Chapitre 28

Espace vectoriel de dimension finie

Résumé -

Les espaces engendrés par une famille finie de vecteurs sont de dimension finie. On démontre alors que, toutes les familles libres et génératrices de cet ensemble F ont le même cardinal. Cet invariant (appelé dimension) est essentiel dans l'étude des espaces de dimension finie et permet de simplifier l'étude.
Nous concentrons sur les forme linéaire qui sont des applications linéaires des plus simples : les noyaux de ces applications sont des hyperplan (de co-dimension 1, i.e. supplémentaire à un espace de dimension 1). Dans le cas général, les applications linéaires sont des matrices (et réciproquement). Nous trouverons alors un résultat important qui formalise une heuristique sur les systèmes : le théorème du rang. Si on change de base, les applications ne changent pas, seule la matrice de description évolue. Il doit donc y avoir un lien très profond entre les matrices associées à une même application linéaire mais écrite dans des bases différentes. Matriciellement, il s'agit de la relation de similitude entre matrices...

Sommaire

1. Problèmes

? Problème 122 - Combinaison linéaire

Est-ce que $(2,1)$ est une combinaison linéaire de $(1,1)$ et de $(1,2)$?
Assurément ? Faut-il nécessairement connaître les nombres α et β tels que $(2,1)=\alpha(1,1)+\beta(1,2)$ pour répondre à la question ?
Et $(2,1,0)$ est une combinaison linéaire de $(1,1,1)$ et de $(1,2,1)$?

? Problème 123 - Combinaison linéaire (unique)

Et $(2,1,0)$ est une combinaison linéaire de $(1,1,1)$ de $(1,2,1)$, de $(1,2,3)$ et de $(1,-1,0)$.
Il semble que plus on ajoute de vecteurs dans la combinaison linéaire, « plus la réponse à la question précédente est vraie ».
Et y a-t-il unicité dans cette écriture ? Est-ce important ?

? Problème 124 - Coordonnées et projections

Si $\mathscr{B}=(e_1,\dots e_n)$ est une base de E, on sait que la description de chaque vecteur est unique :

$$\forall\, x\in E, \exists\,!(x_1,\dots x_n) \qquad \text{tel que} x=\sum_{i=1}^n x_i e_i$$

Notons $[\cdot]_i^{\mathscr{B}} : x\mapsto x_i$. Alors clairement $[\lambda x+\mu y]_i^{\mathscr{B}}=\lambda[x]_i^{\mathscr{B}}+\mu[y]_i^{\mathscr{B}}$, donc cette application est linéaire. C'est l'application i-ieme coordonnées.
Et si au lieu de découper E en espace de dimension 1, on le découpe en espace plus gros : $E=\oplus_{i=1}^r E_i$.
Que peut-on dire de $x\mapsto x_i$ avec $x=\sum_{i=1}^r x_i$ où pour tout $i\in\mathbb{N}_r$, $x_i\in E_i$.

? Problème 125 - $f\in\mathscr{L}(E,F)$ avec E et F de dimension finie

On suppose que $\mathscr{B}=(e_1,\dots e_p)$ est une base de E et $\mathscr{C}=(f_1,\dots f_n)$, une base de F.
Alors $f\in\mathscr{L}(E,F)$ est parfaitement connue par l'ensemble des valeurs

$$\forall\, j\in\mathbb{N}_p, \qquad f(e_j)=\sum_{i=1}^n \lambda_{i,j} f_i$$

Donc la connaissance de f est équivalente à celle de $(\lambda_{I,j})$, et donc à celle d'une matrice.
On a donc, pour deux bases fixées a priori $\mathscr{B}=(e_1,\dots e_p)$ est une base de E et $\mathscr{C}=(f_1,\dots f_n)$, une bijection :

$$\mathscr{L}(E,F)\longrightarrow \mathscr{M}_{n,p}$$

Les opérations $+, \times \dots$ se correspondent-elles ?
Et plus généralement, comment ces deux points de vue s'éclairent-ils mutuellement ?

? Problème 126 - Changement de bases

On vient de voir que pour deux bases fixées a priori $\mathscr{B} = (e_1, \dots e_p)$ est une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, \dots f_n)$, on a une bijection :

$$\mathscr{L}(E,F) \longrightarrow \mathscr{M}_{n,p}$$

Et si on change de base, mais qu'on garde l'application linéaire f, que peut-on dire des matrices qu'on obtient ?

2. Bases et dimension

2.1. Existence et unicité de l'écriture de tout vecteur dans une base

Définition - Base d'un espace vectoriel
On dit qu'une famille de vecteurs de E est une base de E
si elle est une famille libre et génératrice de E.

Attention - Non unicité
On dit bien UNE base et non LA base de E…

Exemple - Nombreux exemples

Proposition - Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et de $\mathbb{K}_n[X]$
On définit la famille $(e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de $\mathbb{K}^n$ par

$$e_1 = (1,0,\dots,0); e_2 = (0,1,0,\dots,0); \dots; e_n = (0,\dots,0,1).$$

Alors cette famille est une base du $\mathbb{K}$-e.v $\mathbb{K}^n$ appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.
La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille $(E_{i,j})_{i\in\mathbb{N}_n, j\in\mathbb{N}_p}$.
La base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ est $(1,X,X^2,\dots,X^n) = (X^i)_{0\leqslant i\leqslant n}$, celle de $\mathbb{K}[X]$ est $(X^i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Pour aller plus loin - Pour les impatients…
Existent-ils deux bases de $\mathbb{C}^4$ telles que les seuls vecteurs communs à ces deux bases soient $(,0,1,1)$ et $(1,1,0,0)$?
A quelle condition portant sur le scalaire x, les vecteurs $(1,1,1)$ et $(1,x,x^2)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?
A quelle condition portant sur le scalaire x, les vecteurs $(0,1,x)$, $(x,0,1)$ et $(x,1,1+x)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice
Déterminer une base du $\mathbb{R}$-e.v. $\mathbb{C}^n$.

Remarque - Démonstration de la base canonique
On ne démontre pas le nom de canonique. Il s'agit en fait d'une trace de l'histoire des mathématiques.
Quant à la démonstration de la base, on voit que c'est celle qu'on utilise depuis toujours…

Théorème - Caractérisation de la base
Une famille $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si, pour tout $x \in E$, il existe une unique famille $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ telle

que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ s'appellent les coordonnées (ou composantes) de x dans la base $\mathscr{B}$.

Heuristique - La fonction Φ

D'après ce théorème, si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors

$$\Phi_{\mathscr{B}} : \mathbb{K}^n \longrightarrow E, \qquad (\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

est une application bijective : $\forall\, x \in E, \exists\,!(\lambda_i)_i$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot e_i$.
Les coordonnées de x sont alors les antécédents de x par $\Phi_{\mathscr{B}}$.
Pour la démonstration qui va suivre, on va montrer :

- $\Phi_{\mathscr{B}}$ est injective si et seulement si $\mathscr{B}$ est libre.
- $\Phi_{\mathscr{B}}$ est surjective si et seulement si $\mathscr{B}$ est génératrice de E.

Démonstration

Attention - Ne pas oublier

On dit qu'*« une famille est génératrice (ou une base)**DE E** »*, si on oublie l'objet indirect (« de … ») cela ne veut rien dire.
En revanche, une famille est libre, indépendamment de l'espace vectoriel considéré (mais pas du corps). On peut donc se contenter de *« une famille est libre »*.

Remarque - Base infinie

Pour une base infinie on a un résultat similaire avec une famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I}$.

Application - Exemples classiques

2.2. Critère pour être une base

Proposition - Base
Soit $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \dots e_p)$ une famille d'éléments de E.
On a les équivalences :

(i) $\mathscr{F}$ est une base de E.

(ii) $\mathscr{F}$ est une famille libre maximale (dans E).

(iii) $\mathscr{F}$ est une famille génératrice minimale de E.

