

Devoir à la maison n°9

Exercice - Calcul de déterminant par blocs

On considère dans cette partie A, B, C, D des éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que $D \times C = C \times D$

1. Soit la matrice définie par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$$

A l'aide du produit $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & O_n \\ -C & I_n \end{pmatrix}$, montrer que si la matrice D est inversible alors

$$\det(M) = \det(AD - BC)$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{C}$, on pose $D_x = D - xI_n$ et $M_x = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D_x \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

(a) Montrer que $\det(M_x) = \det(AD_x - BC)$ pour tout nombre complexe $x \notin S$ où S est un sous-ensemble fini de $\mathbb{C}$.

(b) En déduire que l'on a $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC)$ dès que $D \times C = C \times D$.

Exercice - Théorème de Cayley-Hamilton

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On définit pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\chi(t) = \det(tI_n - M)$$

appelé la fonction caractéristique de M .

1. On note $\mu_p = (-1)^p \sum_{I \subset \binom{\mathbb{N}_n}{n-p}} \det M^{I \wedge I}$ où $M^{I \wedge I}$ est la matrice M auquel on a enlevé les lignes et les colonnes d'indices $i \in I$.
Calculer μ_1 et μ_n .

2. Montrer que χ est une fonction polynomiale en t , de degré n .
Plus précisément, montrer que

$$\chi_M(t) = t^n + \mu_1 t^{n-1} + \mu_2 t^{n-2} + \cdots + \mu_{n-1} t + \mu_n$$

3. Montrer de la même manière que $L(t) = {}^t \text{com}(tI_n - M)$ est une fonction polynomiale en t , de degré $n - 1$ et à coefficients dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
4. Calculer $L(t) \times (tI_n - M)$, montrer que l'on obtient une matrice colinéaire à I_n . Exprimer ce coefficient de colinéarité en fonction de $\chi_M(t)$.
5. En déduire la relation de Cayley-Hamilton :

$$\chi_M(M) = 0$$