Chapitre 29

Structures affines

Résumé -

Un espace affine est un espace vectoriel translaté (ou encore avec une origine ailleurs qu'en 0). Une autre façon de penser le lien espace vectoriel/espace affine consiste à faire un faire un parallèle avec le lien base $\mathscr{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (d'un espace vectoriel) / repère $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (d'un espace affine).
Après avoir vu quelques généralités sur les espaces affines, nous nous concentrons sur les deux exemples typiques de notre programme :

— *L'ensemble des solutions d'un système d'équation linéaire non homogène. (Nous pouvons également penser aux solutions d'une équation différentielles linéaire avec second membre...)*
— *L'espace affine géométrique $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$...*

Sommaire

1. Problèmes

? Problème 127 - Droite linéaire vs. droite affine

La géométrie (classique) permet de voir les espaces vectoriels.
Une droite linéaire $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax\}$ est un sous-espace vectoriel de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$.
En géométrie classique, il y a aussi dans l'espace $\mathbb{R}^2$ des sous-ensembles non sev, appelés droites affine : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax + b\}$. Elle est "parallèle" à la droite précédente, mais décalée (translatée) de b (ordonnée à l'origine).
Comment peut-on, de la même façon, découper un espace vectoriel en mille-feuille : l'une est vectoriel, les autres affines et parallèles ?

? Problème 128 - Structure affine de l'ensemble des solutions d'un problème linéaire

A tous les problèmes linéaires nous pouvons associer une structure d'espace vectoriel.
L'ensemble des inconnues est l'espace vectoriel et le problème code une application linéaire.
Lorsqu'il s'agit de trouver les racines du problèmes (solutions lorsque le second membre est nul), on se trouve en présence d'un noyau d'applications linéaires.
Exemple : trouver (u_n) telle que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - u_{n+1} + u_n = 0$.
L'espace est $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, l'application linéaire est $\Phi : (u_n) \mapsto (v_n)$ avec $\forall\ n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{n+3} - u_{n+1} + u_n$. Il s'agit de trouver $\operatorname{Ker}\Phi$.
Mais si le second membre est non nul, quelle est la structure de l'ensemble des solutions ?
Exemple : trouver (u_n) telle que $\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - u_{n+1} + u_n = n + 2$.

? Problème 129 - Réciproquement

Si la géométrie permet de mieux voir les espaces et définir les espaces affines, on peut espérer que les structures algébriques permettent réciproquement de mieux comprendre la géométrie.
Que peut-on dire de l'intersection de trois hyperplans affines dans l'espace ? Est-il possible de coder ce problème sous forme de système à résoudre ? De quelle façon, le rang du système nous informe sur l'ensemble intersecté ?

? Problème 130 - Espaces quotients et supplémentaires

On note pour F sev de E et $a \in E$, $\mathscr{F}$ l'espace affine $a + F$.
Ainsi $b \in \mathscr{F} \Longleftrightarrow \exists\ f \in F$ tel que $b = a + f \Longleftrightarrow b - a \in F$.
On définit ainsi une relation d'équivalence : $a \mathscr{R}_F b$.
Que peut-on dire de l'espace affine $\mathscr{F}$ en terme de classe d'équivalence de a pour $\mathscr{R}_F$?
Si H est supplémentaire de F dans E, on a H est un système de représentants de classes pour $\mathscr{R}_F$.

> Réciproquement, peut-on exploiter cette relation, pour créer un espace vectoriel $\mathscr{F}$, « supplémentaire » (d'une certaine façon) à F dans E?

2. Introduction

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Heuristique - Addition (et soustraction) affine

Si $A, B \in E$, on note $\overrightarrow{AB} = B - A \in \vec{E}$. On a alors

$$\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow A = B$$

$$B = A + \vec{u} \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Heuristique - Repère affine

On appelle alors <u>repère affine</u> de E tout couple $(\Omega, \mathscr{B})$ d'un point Ω de E (l'<u>origine</u> du repère) et d'une base $\mathscr{B}$ de $\vec{E}$. Si $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ alors tout point X de E s'écrit de manière unique sous la forme $X = \Omega + \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i$; on dit que les x_i sont les coordonnées du point X dans le repère affine, ce sont également les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega X}$ dans la base $\mathscr{B}$. (Le choix d'une origine permet "d'identifier " E et $\vec{E}$.)