On commence par démontrer deux lemmes :

Lemme - Complétion libre
Soient $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E et $x \in E$.
$x \notin \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$ si et seulement si $(e_1, \dots, e_p, x)$ est encore libre.
ou $x \in \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$ si et seulement si $(e_1, \dots, e_p, x)$ est lié

Lemme - Réduction liée
Soit $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1})$ une famille de E.
$e_{p+1} \in \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$ si et seulement si $\text{vect}(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}) = \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$

Heuristique - Interprétation en terme de famille libre maximale et famille génératrice minimale

Si $(e_1, \dots, e_p)$ une famille libre de E et $x \notin \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$, alors $(e_1, \dots e_p)$ n'est pas maximale.
Si $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1})$ une famille génératrice de E et $e_{p+1} \in \text{vect}(e_1, \dots, e_p)$, alors $(e_1, \dots e_p, e_{p+1})$ n'est pas minimale.

On commence par démontrer les lemmes puis la proposition.

Démonstration

Démonstration

2.3. Dimension d'un espace vectoriel

Existence de bases

Définition - Espace de dimension finie
Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.
Par convention $\{0_E\}$ est un espace de dimension finie.
S'il n'est pas de dimension finie, E est dit de dimension infinie.

On a le théorème suivant très important :

Théorème - Théorème de la base incomplète (lemme de Steinitz)
Soit $E \neq \{0_E\}$ un espace vectoriel de dimension finie.
Soit $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de E et $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_q)$ une famille génératrice de E, alors : il existe une base de E de la forme $\mathscr{B} =$

$(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ où $\{e_{p+1}, \dots, e_n\} \subset \mathscr{F}$ (quitte à être vide).
En d'autres termes on peut compléter une famille libre de E en une base avec des vecteurs pris dans une famille génératrice.

Démonstration

Cela donne un algorithme de complétion de famille libre, en une base (si l'espace est de dimension finie) :

Savoir faire - Base incomplète

Pour le théorème de la base incomplète, on exploite un algorithme plus efficace. On suit l'algorithme suivant :

```
E=vect(B) #A definir...
for i in range(q):
    if f[i] notin E :
        B=B+[f[i]]
        E=vect(B)
return(B)
```

L'algorithme termine car il est paramétré avec une boucle `for`.
L'algorithme renvoie la famille libre maximale, contenant e_i, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$.
Par construction, pour tout $i \in \mathbb{N}_q$, $f_i \in \text{vect}(B)$,

— en effet, ou bien f_i n'appartenait pas à B au moment du test, et alors, on l'a mis dans B,
— ou bien il en faisait partie et toujours à la fin.

D'après le lemme de réduction : $\text{vect}\mathscr{F} = E \subset \text{vect}(B)$.
Donc B est également une famille génératrice de E.
Il faut également montrer que B est une famille libre.
En fait, pour tout i, B_i est libre d'après le lemme de complétion libre.
C'est donc également le cas en fin d'algorithme.

Application - Compléter $\mathscr{E} = ((1,1,1),(1,-1,-1))$ **en une base de** $\mathbb{R}^3$**.**

A partir d'un ensemble réduit à l'unique élément $\{0\}$,

Corollaire -
Si E, non réduit au vecteur nul, est de dimension finie, alors de toute famille génératrice de E on peut extraire une base.

Corollaire -
Tout espace vectoriel de dimension finie, non réduit au vecteur nul, admet une base.

Cardinal d'une base

En fait, on a mieux, en terme de cardinaux

Proposition - Relation entre cardinaux de familles libres/familles génératrices
Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E et $\mathscr{G}$ une famille génératrice finie de E, alors $\mathscr{L}$ est finie et

$$\text{Card}\mathscr{L} \leqslant \text{Card}\mathscr{G}$$

Heuristique - Amélioration du lemme de Steinitz

Pour la démonstration, on améliore la démonstration du lemme de Steinitz.
En cherchant un invariant : comment transformer un à un les élément de $\mathscr{G}$ en élément de $\mathscr{L}$ tout en gardant la génération de E.
On démontre que pour tout $s \leqslant \text{card}(\mathscr{L}) = p$ ($q = \text{card}(\mathscr{G})$) :
il existe $I_s \subset \mathbb{N}_q$, tel que $\text{card}(I_s) = q - s$ et $E = \text{vect}\big((e_i)_{i\in\mathbb{N}_s}, (f_j)_{j\in I_s}\big)$

Notons que la démonstration qui suit est en fait constructive !

Démonstration

Autre interprétation :

Corollaire - Maximalité de liberté
Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une famille de vecteurs de E.
Soit $(x_j)_{j\in J}$ une famille de vecteurs de E qui sont combinaisons linéaires de $(e_1,\dots,e_n)$ (i.e. : $\forall\ j\in J$, $x_j\in \text{vect}(e_1,e_2,\dots e_n)$).
Si $\text{Card} J\geqslant n+1$ alors nécessairement la famille $(x_j)_{j\in J}$ est liée.

Si l'espace vectoriel possède une famille libre infinie, alors il est de dimension infinie (au sens : il n'est pas de dimension finie).

Corollaire - Espace vectoriel de dimension infinie
Il existe des espaces vectoriels de dimension infinie. C'est en particulier le cas de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ou de $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Démonstration

Pour aller plus loin - Famille libre maximale/génératrice minimale
On pourrait aussi parle de famille maximale libre (de plus grand cardinal), ou de famille minimale génératrice (de plus petit cardinal). Le cardinal de toutes ces familles est le même : c'est la dimension de l'espace

Théorème - Dimension constante
Toutes les bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, non réduit au vecteur nul, ont même cardinal.

Démonstration

Pour aller plus loin - Module (3)
On dit qu'un module est de type fini, s'il est engendré par une famille fini d'éléments.
On peut montrer que M est un A-module de type fini s'il existe une bijection linéaire de M sur A^n (n étant la taille de la famille fini engendrant M). On dit qu'il est libre, s'il possède une base.
Enfin, on s'intéresse souvent pour des raisons de décomposition structurelle aux A-module de torsion M (de type fini), les modules de torsion vérifiant :

$$\forall\ x\in M, \exists\ a\in A\mid ax=0$$

Définition - Dimension
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, non réduit au vecteur nul.
On appelle dimension de E le cardinal commun de toutes ses bases.
On le note $\dim E$ ou $\dim_{\mathbb{K}} E$.
Par convention $\dim\{0_E\} = 0$.

Exemple - Compléter

Théorème - Conséquence sur les cardinaux
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension $n \geqslant 1$. Alors :

— Une famille libre de E de cardinal p vérifie $p \leqslant n$ et c'est une base si et seulement si $p = n$.
— Une famille génératrice de E de cardinal p vérifie $p \geqslant n$ et c'est une base si et seulement si $p = n$.

Démonstration

Savoir faire - Montrer qu'une famille est une base
En général pour montrer qu'une famille d'un $\mathbb{K}$-e.v. de **dimension** n **connue** est une base on montre qu'elle est **libre de cardinal** n.
(Dans de rares cas, on montre que la famille est génératrice et du bon cardinal).

Exemple - Dans $E = \mathbb{R}^n$

Exercice

Montrer que la famille des polynômes $(N_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Avec

$$N_0 = 1 \qquad \forall\ k \geqslant 1 : N_k = \frac{X \times (X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}$$

(On appelle cette base, la base de Newton. Elle est en particulier intéressante pour : $\forall\ h \in \mathbb{Z},\ N(h) \in \mathbb{Z}$)

Dimension d'un produit

Théorème - Dimension d'un produit cartésien
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. Alors $E \times F$ est de dimension finie et

$$\dim E \times F = \dim E + \dim F.$$

Démonstration

Par récurrence :

Corollaire - Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels
Soient $E_1, \dots, E_k$ des $\mathbb{K}$-e.v. de dimensions finies respectivement $n_1, \dots, n_k$.
Alors $E_1 \times \cdots \times E_k$ est de dimension finie égale à $n_1 + \cdots + n_k$.

2.4. Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Dimension d'un s.e.v

Théorème - Dimension d'un sous-espace vectoriel
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. Soit F un s.e.v de E.
Alors F est de dimension finie, avec $\dim F \leqslant \dim E$.
De plus

$$\dim F = \dim E \text{ si et seulement si } E = F.$$

Démonstration

Savoir faire - Montrer que deux espaces vectoriels sont égaux

Pour montrer que deux $\mathbb{K}$-e.v. E et F de **dimension finie** sont égaux, on montre généralement une inclusion et l'égalité des dimensions.

Corollaire - S.e.v. de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$, autres que $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$ et $\mathbb{R}^2$, sont les droites vectorielles.
Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, autres que $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$ et $\mathbb{R}^3$, sont les droites vectorielles et les plans vectoriels.

