n'a pas de sens.
(Il n'y a pas de produit dans les espaces vectoriels)

Application - A compléter

Pour aller plus loin - Relation polynomiale

*Il faut **typiquement** interpréter ces relations avec des polynômes.*

Ici, on note $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $Q = X$ et $T = \sum_{k=0}^m b_k X^k$.

On a donc $v = P(u)$, $u = Q(u)$ et $w = T(u)$.

Puis $v \circ u = P(u)\circ Q(u) = (P\times Q)(u) = (Q \times P)(u) = u \circ v$.

De même $v \circ w = (P \times T)(u) = (T \times P)(u) = w \circ v$

Remarque - Démonstration

Il s'agit toujours de la même démonstration, celle vu avec les polynômes.

Exercice

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que si $v = \sum_{k=0}^n a_k u^k$ (avec $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{K}$), alors v commute avec toute puissance de u, puis que v commute avec $w = \sum_{k=0}^m b_k u^k$ (avec $m \in \mathbb{N}$, $b_k \in \mathbb{K}$).

Proposition - Groupe linéaire

La réciproque d'un automorphisme de E est un automorphisme de E.
L'ensemble des automorphismes de E muni de la loi $\circ$ est donc un groupe (en général non commutatif) appelé groupe linéaire et noté $GL(E)$.

Démonstration

Définition - Homothéties de E

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, l'endomorphisme $\lambda.Id_E : x \mapsto \lambda.x$ s'appelle l' homothétie de rapport λ.
Une homothétie de rapport non nul est un automorphisme.

4.4. Projecteurs et symétries

Projecteurs

Représentation - Représentation de la projection

Ici $\mathbb{R}^3 = \text{vect}(a) + \mathcal{P}$.

On projete u sur $\mathcal{P}$, on voit que $u = a' + p(u)$ avec a' et a colinéaires, alors que $p(u) \in \mathcal{P}$.

Définition - Projecteur
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On sait que tout $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.
L'application

$$p: \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto x_1 \end{array}$$

s'appelle le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 (ou de direction E_2) ;

$$q = Id_E - p: \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto x_2 \end{array}$$

s'appelle le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1 (ou de direction E_1).
On dit que p et q sont des projecteurs associés (car ils sont définis par la même décomposition de E en s.e.v supplémentaires).

Remarque - Rappel (?) de la projection dans le plan
Le terme de projecteur généralise la notion de projection dans l'ensemble des vecteurs du plan ou de l'espace. Toutefois on parle également de projection sur E_1 parallèlement à E_2.

Proposition - Propriétés premières d'un projecteur
On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$. Soit p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2, alors :

- p est un endomorphisme de E;
- $E_1 = \{x \in E \mid p(x) = x\}$ (ensemble des invariants par p);
- $\operatorname{Im} p = E_1$ et $\operatorname{Ker} p = E_2$;
- $p \circ p = p$.

Démonstration

Remarque - Relation entre les deux projecteurs
On a aussi $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.
En effet si $x = x_1 + x_2$, $p \circ q(x) = p(x_2) = 0\ldots$

Théorème - Caractérisation
Soit p un endomorphisme de E.
Alors p est un projecteur si et seulement si $p \circ p = p$.
On a alors $E = \text{Im }\ p \oplus \text{Ker } p$ et p est le projecteur sur $\text{Im }\ p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.

Démonstration

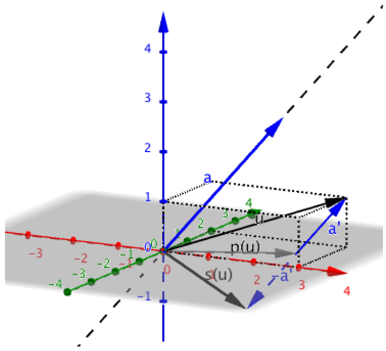
Symétries

Définition - Symétrie
Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On sait que tout $x \in E$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$.
On appelle symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 (ou symétrie d'axe E_1 de direction E_2) l'application

$$s: \begin{array}{ll} E & \to E \\ x = x_1 + x_2 & \mapsto x_1 - x_2 \end{array}$$

Proposition - Propriétés premières de s
On suppose que $E = E_1 \oplus E_2$.
Soit s la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2. Alors
- si p est le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 on a $s = 2p - Id_E$;
- s est un endomorphisme de E et $s \circ s = Id_E$ (on dit que s est une involution de E).

Représentation - Représentation des symétries
Toujours avec les mêmes espaces vectoriels



Démonstration

Théorème - Caractérisation
Soit $s \in \mathcal{L}(E)$.
Alors s est une symétrie si et seulement si $s \circ s = Id_E$.
On a alors $E = \text{Ker}\,(s - Id_E) \oplus \text{Ker}\,(s + Id_E)$ et s est la symétrie par rapport à

Ker $(s - Id_E)$ parallèlement à Ker $(s + Id_E)$.