Pour aller plus loin - Principe et notation

On va s'intéresser à la structure affine de E, c'est-à-dire que les éléments de E vont être repérés par rapport à une origine et considérés comme des "points" (on les notera de préférence en majuscule dans ce cas). Les éléments de E "espace vectoriel", seront noté de préférence en minuscule avec une flèche, et on peut, pour faire la différence, noter $\vec{E}$ l'ensemble E quand il est considéré comme espace vectoriel. D'autre fois, E est l'espace vectoriel considéré et $\mathscr{E}$ un espace affine associé...

3. Translatés d'un sous-espace vectoriel

3.1. Translation (linéaire)

Soit $(E, +, \cdot)$ un K-e.v.

Définition - Translation

Soit $a \in E$. On appelle translation de vecteur a l'application

$$t_a : \begin{array}{l} E \to E \\ x \mapsto x + a \end{array}$$

Proposition - Le groupe des translations $\mathcal{T}(E)$

On note $\mathcal{T}(E)$ l'ensemble des translations de E. Alors $(\mathcal{T}(E), \circ)$ est un groupe commutatif.

En particulier

- Id_E est la translation de vecteur nul.
- $t_a \circ t_b = t_b \circ t_a = t_{a+b}$.
- t_a est bijective de bijection réciproque t_{-a}

Démonstration

On notera bien, pour ce qui suit, que nous ne définissons jamais (ici) un espace affine, mais seulement des sous-espaces affines (à partir d'un espace vectoriel).

3.2. (Sous-)Espaces affines

Définition - Sous-espace affine (d'un espace vectoriel)
Soit $\mathscr{F} \subset E$, autrement écrit : $\mathscr{F}$ une partie de E.
On dit que $\mathscr{F}$ est un sous-espace affine de E s'il existe $a \in E$ et F sous-espace vectoriel de E tels que

$$\mathscr{F} = t_a(F) = \{a + f\,;\, f \in F\}$$

On note alors $\mathscr{F} = a + F$ et on dit que le s.e.v F est la direction du s.e.a. $\mathscr{F}$.

Remarque - Eléments de $\mathscr{F}$
D'après la définition, les éléments de $\mathscr{F}$ sont des éléments de E donc des vecteurs !
Et pourtant la « tradition » veut qu'on appelle ces éléments des points. On les notera souvent avec une lettre majuscule.

Remarque - Autre notation
Si on note un s.e.a. F, on notera sa direction $\vec{F}$.

Remarque - Unicité de $\mathscr{F}$
La définition parle de LA direction F. Faut-il comprendre qu'il est unique ?

Démonstration

Définition - Sea particuliers
Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de E de direction F. On dit que $\mathscr{F}$ est
- un point (ou un singleton réduit à un point) si $F = \{0_E\}$,
- une droite affine si F est une droite vectorielle,
- un plan affine si F est un plan vectoriel,
- un hyperlan affine si F est un hyperplan vectoriel.

Application - Représentation graphique dans $\mathbb{R}^2$ ou dans $\mathbb{R}^3$

Exemple - Cas particuliers

Proposition - Expression d'un s.e.a.
Si $\mathscr{F}$ est un s.e.a de E de direction F,
alors pour tout $a \in \mathscr{F}$ on a $\mathscr{F} = a + F$.

Démonstration

3.3. Exemples variées

Les résultats suivant sont déjà connus, mais il s'interprète de manière tout à fait naturel dans le langage des espaces affines.

Equation simple

Théorème - Résolution d'une équation linéaire $u(x) = b$
Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $b \in F$. On note $S_{\mathscr{E}}$ l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathscr{E}) : u(x) = b$.
- Si $b \notin \mathrm{Im}\ u$ alors $S_{\mathscr{E}} = \emptyset$.
- Si $b \in \mathrm{Im}\ u$ alors $S_{\mathscr{E}} \neq \emptyset$ et si x_0 est une solution particulière de $(\mathscr{E})$ alors
$$S_{\mathscr{E}} = \{x_0 + y ; y \in \mathrm{Ker}\ u\}.$$
$S_{\mathscr{E}}$ est un sous-espace affine de E de direction $\mathrm{Ker}\ u$.