Définition - Rang d'une famille de vecteurs

Soit $(x_1,\dots,x_p)$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
On appelle rang de la famille $(x_1,\dots,x_p)$ la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}(x_1,\dots,x_p)$:

$$\mathrm{rg}\,(x_1,\dots,x_p) = \dim \mathrm{vect}(x_1,\dots,x_p)$$

Comme $(x_1,\dots,x_p)$ est une famille génératrice de $\mathrm{vect}(x_1,\dots,x_p)$, on peut affirmer

Proposition - Majorant et

$\mathrm{rg}\,(x_1,\dots,x_p) \leqslant p$. Et

$$\mathrm{rg}\,(x_1,\dots,x_p) = p \Longrightarrow (x_1,\dots,x_p) \text{ est libre}$$

Sommes et supplémentaires

Théorème - Base et dimension d'une somme directe

Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, E_1 et E_2 deux s.e.v de E
Soient $(e_1,\dots,e_p)$ une base de E_1 et $(f_1,\dots,f_q)$ une base de E_2.
Alors E_1 et E_2 sont en somme directe si et seulement si
$(e_1,\dots,e_p,f_1,\dots,f_q)$ (juxtaposition des bases de E_1 et E_2) est libre.
Dans ce cas c'est une base de $E_1 \oplus E_2$ et on a

$$\dim E_1 \oplus E_2 = \dim E_1 + \dim E_2.$$

Le résultat se généralise à plus de deux s.e.v.

Démonstration

Théorème - Caractérisation des couples de s.e.v supplémentaires
Soient E un e.v. de dimension finie n et F, G deux s.e.v de E. Alors

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow F \cap G = \{0_E\} \text{ et } \dim F + \dim G = n;$$

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow F + G = E \text{ et } \dim F + \dim G = n;$$

$E = F \oplus G$
$\Leftrightarrow$ la juxtaposition d'une base de F et d'une base de G est une base de E.

Exercice
Montrer que dans $\mathbb{R}^4$, $F = \mathrm{vect}((1,2,-1,0),(0,2,0,1))$ et $G = \mathrm{vect}((2,0,0,1),(1,0,0,1))$ sont supplémentaires.

Démonstration

Remarque - Famille libre : $F \cap G = \{0\}$ **& Famille génératrice :** $F + G = E$
Notons $\Phi : F \times G \to E$, $(x, y) \mapsto x + y$.

$$F \cap G = \{0\} \Longleftrightarrow \Phi \text{ injective}$$

$$F+G=E \Longleftrightarrow \Phi \text{ surjective}$$

$$F\oplus G=E \Longleftrightarrow \Phi \text{ bijective}$$

Ce qui est affirmé sur les familles libres (en particulier les savoir-faire) est également vrai pour la caractéristique $F\cap G=\{0\}$ (ou « la somme est directe »).

Théorème - Existence de supplémentaires en dimension finie
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, F un s.e.v de E. Alors F admet au moins un supplémentaire dans E.

Démonstration

Remarque - Processus algorithmique
La démonstration de ce théorème est tout aussi importante que le résultat puisqu'elle fournit un moyen de recherche d'un supplémentaire en dimension finie.
Tout, ici, est équivalent au théorème de la base incomplète.
Exercice
Donner **un** supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ de $F=\text{vect}((1,1,1,1),(2,0,1,1),(-2,4,1,1))$

Théorème - Dimension d'une somme de deux s.e.v., relation de Grassman
Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, F, G deux s.e.v de E. Alors

$$\dim(F+G)=\dim F+\dim G-\dim(F\cap G).$$

Démonstration

Pour aller plus loin - Autre construction
On cherche G tel que $E=F\oplus G$.
En réfléchissant aux dimensions, on trouve que $\dim E=\dim F+\dim G=\dim E\times G$ (produit cartésien).
Il existe une sorte de division euclidienne : la division en classe d'équivalence.
On note $\mathscr{R}$: $u\mathscr{R}v$ ssi $u-v\in F$.
$\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence. L'ensemble des classes d'équivalence $G=\frac{E}{\mathscr{R}}=\frac{E}{F}$ est un « espace vectoriel » et alors $\forall\ x\in E, !\exists\ (U,y)\in G\times F$ tel que $x-y\in U(=\overline{u})$ (classe de u et donc $x=y+U$ (mais ce n'est pas l'addition de $E\ldots$)

Théorème - Dimension et somme d'espaces vectoriels
Si $F_1, \dots, F_p$ sont des s.e.v. de dimension finie de E $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors

$$\dim \sum_{i=1}^{p} F_i \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Démonstration

Définition - Droite et plan vectoriel
Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension quelconque et soit F un s.e.v de E. On dit que

- F est une droite (vectorielle) si $\dim F = 1$;
- F est un plan (vectoriel) si $\dim F = 2$.
- F est un hyperplan (vectoriel) s'il admet un supplémentaire de dimension 1 (soit si $\dim F = n-1$).

3. Ecriture d'une application linéaire en dimension finie

3.1. Détermination

Détermination par les bases

Théorème - Image d'une base
Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie n et F un $\mathbb{K}$-e.v. quelconque.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ une famille de n vecteurs de F.
Alors il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ u(e_i) = f_i.$$

On dit que u est entièrement déterminée par la donnée des images des vecteurs d'une base.

Démonstration

Remarque - Dimension infinie
Ce résultat se généralise à la dimension infinie.
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de F (même ensemble d'indices), alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $u(e_i) = f_i$ pour tout $i \in I$.

Corollaire - Egalité d'applications
Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales.

Corollaire - Applications linéaires de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$
Soit $u \in Ł_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$. Alors u est de la forme

$$u: \begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^p \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{où } \left\{ \begin{array}{l} \forall i \in [\![1, p]\!] \\ \forall j \in [\![1, n]\!], \end{array} \right. , a_{ij} \in \mathbb{K}.$$

Réciproquement, toute application de cette forme est linéaire du $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^n$ dans le $\mathbb{K}$-e.v. $\mathbb{K}^p$.

Proposition - Surjection coordonnée
Tout $\mathbb{K}$-e.v de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
Si $\mathscr{B}$ une base de E $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie non nulle n. Alors

$$u: \begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{K}^n \\ x & \mapsto & \text{coordonnées de } x \text{ dans } \mathscr{B} \end{array}$$

est un isomorphisme de E dans $\mathbb{K}^n$.

Démonstration

Corollaire - Sans passer par $\mathbb{K}^n$
Soient E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et F un $\mathbb{K}$-e.v. a priori quelconque.
Alors E et F sont isomorphes si et seulement si F est de dimension finie avec $\dim F = \dim E$.

Démonstration

Théorème - Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie. Alors $\mathscr{L}(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie et

$$\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F.$$

Démonstration

Remarque - Espace dual
Avec $F = \mathbb{K}$ on trouve $\dim E^* = \dim E$.

Détermination par la restriction à des supplémentaires

E, F désignent toujours deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Théorème -
Soient E_1 et E_2 deux s.e.v. supplémentaires dans E et $u_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$. Alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que

$$u_{|E_1} = u_1 \text{ et } u_{|E_2} = u_2.$$

Plus généralement :

Théorème - Description unique sur une famille de supplémentaires
Si $E_1, \ldots, E_p$ sont des s.e.v. de E (de dimension quelconque) vérifiant $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et si $\forall i$, $u_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$, alors il existe une et une seule application $u \in \mathscr{L}(E, F)$ telle que $\forall i$, $u_{|E_i} = u_i$

Démonstration

3.2. Matrice d'une application linéaire

Matrice d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Définition - Matrice d'une famille de p vecteurs
La matrice dans la base $\mathscr{B}$ d'une famille $(x_1, \ldots, x_p)$ de vecteurs de E est la matrice dont la j-ième colonne, pour $j \in [\![1, p]\!]$, est formée des coordonnées de x_j dans la base $\mathscr{B}$. C'est donc la matrice à n lignes et p colonnes :

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_p) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n; 1 \leqslant j \leqslant p}$$

telle que, pour tout j, $x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$.