Démonstration

Exercice
$E = \mathbb{R}^2$, on désigne par f l'endomorphisme de E défini par $f((x, y)) = (2x - y, 2x - y)$.
Montrer que f est un projecteur dont on précisera les éléments caractéristiques. On notera $E_1 = \operatorname{Im} f$ et $E_2 = \operatorname{Ker} f$.
Donner la détermination analytique de la symétrie par rapport à E_2 parallèlement à E_1.

5. Familles de vecteurs

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

5.1. Sur-famille, sous-famille

Définition - Sur-famille et sous-famille
Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E.
On appelle sur-famille de $(x_i)_{i \in I}$ toute famille $(x_j)_{j \in J}$ d'éléments de E telle que $I \subset J$.
On appelle sous-famille de $(x_i)_{i \in I}$ toute famille $(x_k)_{k \in K}$ d'éléments de E telle que $K \subset I$.

Exemple - Interprétation géométrique

5.2. Familles génératrices de E

Définition - Famille génératrice de F, sev de E
Soient $x_1, \ldots, x_n$ n éléments de E.
On dit que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est génératrice de F si $F = \operatorname{vect}(x_1, \ldots, x_n)$,

c'est-à-dire si

$$\forall x \in F, \exists(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n \mid x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot x_i \qquad \text{et} \qquad \forall\ i \in \mathbb{N}_n, x_i \in F$$

Démonstration

Remarque - Partie génératrice
On notera en particulier que si $F = E$, on a toujours $x_i \in E$ et donc la première caractéristique suffit.
Dans ce cas, on parle parfois de : partie $\{x_1,\ldots,x_n\}$ génératrice de E.

Exercice

Donner des exemples de familles génératrices de :
- $\mathbb{R}^2$
- $\mathbb{R}^3$
- le $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{C}$
- $\mathbb{K}_n[X]$
- dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, une famille génératrice de $\{y \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid y'' + y' - 2y = 0\}$ est

Attention - Ne pas s'emballer pour une famille génératrice
Parfois, en cherchant une famille génératrice de F, on se rend compte que tout vecteur de F s'écrit comme une c.l. des vecteurs $(f_1, f_2, \ldots f_p)$.
L'erreur consisterait à écrire que $F = \text{vect}(f_1, f_2, \ldots f_p)$.
La seule chose qu'on ait est une inclusion : $F \subset \text{vect}(f_1, f_2, \ldots f_p)$.
Il faut donc vérifier l'inclusion réciproque : est-ce que tout $f_i \in F$ (si F est un bien un espace vectoriel, cela est suffisant) ?

Remarque - Permutation
L'image d'une famille génératrice de E par une permutation des vecteurs est encore génératrice.
(Une famille est une liste ou un n-uplet et non un ensemble.
Si la famille (x_i) est génératrice de E, ajouter d'autres vecteurs à la famille ne peut pas faire perdre le caractère générateur de la famille :

Proposition - (Directe)
Toute sur-famille d'une famille génératrice de E est encore génératrice de E.

Démonstration

En revanche, enlever des vecteurs peut être problématique

Définition - Famille génératrice minimale de E
On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice minimale de E, si toute sous-famille stricte $(x_i)_{i\in H}$ n'est pas génératrice (avec $H \subset I$ et $H \neq I$)

Définition - Généralisation (I potentiellement infini)
La famille d'éléments de E $(x_i)_{i\in I}$ (I infini) est dite génératrice de E, si $\text{vect}((x_i)_{i\in I}) = E$,
c'est-à-dire si tout élément de E s'écrit comme une combinaison linéaire d'un nombre fini de x_i.

5.3. Familles libres, liées

Définition - Famille libre (ou vecteurs linéairement indépendants)
Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de vecteurs de E.
- On dit que cette famille est une famille libre (ou que $x_1,\dots,x_n$ sont des vecteurs linéairement indépendants) si
$$\forall(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\ \lambda_1.x_1+\dots+\lambda_n.x_n = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$
- Si la famille n'est pas libre, on dit qu'elle est liée (ou que $x_1,\dots,x_n$ sont des vecteurs linéairement dépendants), c'est-à-dire qu'il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\neq(0,\dots,0)$ (non tous nuls) tel que $\lambda_1.x_1+\dots+\lambda_n.x_n = 0_E$.

Remarque - Interprétation importante!
On a donc qu'une famille est libre si la seule combinaison linéaire des éléments de cette famille qui est nulle est celle dont les coefficients sont égaux à 0.