Equations différentielles

Pour l'exercice suivant on donnera une base à l'espace directeur (ce qui donne aussi la valeur de la dimension de l'espace affine des solutions).

Exercice

• Exprimer l'ensemble des solutions de l'équation
$$y' + \cos x \times y = 1 + \tan^2 x + \sin x$$
• Exprimer l'ensemble des solutions de l'équation
$$-3y'' + 4y' - y = \sin x$$

Pour aller plus loin - Linéaire+second membre
Tout les problèmes linéaires avec second membre se resolvent de la même façon :
- *on cherche une solution particulière (point de translation)*
- *on cherche l'espace vectoriel des solutions du problème (linéaire) homogène.*

La somme forme l'espace affine des solutions recherchées

Partout...

Exercice

Trouver les suites (u_n) vérifiant :
$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} + u_{n+1} - 6u_n = 2$$

Exercice

Trouver l'ensemble des polynômes tels que $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 3$ et $P(4) = 5$.

Problème d'interpolation de Lagrange.

Exercice
Trouver l'ensemble des nombres N tels que $N \equiv 1[3]$, $N \equiv 2[5]$, $N \equiv 4[7]$ et $N \equiv 1[11]$.
Problème des restes chinois.

4. Systèmes d'équations linéaires

4.1. Contextes

Pour aller plus loin - Module affine
Sur ce dernier exercice, il ne s'agit pas a proprement parlé d'espace affine et espace vectoriel mais de module, car l'ensemble est défini (pour la loi externe) sur l'anneau $\mathbb{Z}$ et non un corps $\mathbb{K}$. On parle alors de module

En forme de rappels :

Définition - Vocabulaire
On considère le système de n équations à p inconnues :

$$(S)\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{array}\right.$$

La matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$ s'appelle la matrice du système, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(K)$ est la matrice colonne des coordonnées du second membre $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in K^n$.
On appelle système homogène associé à (S) le système

$$(S_H)\left\{\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{array}\right.$$

Définition - Compatibilité du système
Le système est dit compatible si l'ensemble des solutions est non vide.

Remarque - Rang du système
On appelle rang du système (S) le rang de la matrice A.

4.2. Interprétations

Les résultats et propositions qui suivent découlent du cours précédent, ce qui change est leur interprétation (en fait, « le point de vue s'élargit »). Cela ne mérite donc, de manière générale, aucune démonstration.

Proposition - Interprétation linéaire
Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ définie par

$$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \to & \mathbb{K}^n \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p \end{pmatrix} \end{array}$$

et $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Alors

$$(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de } (S) \Leftrightarrow u(x) = b$$

Le système est compatible si et seulement si $b \in \Im u$.

Proposition - Rang du système
Le rang du système (S) est égal au rang de u : $\text{rg}\,(S) = \text{rg}\,(A) = \text{rg}\,(u)$.

Proposition - Interprétation duale
Considérons les n formes linéaires φ_i sur $\mathbb{K}^p$ définies par

$$\varphi_i: \begin{array}{l} \mathbb{K}^p \to \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_p) \mapsto a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x_p \end{array}$$

Alors

$$(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de } (S) \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, \varphi_i(x) = b_i$$

L'ensemble des solutions du système homogène est alors $\text{Ker}\,\varphi_1 \cap \ldots \cap \text{Ker}\,\varphi_n$.

4.3. Structure de l'ensemble des solutions

On note $\mathbb{S}_0$ l'ensemble des solutions du système homogène associé et $\mathbb{S}$ l'ensemble des solutions du système (S).

Théorème - Dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{S}_0$
$\mathbb{S}_0$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p - \text{rg}\,(S)$.