Exemple - Dans $\mathbb{R}^2$

Heuristique - Cas particulier $p = 1$: la « matrice du vecteur x dans $\mathscr{B}$ »
Dans le cas particulier d'une famille à un vecteur x, la matrice $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(x)$ est une matrice colonne, c'est la matrice colonne formée des coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$. On parle souvent de la « matrice du vecteur x dans la base $\mathscr{B}$ ».
Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. L'application

$$\begin{array}{ll} \mathbb{K}^n & \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \mapsto \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(x) \end{array}$$

est alors un isomorphisme d'espaces vectoriels. On identifie donc usuellement matrices

, colonnes (à n lignes) et vecteurs de $\mathbb{K}^n$

Matrice d'une application linéaire

Définition - Matrice d'un morphisme u
E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, de dimension finie (respectivement n et p).
$\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \cdots, f_p)$ désignent respectivement des bases de E et de F.
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $u(e_j) \in F$ et donc on peut écrire $u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} f_i$.
On appelle **matrice de u** dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, la matrice :

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \mathscr{M}(u,\mathscr{B},\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{1\leqslant i\leqslant p; 1\leqslant j\leqslant n}$$

a_{ij} désigne la i-ième coordonnée de $u(e_j)$ dans $\mathscr{C}$.
C'est la matrice dans $\mathscr{C}$ de la famille $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$.

Attention - Taille de la matrice
Il s'agit d'une matrice à n colonnes (nombre de vecteurs d'une base de l'ensemble de départ) et p lignes (dimension de l'ensemble d'arrivée), soit p lignes et n colonnes.

Exemple - Matrice de $P \mapsto P'$

Théorème - Réciproquement de la matrice au morphisme
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v., $\dim E = n$, $\dim F = p$. On suppose fixées $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F. Alors, pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = A$.

Démonstration

Proposition - Calcul matriciel de l'opération $u(x)$
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v., $\dim E = n$, $\dim F = p$. On suppose fixées $\mathscr{B}$ une base de E et $\mathscr{C}$ une base de F.
Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, X la matrice colonne des coordonnées d'un vecteur x de E dans la base $\mathscr{B}$, alors la matrice colonne Y des coordonnées de $y = u(x)$ dans la base $\mathscr{C}$ est donnée par la relation

$$Y = AX.$$

Démonstration

Corollaire - Nouveau critère d'égalité matriciel
Soient $A, B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors :

$$\left(\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ AX = BX\right) \Rightarrow A = B$$

Démonstration

Définition - Matrice d'un endomorphisme
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{B}$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors, pour $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ s'appelle la matrice de u dans la base $\mathscr{B}$ et se note simplement $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)$ (ou $\mathscr{M}(u,\mathscr{B})$).

Exemple - Dans $\mathbb{R}^2$

Exercice

Quelle est la matrice dans la base $\mathscr{B} = \mathscr{C}$ de la symétrie orthogonale par rapport à la première bissectrice ?

$\mathscr{L}(F,G)$ & $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ **isomorphes**

Théorème - L'application linéaire $u \mapsto \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels ($\dim E = n, \dim F = p$) de bases respectives $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $u, v \in \mathscr{L}(E,F)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ alors

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) + \beta \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(v).$$

L'application

$$\begin{array}{ll} \mathscr{L}(E,F) & \to \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \end{array}$$

est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Théorème - Produit matriciel et composition
Soient trois espaces vectoriels E, F, G munis des bases respectives $\mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}$, et deux applications linéaires $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(F,G)$. Alors la matrice de $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$ est donnée par

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(v \circ u) = \mathscr{M}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v) \times \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$$

Démonstration

Remarque - Nouvelle interprétation du produit matriciel
Cela justifie, d'une nouvelle façon, l'utilité de la définition de la multiplication entre les matrices : ceci permet de calculer avec un nombre fini d'opérations une composée de deux applications linéaires.

Corollaire -
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}$ une base de E. L'application $u \mapsto \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)$ est un isomorphisme d'algèbres de $\mathscr{L}(E)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (isomorphisme d'espaces vectoriels et morphisme d'anneaux)

Proposition - Bijection de u et inversibilité de $\mathscr{M}$
Soient E et F deux espaces vectoriels de même dimension n (en particulier on peut avoir $E = F$) de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$,
Soit u une application linéaire de E dans F et $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$.
Alors u est bijective (donc est un isomorphisme)
si et seulement si A est inversible.
Et alors

$$A^{-1} = \mathscr{M}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u^{-1})$$

Savoir faire - Exploitation

Ce résultat peut être utilisé de deux façons :

— Pour trouver l'isomorphisme réciproque de u, on calcule l'inverse de la matrice de u (voir plus loin pour les méthodes).

— Pour trouver l'inverse d'une matrice, on peut parfois la reconnaître comme la matrice d'un isomorphisme dont on sait facilement exprimer l'endomorphisme réciproque.

Démonstration

Exercice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par $a_{ij} = \binom{j-1}{i-1}$ (avec la convention $\binom{j}{i} = 0$ si $j < i$) pour $i, j \in [\![1, n+1]\!]^2$. Justifier l'inversibilté de A et déterminer A^{-1}.

Réciproquement, application canoniquement associée à une matrice

Heuristique - Identification

L'application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ qui à $x = (x_1, \dots, x_n)$ associe la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est un isomorphisme naturel ("canonique") entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Il permet d'identifier un n-uplet x avec la matrice colonne X.

D'autre part, on sait que si $u \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$, alors u est de la forme

$$u : \begin{array}{ll} \mathbb{K}^n & \to \mathbb{K}^p \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{où } \forall i \in [\![1, p]\!], \forall j \in [\![1, n]\!], a_{ij} \in \mathbb{K}.$$

Définition - Application canoniquement associée à A

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ telle que la matrice de u dans les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^p$ soit A. On dit alors que u est canoniquement associée à A.
u peut alors être identifiée à l'application

$$\begin{array}{ll} \mathcal{M}_{n,1} & \to \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto AX \end{array}$$

Remarque - Convention d'usage

On écrit aussi $y = Ax$ avec $x \in \mathbb{K}^n$, $y \in \mathbb{K}^p$.

Proposition - Noyau, image

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et u l'application linéaire canoniquement associée.
On rappelle que :

$$\operatorname{Ker} A = \{X \in \mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{\mathbb{K}^p}\}$$

$$\operatorname{Im} A = \{Y \in \mathbb{K}^p \equiv \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid \exists X \in \mathbb{K}^n \equiv \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), Y = AX\}.$$

Par les identifications précédentes $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} u$.

Réinterprétation du produit par blocs

Proposition - Blocs nuls et stabilité
Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E $\mathbb{K}$-e.v. ($\dim E = n, \dim F = p$) et $u \in \mathscr{L}(E)$ telle que la matrice de u s'écrive, dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$, par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ (avec $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$).
Alors :

- F est stable par u si et seulement si $C = O_{n-p,p}$; dans ce cas $A = \mathscr{M}(u_{|F})$
- G est stable par u si et seulement si $B = O_{p,n-p}$; dans ce cas $D = \mathscr{M}(u_{|G})$

Démonstration

Exercice
Montrer que les projecteurs et les symétries ont, dans des bases bien choisies, des matrices par blocs très simples.

Remarque - Généralisation
La notation et le calcul par blocs peuvent se généraliser à plus de deux blocs.
La condition : la taille des blocs doit être compatible au produit envisagé.
On peut aussi voir le produit $AX = \sum_{i=1}^{p} x_i C_i$ comme un produit par blocs...

3.3. Changements de bases

Le but de ce paragraphe est de trouver le lien entre les différentes matrices d'une même application linéaire lorsque l'on change de bases dans les ensembles E et F.

Matrice de passage

Définition - Matrice de passage (changement de base vectoriel)
Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension n,
$\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ (ancienne) et $\mathscr{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ (nouvelle), deux bases de E.
On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, notée $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ (ou $P_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}$), la matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$:

$$P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(e'_1, \cdots, e'_n) = \mathscr{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{E,E})$$

Attention - Ecrire la bonne matrice
On obtient donc la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ en écrivant en colonnes les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ des vecteurs e'_i (de $\mathscr{B}'$).
(C'est celle que l'on sait écrire sans problème car les vecteur e'_i sont toujours donnés par leurs coordonnées dans $\mathscr{B}$)

Théorème - Inverse d'une matrice de passage

On a $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} = \mathscr{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(Id_E)$.
Une matrice de passage est donc inversible (car Id_E est bijectif) et $(P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}'}^{\mathscr{B}}$.