Pour aller plus loin - Famille libre
Une famille libre est d'une certaine façon un ensemble de vecteurs qui n'a pas d'éléments superflus.

Proposition - Cas de famille liée
Soit $(x_1,\dots,x_n)$ une famille de vecteurs de E.
- Si $n=1$, la famille est liée si et seulement si $x_1 = 0_E$.
- Si l'un des x_i est égal à 0_E, alors la famille est liée.
- Si $x_i = x_j$ pour $i\neq j$, alors la famille est liée.
- Si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres alors la famille est liée.
- Réciproquement, si $n\geqslant 2$ et si la famille est liée, alors l'un des vecteurs au moins est combinaison linéaire des autres.

Pour aller plus loin - Module (2)
Pour les espaces vectoriels si il existe $\lambda_i\neq 0$, alors $x_i = \sum_{j\neq i}\frac{-\lambda_j}{\lambda_i}x_j$, i.e. x_i est une CL des x_j. Ce raisonnement marche bien car $\mathbb{K}$ est un corps et donc λ_i est inversible (d'où la division par λ_i).
Pour les modules, les éléments de l'anneau ne sont pas (en règle générale) inversible. C'est essentiellement ici que commence la différence entre les modules et les espaces vectoriels.

Démonstration

Remarque - Colinéarité (DEUX vecteurs)
(x_1, x_2) est une famille liée si et seulement si x_1 et x_2 sont colinéaires i.e.

$$\exists \alpha \in \mathbb{K} \mid x_2 = \alpha x_1 \text{ ou } x_1 = \alpha x_2$$

Exercice
Compléter :
• dans $\mathbb{R}^3$ avec $x_1 = (1,0,2), x_2 = (1,1,1) = x_3$
(x_1, x_2, x_3) est
$(x_1, x_2, 2x_3)$ est
(x_1, x_2) est
(x_1) est
• dans le $\mathbb{R}$-e.v $\mathbb{C}$
$(1, i)$ est
$(1, j)$ est
$(1, i, j)$ est
• dans $\mathbb{R}^2$, $\Big((1,0),(0,1)\Big)$ est
• dans $\mathbb{K}_n[X]$, $(1, X, X^2, \dots, X^n)$ est
• dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $(\cos, \sin)$ est

Exercice classique :
Exercice
On note $f_k : x \mapsto e^{-kx}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est une famille libre de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

La proposition suivante découle des définitions :

Proposition - Manipulation des termes de la famille
Une permutation des vecteurs ne change pas le caractère libre ou lié d'une famille.
Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
Toute sur-famille d'une famille liée est liée.

La démonstration, simple est néanmoins pédagogique.

Démonstration

Définition - Famille libre maximale
On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est une famille libre maximale (dans E),
si toute sur-famille stricte $(x_i)_{i\in J}$ n'est pas libre (avec $I \subset J$ et $I \neq J$)

Définition - Généralisation
Une famille infinie $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est dite libre si toute sous-famille finie est libre.

Exemple - Famille libre infinie...

Et plus généralement :

Théorème - Degrés echelonnés
Toute famille de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degrés échelonnés (distincts deux à deux...) est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

Pour aller plus loin - Autre démonstration
Dans ce genre de proposition, il est possible de faire indifféremment une démonstration par l'absurde ou une récurrence

Démonstration

5.4. Image d'une famille de vecteurs par une application linéaire

Théorème - Application linéaire et familles de vecteurs
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

— Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs de E alors

$$u\Big(\mathrm{vect}(x_i, i \in I)\Big) = \mathrm{vect}\Big(u(x_i), i \in I\Big).$$

— Si u est injective alors l'image par u d'une famille libre de E est une famille libre de F.
Réciproquement, si l'image par u de n'importe quelle famille libre de E est libre, alors u est injective.

— Si u est surjective alors l'image par u d'une famille génératrice de E (s'il en existe) est une famille génératrice de F.

— Si u est un isomorphisme, l'image par u d'une base de E (s'il en existe) est une base de F. Réciproquement, si il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que son image par u soit une base de F, alors u est un isomorphisme.

Démonstration

Remarque - Réciproque pour la surjectivité ?
Cela donnerait : Si l'image par u d'une (de toute) famille génératrice de E est une famille génératrice de F alors u est surjective.
En fait, on n'a pas besoin du fait que la famille initiale soit génératrice de E.
Donc des hypothèses moins fortes.