Théorème - Résolution de système. Interprétation affine.
Si (S) est compatible, alors il existe une solution particulière x_0.
Dans ce cas,

$$\mathbb{S} = \{x_0 + y; y \in \mathbb{S}_0\}$$

et $\mathbb{S}$ est un espace affine de dimension $p - \text{rg}\,(S)$.
Un tel système a $\text{rg}\,(S)$ inconnues principales et $p - \text{rg}\,(S)$ inconnues secondaires.

Exercice
Résoudre le système

$$\left\{ \begin{array}{llllllr} 2x_1 & -2x_2 & +x_3 & -5x_4 & +3x_5 & = & 8 \\ & 2x_2 & -4x_3 & -9x_4 & +7x_5 & = & 6 \\ -6x_1 & +7x_2 & -6x_3 & +11x_4 & -7x_5 & = & -23 \\ 2x_1 & -5x_2 & +14x_3 & +5x_4 & +3x_5 & = & 13 \end{array} \right.$$

5. Equations, intersections et parallélisme

5.1. Cas général

Proposition - Intersection de sous-espaces affines
Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de directions respectives F et G.
Si $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$ alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est un sea de direction le s.e.v $F \cap G$.

Démonstration

Si $F \cap G = \{0\}$, i.e. $F \oplus G$:

Corollaire - Espaces supplémentaires
Soient $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ deux sous-espaces affines de directions respectives F et G vérifiant $F \oplus G = E$. Alors $\mathscr{F} \cap \mathscr{G}$ est un singleton.

Remarque - Hypothèse superflue ?
Il faudrait également montrer que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \not\emptyset$.
Mais Le fait que la somme $F + G$ donne E implique que $\mathscr{F} \cap \mathscr{G} \neq \emptyset$, d'après un des exercices du chapitre (n°495) ...

Définition - Sous-espaces affines parallèles
On dit que le sous-espace affine $\mathscr{F}$ est parallèle au sous-espace affine $\mathscr{G}$ si $F \subset G$.
On dit que que deux sous espaces affines $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont parallèles si $F = G$.

Attention - Relation d'équivalence. Relation d'ordre
Etre parallèle n'est donc pas une relation d'équivalence (non symétrique).
Mais il s'agit d'une pseudo-relation d'ordre (légère difficulté : on parle des espaces affines, et on a une égalité sur les espaces vectoriels, dans le cas de l'antisymétrie).
Par ailleurs, la relation n'est clairement pas totale

Proposition - Equation d'un hyperplan affine
Soit $\mathscr{R} = (\Omega, e_1, \dots, e_n)$ un repère affine de l'espace E de dimension n. Alors
- Un hyperlpan affine $\mathscr{H}$ de E possède au moins une équation dans $\mathscr{R}$ du type :
$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = h \text{ avec } (a_1, \dots, a_n) \neq (0, \dots, 0). \quad (*)$$
- Réciproquement la relation $(*)$ est l'équation d'un hyperlpan affine dont la direction admet pour équation cartésienne
$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0.$$
- Deux équations de la forme $(*)$ représentent le même hyperplan

affine si et seulement si elles sont proportionnelles.

Démonstration

5.2. Dans un plan (espace de dimension 2)

On retrouve les résultats du plan usuel, qui sont généralisable à tout espace (affine) de dimension 2 (comme par exemple, l'espace des suites récurrentes linéaires d'ordre 2)

Théorème - Equation de droites
Soit $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère du plan. Alors

— Toute droite possède une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a,b) \neq (0,0)$, $\vec{u}(-b,a)$ en est un vecteur directeur.
— Réciproquement, toute équation cartésienne de ce type décrit une droite.
— Deux telles équations représentent la même droite si et seulement si elles sont proportionnelles.

Définition - Equation paramétrique
Soit $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ un repère du plan. Alors une droite possède des équations paramétriques (ou une représentation paramétrique) de la forme

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Il s'agit alors de la droite passant par $M_0(x_0, y_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(u_1, u_2)$.

Démonstration

Proposition - Droites parallèles
Deux droites affines du plan sont parallèles si elles ont même direction et, si elle ne sont pas parallèles, leur intersection est réduite à un point.