Pas de démonstration supplémentaire.

Théorème - Calcul matriciel du changement de base

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Si X est la matrice colonne des coordonnées dans $\mathscr{B}$ de $x \in E$ et X' la matrice colonne des coordonnées dans $\mathscr{B}'$ de x, alors $X = PX'$, c'est-à-dire

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(x) = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'} \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(x)$$

Savoir faire - Petite aide mnémnotechnique

Se souvenir que la formule donne facilement les coordonnées dans l'ancienne base en fonction des coordonnées dans la nouvelle base, ce qui est rarement ce dont on a besoin! Pour avoir les coordonnées dans la nouvelle base en fonction des anciennes, il faut calculer P^{-1}.

Démonstration

Matrices équivalentes

Théorème - Changement de base d'une application de $\mathscr{L}(E, F)$

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-e.v., de bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ pour E, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ pour F. On pose $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$ et $Q = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$.
Alors, si $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, $A' = \mathscr{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$ on a

$$A' = Q^{-1}AP$$

Démonstration à bien savoir faire, pour retrouver rapidement le résultat. On rappelle que si « tout va bien » (dimension) : $\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(u \circ v) = \mathscr{M}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(u) \times \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(v)$ (flèche à l'envers pour les bases)

Démonstration

Remarque - Rappel

On rappelle que deux matrices A et B sont équivalentes, s'il existe $P, Q \in \mathscr{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = P \times B \times Q^{-1}$.
On a également vu que A et B sont équivalentes si et seulement si $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$. Et qu'il existe une famille de représentants des classes d'équivalence : les J_r

Proposition - Nouvelle interprétation de l'équivalence matricielle

$A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si
elles représentent la même applications linéaire dans des bases différentes (a priori au départ et à l'arrivée)

Démonstration

Matrices semblables

Dans le cas particulier où $E = F$ on peut prendre $\mathscr{B} = \mathscr{C}$ et $\mathscr{B}' = \mathscr{C}'$ d'où $Q = P$ et on a le théorème suivant :

Théorème -
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. Alors, si $u \in \mathscr{L}(E)$, $A = Mat_{\mathscr{B}}(u)$, $A' = Mat_{\mathscr{B}'}(u)$ on a

$$A' = P^{-1}AP$$

Exercice
Soit $E = \mathbb{R}^2$. On considère les deux vecteurs $f_1 = (1,2)$ et $f_2 = (1,3)$.

1. Montrer que $\mathscr{B}' = (f_1, f_2)$ est une base de E.
2. Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de E. Ecrire la matrice de passage $P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$.
3. Soit $x = (4,1) \in E$. Déterminer matriciellement les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}'$.
4. Soit u l'endomorphisme de E défini par $u((x,y)) = (2x+y, x-y)$. Ecrire les matrices de u dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

Définition - Matrices semblables
$A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Remarque - Relation d'équivalence
Il s'agit d'une relation d'équivalence. C'est une relation particulière qui dérive de la relation « être équivalente ».
Etant plus précise, les classes d'équivalence pour la relation de similitude sont plus nombreuse. Le cours de diagonalisation de seconde année consiste à chercher des représentants relativement simples (diagonale, au mieux) de ces classes de similitude. On a alors, par récurrence,

Proposition - Calcul de puissance
Si A et B son semblables, précisément : $B = P^{-1}AP$.
Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^k = P^{-1}A^kP$ (car $PP^{-1} = I_n$).

Théorème - Ré-interprétation de la similitude
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors les matrices A et B sont semblables si et seulement si
il existe $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, bases de E, $u \in \mathscr{L}(E)$ tq $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)$ et $B = \mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(u)$.
Autrement dit, A et B sont semblables si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Truc & Astuce pour le calcul - Etant donnée A et B, trouver $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et u
Il n'y a pas unicité du triplet $(\mathscr{B}, \mathscr{B}', u)$. Il faut donc choisir un représentant.
En revanche, on connait A et B puis donc P.
Classiquement, on considère (dans l'ordre) :

1. $E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (équivalent à $\mathbb{K}^n$)
2. $\mathscr{B} = (X_1, \dots X_n)$, la base canonique de E
3. $u : X \mapsto A \times X$. Par construction $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)$.

En fait comme $\mathscr{B}$ est la base canonique, $AX_j = C_j(A) = \sum_{i=1}^{n} [A]_{i,j} X_i$

4. $\mathscr{B}' = P(\mathscr{B}) = (Y_1, Y_2, \dots Y_n) = (PX_1, PX_2, \dots PX_n)$, c'est bien une base car P est inversible.
$u(Y_j) = u(PX_j) = APX_j = P^{-1}BX_j = P^{-1}C_j(B)$, car $\mathscr{B}$ est la base canonique.
Donc $u(Y_j) = P^{-1}\sum_{i=1}^{n}[B]_{i,j}X_i = \sum_{i=1}^{n}[B]_{i,j}P^{-1}X_i = \sum_{i=1}^{n}[B]_{i,j}Y_i$ Ainsi $\mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(u) = B$

Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est semblable à ${}^tA$.

Proposition - Matrices semblables et trace
Deux matrices semblables ont même trace.

Démonstration

Définition - Trace d'un endomorphisme
Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathscr{B}$ une base de E.
Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle trace de u le scalaire

$$\mathrm{Tr}\, u = \mathrm{Tr}\,(u) = \mathrm{Tr}\, M_{\mathscr{B}}(u).$$

Remarque - Une démonstration ?
Ceci a bien un sens d'après la proposition précédente qui assure que les matrices de u dans des bases différentes ont toujours la même trace (invariante selon la base considérée).

Corollaire - Propriétés simples de Tr
L'application trace sur $\mathscr{L}(E)$ est linéaire et

$$\forall u, v \in \mathscr{L}(E), \mathrm{Tr}\,(u \circ v) = \mathrm{Tr}\,(v \circ u).$$

Proposition - Rang=trace d'un projecteur
Soit $p \in L(E)$ un projecteur. Alors $\mathrm{Tr}\,(p) = \mathrm{rg}\,(p)$.

Démonstration

4. Théorème (formule) du rang et conséquences

4.1. Théorème du rang

Rang(s)

Définition - Rang d'une application linéaire
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels (de dimensions quelconques) et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que u est de rang fini si $\mathrm{Im}\ u$ est de dimension finie et on appelle alors rang de u la dimension de $\mathrm{Im}\ u$:

$$\mathrm{rg}\ u = \dim \mathrm{Im}\ u$$

Rappels :

Définition - Rang d'une famille de vecteurs
Soit $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle rang de la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{vect}(x_1, \ldots, x_p)$:

$$\mathrm{rg}\ (x_1, \ldots, x_p) = \dim \mathrm{vect}(x_1, \ldots, x_p)$$

Définition - Rang d'une matrice
Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ On appelle rang de A (noté $\mathrm{rg}\ A$) la dimension de $\mathrm{Im}\ A$.

Théorème du rang

Proposition - Isomorphisme canonique (de projection)
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-e.v. et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Si S est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\ u$ dans E alors l'application

$$\tilde{u} : \begin{array}{l} S \to \mathrm{Im}\ u \\ x \mapsto u(x) \end{array}$$

est un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}\ u$

Démonstration

Théorème - Théorème du rang
Soient E un $\mathbb{K}$-e.v. de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-e.v. (de dimension quelconque) et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}\ u + \dim \mathrm{Im}\ u = \dim \mathrm{Ker}\ u + \mathrm{rg}\ u$$

Démonstration

4.2. Application du théorème du rang (Critère de bijection)

Proposition - Critère de surjection/injection
Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
- Si E est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\operatorname{rg} u \leqslant \dim E$ avec égalité si et seulement u est injective.
- Si F est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\operatorname{rg} u \leqslant \dim F$ avec égalité si et seulement u est surjective.