Exercice

Retrouver l'image de l'application linéaire

$$u: \begin{array}{ll} \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto (x+y-z, x-y+2z) \end{array}$$

6. Bilan

Synthèse

⇝ Les espaces vectoriels est le nom savant pour les ensembles dans lesquels les éléments (vecteurs) peuvent sans difficulté s'additionner et être multiplié par des constantes d'un corps $\mathbb{K}$. Une combinaison linéaire est par définition l'opération : $(\lambda,\mu,u,v)\in\mathbb{K}^2\times E^2\mapsto\lambda u+\mu v\in E$. E est donc le monde des combinaisons linéaires, ou plus rapidement de la linéarité.

⇝ Les éléments de E s'écrivent donc les uns à partir des autres par additions, ou multiplication par une constante. Les éléments se décrivent les uns par rapport aux autres de manières multiples. Nous reviendrons sur cette non-unicité au chapitre suivant

⇝ Les applications linéaires sont les applications de transcriptions de structure d'espaces, tout simplement. De nombreuses définitions se développent alors : automorphismes, formes linéaires, noyau et image…
Des propriétés se filent : l'injectivité de u est toujours associée à des familles libres, la surjectivité de u est associée à des familles génératrices.

⇝ Deux familles d'applications linéaires : les projecteurs et les symétries vectorielles nous intéressent. La première permet de se concentrer sur une partie de l'espace; on parle de la réduction de l'espace sur ces sous-espaces.
C'est une partie importante en seconde année.

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

— Savoir-faire - Démontrer que F est un (s.)ev (de E)
— Savoir-faire - Montrer un espace vectoriel par famille génératrice
— Savoir-faire - Caractérisations : $x\in F\cap G$ et $x\in F+G$
— Savoir-faire - Montrer qu'une application est linéaire

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$\text{vect}(A)(=<A>)$	Sous-espace vectoriel de E engendré par A	$\text{vect}(A)=\{\sum_{i=1}^k\lambda_i a_i\ k\in\mathbb{N},\lambda_i\in\mathbb{K},a_i\in A\}$	C'est le plus petit sev de E contenant A.
$E=F+G$	E est la somme des espaces F et G	$\forall\ x\in E,\exists\,(y,z)\in F\times G$ tels que $x=y+z$	$F+G=\text{vect}(F\cup G)$
$E=F\cap G$	E est l'intersection des espaces F et G	$\forall\ x\in E,\ x\in F$ et $x\in G$	
$E=F\oplus G$	E est la somme directe des espaces F et G	$\forall\ x\in E,\exists\,!(y,z)\in F\times G$ tels que $x=y+z$	Deux informations : $E=F+G$ et $F\cap G=\emptyset$
$F=F_1\oplus F_2\cdots\oplus F_k$	E est la somme directe des espaces F_i	$\forall\ x\in F,\exists\,!(x_1,x_2,\dots x_k)\in F_1\times F_2\cdots\times F_k$ tels que $x=\sum_{i=1}^k x_i$	Deux informations : $F=F_1+F_2+\cdots+F_k$ et l'écriture de 0 est unique : $0=\sum_{i=1}^k x_i\Rightarrow\forall\ i\in\mathbb{N}_k$, $x_i=0$
$\mathscr{L}(E,F)$	Ensemble des applications linéaires de E vers F		On note $\mathscr{L}(E)$ l'espace $\mathscr{L}(E,E)$
$GL(E)$	Groupe (linéaire) des automorphismes de E		
$\text{Im}\,(u)$	Image de l'application u	$\text{Im}\,(u)=\{u(x);x\in E\}\subset F$	u surjectif ssi $\text{Im}\,u=F$
$\text{Ker}\,(u)$	Noyau de l'application u	$\text{Ker}\,(u)=\{x\in E\mid u(x)=0\}\subset E$	u injectif ssi $\text{Ker}\,u=\{0\}$

Retour sur les problèmes

117. Enormément! Il faut même souvent ajouter des hypothèses, ainsi en mécanique quantique les objets sont des vecteurs d'un espace vectoriel normé muni d'un produit sesquilinéaire (=scalaire sur $\mathbb{C}$) complet. Il espace d'un espace dit de Hilbert.
118. $F\cap G$ est toujours un sev de E. Ce n'est pas le cas de $E\cup G$.
$F\cup G$ est un sev de E ssi $F\subset G$ ou $G\subset F$

119. En prenant, dans $\mathbb{R}^2$, $L = \text{vect}(0,1)$, $M = \text{vect}(1,1)$ et $N = \text{vect}(1,0)$, on trouve $M+N = \mathbb{R}^2$ et donc $L \cap (M+N) = L$, alors que $L \cap M = \{0\} = L \cap N$ et donc $L \cap M + L \cap N = \{0\}$. Pour le reste, on a les trois inclusions. A démontrer...
120. Cours : Application linéaire
121. Cours : le rôle important des projecteurs !