5.3. Dans un espace de dimension 3

Comme précédemment, dans le cas où l'espace vectoriel directeur est de dimension 1 (droite dans l'espace) :

Définition - Représentation paramétrique d'une droite
Soit $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère quelconque de l'espace. Alors une droite possède des équations paramétriques (ou une représentation paramétrique) de la forme

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \\ z = z_0 + tu_3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Il s'agit alors de la droite passant par $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteur directeur

$\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$.

Comme précédemment, dans le cas où l'espace vectoriel directeur est de dimension 2 (plan dans l'espace) :

Définition - Représentation paramétrique d'un plan
Soit $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère quelconque de l'espace. Alors un plan possède des équations paramétriques (ou une représentation paramétrique) de la forme

$$\begin{cases} x = x_0 + tu_1 + sv_1 \\ y = y_0 + tu_2 + sv_2 \\ z = z_0 + tu_3 + sv_3 \end{cases} \quad (t, s) \in \mathbb{R}^2$$

Il s'agit alors du plan passant par $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ (Attention : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ doivent être linéairement indépendants, sinon il s'agit d'une droite).

Théorème - Equation cartésienne d'un plan
Soit $(\Omega, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère de l'espace. Alors

— Tout plan possède une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

— Réciproquement, toute équation cartésienne de ce type décrit un plan.

Démonstration

Proposition - Equations cartésiennes d'une droite
Soient deux plans d'équations respectives
$ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$. Alors

— Si (a, b, c) et (a', b', c') sont proportionnels, alors $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles (i.e. ont le même plan vectoriel comme direction, ou les mêmes vecteurs directeurs).
De plus si (a, b, c, d) et (a', b', c', d') sont proportionnels alors $\mathscr{P} = \mathscr{P}'$, sinon $\mathscr{P} \cap \mathscr{P}' = \emptyset$.

— Si (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnels, alors $\Delta = \mathscr{P} \cap \mathscr{P}'$ est une droite.
$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ s'appelle un système d'équations cartésiennes de Δ.

Attention - Parallélisme et intersection
Dans l'espace de dimension 3,

— deux droites sont parallèles si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires,

— deux plans sont parallèles s'ils ont le même plan vectoriel pour direction,

— une droite peut être parallèle a un plan si son vecteur directeur appartient à la direction du plan,

— mais il est incorrect de dire qu'un plan est parallèle à une droite,

— l'intersection d'une droite $\mathscr{D}$ non parallèle à un plan $\mathscr{P}$, et du plan

- $\mathscr{P}$ est un point.

6. Bilan

Synthèse

⇝ Les structures affines sont des milles-feuilles d'espaces vectoriels qui ne contiennent pas nécessairement le vecteur nul. Cela permet d'offrir une liberté aux mathématiciens.

⇝ Cela s'applique dans de nombreux domaines : nous nous concentrons ici uniquement sur les systèmes d'équations linéaires et sur la géométrie de dimension 2 ou 3.

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$\mathscr{F}$	Espace affine, défini par un sous-espace F et a un « point » quelconque de F	$\mathscr{F} = a + F$	

Retour sur les problèmes

127. Cours
128. La suite u définie par $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $u_n = An + B$.
$u_{n+3} - u_{n+1} + u_n = A(n+3-n-1+n) + B(1-1+1) = An + (B+2A)$.
Donc avec $A = 1$ et $B = 0$, on a une solution particulière.
On note $a, b, \overline{b}$ les trois racines (complexes) de l'équation caractéristique associée.
L'espace vectoriel des solutions de l'équation homogène est $E = \text{vect}((a^n), (b^n), (\overline{b}^n))$
L'ensemble des solutions du problème est donc l'espace affine : $u + E$.
129. Le rang du système nous donne la codimension de l'espace vectoriel qui dirige l'espace affine en question : 2 ou 1 voir 0. (En fait ce qui compte, c'est la dimension du noyau).
Il faut également trouver un point d'intersection comme origine de l'espace affine solution.
130. $\mathscr{F} = \overline{a}_{\mathscr{R}_F}$.
L'étude sur H, en découle.