Démonstration

Si E et F sont de dimensions finies on a donc $\operatorname{rg} u \leqslant \min(\dim E, \dim F)$

Théorème - Equivalences des caractères de u (cas dimension finie)
E, F deux K-espaces vectoriels de **dimensions finies égales** ($\dim F = \dim E$). Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. On a équivalence de
(i) $\operatorname{rg}\ u = \dim E$
(ii) u est injective
(iii) u est surjective
(iv) u est bijective (donc un isomorphisme)

Démonstration

Remarque - Dans la pratique : u endomorphisme
On exploite souvent ce théorème dans le cas où $u \in \mathscr{L}(E)$ et donc $E = F$. Les deux espaces ont nécessairement la même dimension.
Il n'y a plus d'hypothèses spécifiques à vérifier. Ce qui donne la caractérisation des automorphismes qui suit

Proposition - Conservation du rang
E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $v \in \mathscr{L}(F,G)$.
- si u est un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}\ (v \circ u) = \operatorname{rg}\ v$
- si v est un isomorphisme, alors $\operatorname{rg}\ (v \circ u) = \operatorname{rg}\ u$

Démonstration

On obtient ainsi la caractérisation des automorphismes en dimension finie :

Théorème - Cas des endomorphismes
E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de **dimension finie** n. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On a équivalence de
(i) rg $u = n$
(ii) u est injective
(iii) u est surjective
(iv) u est bijective (donc un automorphisme, soit $u \in GL(E)$)
(v) il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $v \circ u = Id_E$ (u admet un inverse à gauche)
(vi) il existe $w \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ w = Id_E$ (u admet un inverse à droite)

4.3. Itération

Proposition - Majoration de rg $(v \circ u)$ en toute généralité
Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$, avec E et F de dimensions finies.
Alors rg $(v \circ u) \leqslant \min(\text{rg } u, \text{rg } v)$.

Démonstration

Savoir faire - Exploiter le rang d'endomorphisme restreint ou composé
Pour les inégalités sur les rang, ou les inclusions Im /Ker, on exploite :
- la composition (cf. démonstration précédente)
- la restriction à A sev de E : $u_{|A}$
  On pense : $u_{|A} : A \to F$, $x \mapsto u(x)$, on a $\operatorname{Ker} u_{|A} = \operatorname{Ker} u \cap A$ donc rg $u_{|A} = \dim A - \dim(\operatorname{Ker} u \cap A)$.

L'exercice suivant est classique (première question). La fin est importante :

Exercice

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, avec E de dimension finie. On note, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $I_r = \operatorname{Im} u^r$ et $i_r = \dim(I_r)$ et $K_r = \operatorname{Ker} u^r$ et $k_r = \dim K_r$.

1. Montrer que $K_r \subset K_{r+1}$ et $I_{r+1} \subset I_r$. Qu'en déduire pour les suites (i_r) et (k_r).
2. Montrer que $K_r = K_{r+1}$ si et seulement si $I_{r+1} = I_r$.
3. On note $s = \min\{r \mid K_r = K_{r+1}\}$. Montrer que s existe et que $\forall\, r \geqslant s$, $K_r = K_s$ (et $I_r = I_s$).
   Montrer que dans ce cas $E = K_s \oplus I_s$.
4. Montrer que pour tout $r \leqslant s+1$, $k_{r+1} - k_r \leqslant k_r - k_{r-1}$.
   On dit que la suite (k_r) est concave. De même ici, on dirait que (i_r) est convexe.
   On pourra considérer H tel que $K_{r+1} = H \oplus K_r$ et $u_{|H} : H \to K_r$, bijective...

4.4. Formes linéaires et hyperplans

Bases duales

Définition - Forme linéaire coordonnée
Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de l'espace vectoriel E.
On note e_i^* l'unique forme linéaire sur E vérifiant

$$\forall\, j \in I, e_i^*(e_j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}.$$

On l'appelle forme linéaire coordonnée d'indice i relative à la base $\mathscr{B}$

Autre nom :

Proposition - Base duale
Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de l'espace vectoriel E.
Alors $\mathscr{B}^* = (e_i^*)_{i\in I}$ est une base de $\mathscr{L}(E,\mathbb{K}) = E^*$, appelée base duale de $\mathscr{B}$

On aurait pu exploiter les dimensions, mais pédagogiquement, on montre plus :

Démonstration

Hyperplan et équation d'un hyperplan

Proposition - Noyau de forme linéaire et hyperplan
Soit H un sous-espace vectoriel de E. On a équivalence des propriétés :

(1) il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$

(2) il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \operatorname{Ker}\varphi$

Si ces propriétés sont vérifiées on dit que H est un hyperplan (vectoriel) de E.

Démonstration

Pour aller plus loin - Produit scalaire
On appelle crochet de dualité, l'application bilinéaire de $E^* \times E$ dans $\mathbb{K}$:

$$< \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^* \mid \sum_{j=1}^{n} b_j e_j >= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

C'est une forme de produit scalaire. Elle fait le lien algébrique avec les fameux « bra-kets » de la mécanique quantique.

D'après la démonstration.

Corollaire - Choix d'un supplémentaire
Si H est un hyperplan de E et si $a \notin H$, alors $E = H \oplus \text{vect}(a)$.

Corollaire - Version forme linéaire
Soit $\varphi \in E^*$. Alors pour tout $x \notin \operatorname{Ker}\varphi$, $E = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \text{vect}(x)$.

Démonstration

Proposition - Proportionnalité des formes linéaires
Deux formes linéaires φ et ψ sont proportionnelles si et seulement elles ont le même noyau, c'est-à-dire que pour $\phi, \psi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$,

$$\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \mid \varphi = \lambda\psi$$

Démonstration

Définition - Equation d'un (hyper)plan
Soient H un hyperplan et $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ tels que $H = \operatorname{Ker}\varphi$. Alors l'equation $\varphi(x) = 0$ s'appelle une équation de H.

Remarque - Infinité d'équations
H admet alors une infinité d'équations, obtenues en écrivant $\lambda\varphi(x) = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

Proposition - Cas de la dimension finie
Les hyperplans d'un espace vectoriel E de dimension finie n sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.
Dans une base $(e_1,\dots,e_n)$ donnée, ce sont les ensembles d'équation

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

où $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$, $(x_1,\dots,x_n)$ étant les coordonnées de $x \in E$ dans la base $(e_1,\dots,e_n)$.

Démonstration

Intersection d'hyperplans et dimension

Heuristique - Une équation : un degré perdu
On commence dans un espace vectoriel de dimension n.
A chaque équation, la dimension diminue de une unité.
Les seules exceptions : si une nouvelle équation est une combinaison linéaire des précédentes.
Réciproquement, un sous-espace vectoriel de dimension r dans E de dimension n est le noyau de $n-r$ forme linéaires, ou autrement écrit est obtenu à partir de $n-r$ équations.

Proposition - Réduction des dimensions
Soient $m \in \mathbb{N}^*$ et $H_1,\dots,H_m$ des hyperplans de E. Alors

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) \geqslant \dim E - m.$$

On commence par un lemme

Lemme -
Soit φ une forme linéaire définie sur E et F, un sev de E de dimension finie égale à p.
Alors $F \cap \operatorname{Ker}\varphi$ est de dimension finie et $p-1 \leqslant \dim(F \cap \operatorname{Ker}\varphi) \leqslant p$.
Précisément : $\dim(F \cap \operatorname{Ker}\varphi) = p \Leftrightarrow F \subset \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \operatorname{rg} \varphi_{|F} = 0$. Sinon $\dim(F \cap \operatorname{Ker}\varphi) = p-1$.

Démonstration

Démonstration

Proposition - Expression exacte
Soient E de dimension n, F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-m$ ($m \in \mathbb{N}^*$). Alors il existe m hyperplans $H_1, H_2, \dots, H_m$ de E tels que $F = \bigcap_{i=1}^{m} H_i$.

Démonstration

Corollaire - Interprétation géométrique

Dans $\mathbb{R}^2$:
- les hyperplans vectoriels sont les droites vectorielles
- l'intersection de deux droites est de dimension $\geqslant 0$ (en fait 0 ou 1)
- le s.e.v. $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$, de dimension $0 = 2-2$, s'écrit comme intersection de deux droites.

Dans $\mathbb{R}^3$:
- les hyperplans vectoriels sont les plans vectoriels
- l'intersection de deux plans est de dimension $\geqslant 1$ (en fait 1 ou 2)
- les droites, de dimension $1 = 3-2$, s'écrivent comme intersection de deux plans
- le s.e.v. $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$, de dimension $0 = 3-3$, s'écrit comme intersection de trois plans.

Dans les deux cas, on retrouve bien les équations usuelles de droites vectorielles dans $\mathbb{R}^2$, de plans vectoriels ou de droites vectorielles dans $\mathbb{R}^3$.

5. Rang (et noyau) d'une matrice

5.1. Rappel sur la résolution d'un système linéaire

Proposition - Résolution (théorique) d'un système linéaire

On doit résoudre le système (S) : $AX = b$ d'inconnue X, avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Si $b \notin \operatorname{Im} A$, alors $\mathcal{S} = \emptyset$
- Si $b \in \operatorname{Im} A$.

  Alors il existe $X_0 \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ tel que $A \times X_0 = b$.

$$AX = b \Longleftrightarrow A(X - X_0) = 0 \Longleftrightarrow X - X_0 \in \operatorname{Ker} A$$

Alors $\mathcal{S} = X_0 + \operatorname{Ker} A = \{X_0 + Y, Y \in \operatorname{Ker} A\}$ (espace affine).

Savoir faire - Résolution pratique d'un système linéaire

Soit, à résoudre, le système non carrée $AX = b$.

1. On exploite la méthode du pivot de Gauss pour échelonner le système.

   On obtient un système de la forme

$$(E)\left\{\begin{array}{lcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 \quad + \cdots + \cdots + \cdots + a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \quad\ddots \qquad\qquad \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{r,r+k}x_{r+k} + \cdots + a_{r,p}x_p & = & b_r \\ 0 & = & b_{r+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & = & b_n \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} r \text{ équations principales} \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} n-r \text{ équations auxiliaires} \end{array}$$

   Dans ce cas r est appelé <u>rang du système</u>.

   Et $x_1, x_2 \dots x_r$ sont appelés <u>les inconnues principales</u> et $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots x_p$ sont appelés les inconnues <u>auxiliaires ou</u> <u>les variables libres</u>

2. On commente le système échelonné :
   - Combien d'équations principales : c'est le rang de A (voir plus bas)
   - Combien de variables libres ?
   - Quel variable libre choisir ?
   - Exprimer les variables principales en fonction des variables libres

3. Donner la forme de l'ensemble des solutions du système sous forme de combinaisons linéaires

Exercice

Résoudre $\begin{cases} x & +y & +z & = & 2 \\ x & +y & -z & = & -1 \\ 2x & +2y & & = & 3 \end{cases}$ et $\begin{cases} x & +y & +z & = & 2 \\ x & +y & -z & = & -1 \\ 2x & +2y & & = & 1 \end{cases}$

Heuristique - Synthèse

On a vu qu'il y a une correspondance (calcul de l'inverse) entre la donnée d'une matrice A et la donnée d'un système $\mathscr{S} : AX = 0$. Mais :

— Le rg (A) est défini à partir des colonnes de A : rg $(A) = \dim(\text{Im } A)$ (voir plus loin)

— Le rg $(\mathscr{S})$ est défini à partir des lignes de $\mathscr{S}$ (donc de A) : nombre pivots non nuls lorsqu'on échelonne $\mathscr{S}$

Est-ce toujours la même valeur? Et si oui, comment le démontrer? Avec le noyau, ou mieux avec la transformation qui va suivre...

5.2. « Action » des matrices sur $\mathbb{K}^n \equiv \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

D'après le produit par blocs :

Proposition - Multiplication à droite par une colonne : c.l. des colonnes

Soit $A = (C_1|C_2|\cdots|C_p)$, une matrice (association de colonnes de taille n).

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, une matrice colonne.

On a alors AX qui est une matrice colonne, plus précisément :

$$AX = x_1 C_1 + x_2 C_2 + \cdots + x_p C_p,$$

combinaison linéaire des colonnes de A, avec les coefficients-scalaires de X.

Pour aller plus loin - Action d'un groupe sur un ensemble

On dit qu'un groupe G agit sur un ensemble E, s'il existe une opération (loi interne) naturel

$$G \times E \to E, (a, x) \mapsto a \cdot x$$

qui vérifie $e_G \cdot x = x$, pour tout x et $(a \times b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$.

La connaissance de G donne des informations sur cette action.

Et réciproquement, la connaissance de cette action donne des informations sur G et E.

Les actions de groupe ont envahit les mathématiques et la physique depuis les années 1950...

Ce résultat justifie le point de vue suivant :

5.3. Image d'une matrice et famille génératrice

Définition - Image et rang d'une matrice

Soit $A = (C_1|C_2|\cdots|C_p) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle image de A, l'ensemble

$$\begin{aligned} \text{Im } A &= \text{vect}(C_1, C_2, \dots, C_p) \\ &= \{x_1 C_1 + x_2 C_2 + \cdots + x_p C_p, x_1, x_2, \dots x_p \in \mathbb{K}\} \\ &= \{A \times X \mid X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})\} \end{aligned}.$$

Il s'agit du sous espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (des matrices colonnes) engendré par les p colonnes de A.

On appelle rang de A, noté rg (A), la dimension de Im A.

Par définition, Im A (de dimension r) est un s.e.v. de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (de dimension n).

Ils sont égaux, si et seulement si ils ont la même dimension :

Proposition - Famille génératrice, rang d'une matrice

Soit $A = (C_1|C_2|\cdots|C_p) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Supposons que le rang de A est r.

Alors $(C_1, C_2, \dots, C_p)$ est génératrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, i.e. Im $A = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ si et seulement si $r = n$

Remarque - Pour les systèmes linéaires
On reprendra ce résultat lors de l'étude complète des systèmes linéaires

5.4. Noyau d'une matrice et famille libre

Analyse - Les colonnes de A forment-elles une famille libre ?

Définition - Noyau d'une matrice
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle noyau de A, l'ensemble
$$\text{Ker}\, A = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}.$$
Il s'agit d'un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Exercice
Démontrer qu'il s'agit bien de sous-espaces vectoriels.

D'après l'analyse faite quelques lignes plus haut :

Proposition - Famille libre, noyau d'une matrice
Soit $A = (C_1|C_2|\cdots|C_p) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
$(C_1, C_2, \ldots, C_p)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ssi $\text{Ker}\, A = \{0\}$

5.5. Théorème du rang

Théorème - Théorème du rang
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors : $\dim(\text{Ker}\, A) + \text{rg}\,(A) = p$

Démonstration

5.6. Bilan : nouveau critère d'inversibilité (pour une matrice carrée)

Théorème - Noyau de A, image de A et inversibilité
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Alors, les quatre propositions suivantes sont équivalentes :
i) A est inversible
ii) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$
iii) $\operatorname{Im} A = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
iv) le rang de A est égal à n

Attention - Les ensembles du contexte
Il faut bien faire attention qu'ici la matrice carrée de taille $n \times n$ agit sur l'espace des matrices colonnes de taille $n \times 1$.
Ici $p = n$, cela est nécessaire pour espérer que la matrice soit carrée.
On étudie donc alternativement les actions de A sur les deux espaces $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (première partie précédente) et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (sur cette partie)

Démonstration

Exercice

Avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, on voit que $A \times B = 0$.
Pourquoi est-il simple de voir (autrement) que A et B ne sont pas inversibles ?
Quelles sont les dimensions des noyaux et images de A et de B

5.7. Action : $(P, Q) \cdot M \mapsto P \times M \times Q^{-1}$

Heuristique - Précision sur les classes d'équivalence

Lorsque deux matrices sont équivalentes, on dit qu'elles sont dans une même classe d'équivalence.
La bonne habitude consiste alors à décrire cette classe d'équivalence en choisissant un représentant plus ou moins naturel (le plus simple).
(Comme pour l'angle principal $\theta_0 \in [-\pi, \pi[$ représentant de la classe d'équivalence $\{\theta \mid e^{i\theta} = a, \text{ avec } |a| = 1\} = \{\theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$).
Pour y arriver, une bonne méthode consiste d'abord à chercher un invariant, c'est-à-dire un objet (mathématique) caractéristique des classes d'équivalence

$$T(A) = T(B) \Longleftrightarrow A \text{ et } B \text{ sont équivalentes}$$

Cet invariant est le rang de A. Et le représentant sera la matrice $J_r(n, p)$

Nous avons vu que toute matrice inversible pouvait s'écrire comme produit de matrices élémentaires (transvection, dilatation, transposition) (il suffit d'appliquer l'algorithme de Gauss à son inverse).

Remarque - Inversibilité comme un cas particulier...

Nous avons vu que les opérations élémentaires conservent le caractère d'inversibilité d'une matrice.
Peut-être conservent-elles quelque chose de plus « large », autrement dit l'inversibilité serait qu'un cas particulier.
En effet, elles conservent le rang. Une matrice A est alors inversible ssi $r = n$.

Analyse - Reprise de l'algorithme de Gauss

Proposition - Conservation du rang
Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Pour toute matrice $U \in GL_n(\mathbb{K})$ (inversible!), alors $\text{rg}\,(U \times A) = \text{rg}\,(A)$.
Pour toute matrice $V \in GL_p(\mathbb{K})$ (inversible!), alors $\text{rg}\,(A \times V) = \text{rg}\,(A)$.

Démonstration

Il découle alors de l'algorithme du pivot de Gauss :

Proposition - Rang d'une matrice
Soit A, une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
$\text{rg}\,(A)$ est égal au nombre de pivots (non nul) de toute matrice échelonnée obtenue à partir de l'algorithme de Gauss appliqué à A.
C'est-à-dire, $\text{rg}\,(A)$ est le nombre de pivots de toute matrice échelonnée équivalente à A

Démonstration

Définition - Matrice « J_r »
Soient n, p deux entiers et $r \leqslant \min(n,p)$.
On définit $J_r(n,p) = (\alpha_{ij})_{1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où $\alpha_{ij} \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \leqslant r \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

$$J_r(n,p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \\ 0 & \ddots & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,p-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

$O_{p,q}$ étant la matrice nulle de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

En l'absence d'ambiguïté sur la taille de la matrice on la note J_r.

Théorème - Représentant normal
rg $(A) = r$ si et seulement si il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$, tels que $A = PJ_rQ^{-1}$
si et seulement si A et J_r sont équivalentes.

Par transitivité avec J_r :

Corollaire - Invariant
A et B sont équivalentes ssi rg $(A) =$ rg (B)

Démonstration

Proposition - Rang de la A^T
rg $(A^T) =$ rg (A)

Démonstration

5.8. Matrices extraites

Définition - Matrice extraites
On appelle matrice extraite de A toute matrice obtenue en supprimant une ou plusieurs lignes, une ou plusieurs colonnes de A.

Proposition - Extraction est diminition du rang
Soit B une matrice extraite de A, alors rg $(B) \leqslant$ rg (A).

Démonstration

On en déduit une méthode pour connaître le rang d'une matrice :

Proposition - Voir le rang d'une matrice
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Alors rg A est l'ordre maximum d'une matrice carrée inversible extraite de A.

Démonstration

Corollaire - Majoration du rang
Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors
$$\operatorname{rg} A \leqslant \min(n,p).$$

Démonstration

Les propositions suivantes sont déjà connues, mais leurs interprétations sont nouvelles : à partir des applications linéaires...

6. Bilan

Synthèse

- $\rightsquigarrow$ On reprend une remarque précédente : les éléments de E s'écrivent les uns à partir des autres par addition et multiplication par constante. Ces descriptions sont potentiellement multiples : nous préférons la description unique qui élimine les quiproquos.
  Deux questions :
  — est-il possible que $\forall\, u, \exists\,!(v,w)$ tel que $u = v + w$? Quel contrainte sur v, w ? La réponse, ils sont pris dans des ensembles supplémentaires (deux conditions : existence et unicité)
  — est-il possible que $\forall\, u, \exists\,!(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ tel que $u = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$? Quel contrainte sur $(e_i)_{i\in I}$? La réponse, il s'agit d'une famille génératrice de E et libre (deux conditions : existence et unicité)
- $\rightsquigarrow$ Emerge alors la notion de dimension finie. Si dans un espace, il existe une base finie de cardinal n, alors toutes les bases sont du même cardinal. C'est très pratique (cela réduit alors la double contrainte précédente à une seule contrainte.)
- $\rightsquigarrow$ Lorsque les espaces E et F sont de dimensions finies, l'espace $\mathscr{L}(E,F)$ est alors isomorphe à $\mathscr{M}_{\dim E, \dim F}(\mathbb{K})$. On retrouve l'ensemble des résultats sur les matrices, ils s'interprètent de façon renouvelée et réciproquement $\mathscr{M}_{\dim E, \dim F}(\mathbb{K})$ éclaire l'espace $\mathscr{L}(E,F)$.
  Et en particulier, on peut retrouver le théorème du rang.

$\rightsquigarrow$ Enfin, les formes linéaires nous occupent tout particulièrement, car elles sont comme la dualité de la notion de base. Elle permette de reprendre la notion de dimension, par décroissance.

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

— Savoir-faire - Base incomplète
— Savoir-faire - Montrer qu'une famille est une base
— Savoir-faire - Montrer que deux espaces vectoriels sont égaux
— Savoir-faire - Exploitation (lien matrice/isomorphisme)
— Savoir-faire - Petite aide mnémnotechnique
— Truc & Astuce pour le calcul. Etant données A et B, trouver $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ et u.
— Savoir-faire - Exploiter le rang d'endomorphisme restreint ou composé
— Savoir-faire - Résolution pratique d'un système linéaire

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$\text{rg}(x_1, x_2, \dots x_n)$	$\dim(\text{vect}(x_1, x_2, \dots x_n))$		
$\text{rg}\,(u)$	Rang de u	$\text{rg}\,(u) = \dim(\text{Im}\, u)$	$\dim E = \dim(\text{Ker}\, A) + \text{rg}\,(A)$, u inversible ssi $\text{rg}\,(A) = \dim E$.
$\text{Tr}(u)$	Trace de u	$\text{Tr}(u) = \text{Tr}\big(\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)\big)$ (quelle que soit $\mathscr{B}$).	$\text{Tr}(u \circ v) = \text{Tr}(v \circ u)$, si p projecteur : $\text{Tr}(p) = \text{rg}\,(p)$
$\text{Im}\,(A)$	Image de la matrice A	$\text{Im}\,(A) = \text{vect}(C_k(A)) = \{AX; X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}$	
$\text{Ker}\,(A)$	Noyau de la matrice A	$\text{Ker}\,(A) = \{X \in \mathscr{M}_{p,1} \mid AX = 0\}$	A inversible ssi $\text{Ker}\, A = \{0\}$
$\text{rg}\,(A)$	Rang de A	$\text{rg}\,(A) = \dim(\text{Im}\, A)$	$p = \dim(\text{Ker}\, A) + \text{rg}\,(A)$, A inversible ssi $\text{rg}\,(A) = p$, $\text{rg}\,(A) = \text{rg}\,(A^T)$
$J_r(n,p) = \begin{pmatrix} I_r & O_{r,p-r} \\ O_{n-r,r} & O_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$	Matrice J_r	$\text{rg}\,(A) = r \Longleftrightarrow \exists\, P, Q \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K})$ tel que $A = P \times J_r \times Q$	

Retour sur les problèmes

122. En fait, c'est tout le but de ce cours de montrer qu'll s'agit de terminer LES (unique, car c'est une famille libre) coordonnées de $(2,1)$ avec la famille (génératrice de $\mathbb{R}^2$) : $\big((1,1),(1,2)\big)$.
Ici : $(2,1) = 3(1,1) - 1(1,2)$.
En revanche, $\big((1,1,1),(1,2,1)\big)$ ne forme pas une base de $\mathbb{R}^3$. L'écriture de $(2,1,0)$ comme c.l. de cette famille n'est pas assurée, mais pas nécessairement impossible non plus a priori. Il faut calculer...
En regardant les deux première valeurs, on a nécessairement $(2,1,\cdot) = 3(1,1,1) - 1(1,2,1) = (2,1,2)$. Ce n'est donc pas possible.
123. Il n'y a pas unicité, la famille considérée n'est pas libre.
En effet : $(2,1,0) = 3(1,1,1) + 0(1,2,1) - (1,2,3) + 0(1,-1,0) = -3(1,1,1) + 3(1,2,1) + 0(1,2,3) + 2(1,-1,0)$.
Ce n'est important que si l'on veut être sûr de ne pas avoir de quiproquo. Donc c'est souvent très important !
124. Cours
125. Cours : c'est l'isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F) \to \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ étant données une base pour E et une pour F.
126. Elles sont équivalentes, voire semblable si $E = F$ et qu'on considère les mêmes bases.