Chapitre 30

Espaces vectoriels euclidiens

Résumé -

Dans les situations physiques, les espaces considérés (vectoriels ou affine) sont en règle générale munie d'un produit scalaire. On peut donc faire l'étude de ces espaces que l'on appelle préhilbertien. Mais la motivation mathématique aurait été déjà suffisante : un produit scalaire bien choisi c'est une étude renforcée de la dualité ($E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$), ou encore l'étude des coordonnées sur une base...
Nous commençons par étudier la notion abstraite (théorique) des produits scalaires. Nous enchainons avec la notion importante d'orthogonalité (qui précise d'une certaine façon la question d'espace supplémentaire). Comme pour l'algèbre linéaire, nous nous concentrons ensuite sur le espaces de dimension finies, avant d'étudier une famille d'applications linéaires particulières : les projections orthogonales (et symétries orthogonales). Dans le chapitre suivant, nous élargirons cette étude aux isométries vectorielles et affines.

Sommaire

1. Problèmes

? Problème 131 - Expérience physique

Les espaces (vectoriels) dont on parle en mathématiques sont des idéalisations des espaces géométriques des espaces à 1,2 ou 3 dimensions de la physique.
Or dans ces espaces physiques (ou géométriques), il y a aussi naturellement un produit entre les vecteurs : le produit scalaire si souvent utilisé en Physique.
Si on essaye alors d'idéaliser également les produit scalaire dans les espaces vectoriels, quelles sont les propriétés algébriques et abstraites que doivent vérifier cette opération entre deux vecteurs ? Quels sont l'origine et le but de cette opération ? Est-elle (bi)linéaire ? Et que penser du fait que $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est un nombre strictement positif ssi $\vec{u} \neq 0$?

? Problème 132 - Projection selon un vecteur

Continuons. En physique, on exploite souvent le produit scalaire pour projeter un vecteur sur un autre.
Dans le cours sur les espaces vectoriels, les projecteurs sont parfois problématiques : ils existent dès qu'on dispose de deux espaces supplémentaires dans E, mais l'expression $x \mapsto p(x)$ est rarement explicite.
Est-il possible d'exploiter les produits scalaires pour pouvoir exprimer explicitement $p_{\vec{u}}(\vec{x})$, la projection de $\vec{x}$ sur $\vec{u}$?
Et plus largement, sur un sous-espace vectoriel ?

? Problème 133 - Espace orthogonaux

Nous savons qu'un sous-espace vectoriel admet une INFINITE de sous-espace supplémentaire dans E.
Si F est connue, ainsi que p_F, alors cela ne définit-il pas aussi l'espace G tel que $E = F \oplus G$ et p_F est la projection sur F de direction G ?
Il existe donc un UNIQUE espace supplémentaire à F qui est privilégié dans l'espace (euclidien) E. Qui est-il ?

? Problème 134 - Décomposition sur une base

Comme pour les projecteurs, étant donné une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ de E, l'application

$$\Phi : E \longrightarrow \mathbb{K}^n, x \longmapsto (a_1, \dots a_n) \text{ tel que } x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$$

n'est pas, en générale, pas explicite. Si il est possible d'expliciter les projecteurs, sûrement est-il également le cas pour cette application ou pour les $\Phi_k : x \mapsto a_k$.
En fait, on verra que cela est naturel quand la base est orthonormée (pour un produit scalaire définie sur E) ? Qu'est-ce que cela signifie ?

? Problème 135 - Bases orthonormées

Est-ce que tous les espaces euclidiens (vectoriels, finis, avec un produit scalaire) admettent au moins une base orthonormée ? Peut-on prolonger également les autres théorèmes sur les bases : bases incomplètes...

? Problème 136 - Dualité et problème réciproque

Soit E euclidien, $\mathscr{B} = (e_1, \dots e_n)$ une base. On notera alors que $\Phi_k : E \to \mathbb{K}, x \mapsto a_k$ (tel que $x = \sum_{k=0}^{n} \Phi_k(x) e_k$) est une fome linéaire.
Réciproquement, est-ce qu'une forme linéaire s'associe nécessairement à un vecteur ?
Une famille de formes linéaires indépendantes à une base orthogonale ? Cela dépend sûrement du produit scalaire...

Dans ce chapitre les espaces vectoriels sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels exclusivement.

2. Définitions et règles de calcul

2.1. Produit scalaire

Définition - Produit scalaire
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit que ϕ est un produit scalaire sur E si ϕ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire si ϕ est une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

1. (bilinéaire)
$$\forall (x, x', y) \in E^3, \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2, \phi(\lambda x + \lambda x', y) = \lambda \phi(x, y) + \lambda' \phi(x', y)$$
$$\forall (x, y, y') \in E^3, \forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{R}^2, \phi(x, \lambda y + \lambda' y') = \lambda \phi(x, y) + \lambda' \phi(x, y')$$
2. (symétrique)
$$\forall (x, y) \in E^2, \phi(x, y) = \phi(y, x)$$
3. (positive)
$$\forall x \in E, \phi(x, x) \geqslant 0$$
4. (définie)
$$\forall x \in E, \phi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$$

Pour aller plus loin - Espace hermitien (1)
Il existe une théorie des produits scalaires complexes. On parle d'espace hermitien, en hommage à Charles Hermite, mathématicien français de la fin du XIX siècle.

Remarque - Linéarité+symétrie
ϕ bilinéaire signifie que, à x_0 fixé, $y \mapsto \phi(x_0, y)$ est une forme linéaire sur E et que, à y_0 fixé, $x \mapsto \phi(x, y_0)$ est aussi une forme linéaire.
Si ϕ est symétrique et "linéaire par rapport à la première variable", alors ϕ est nécessairement bilinéaire.

Pour aller plus loin - Forme sesquilinéaire, hermitienne
On dit que $f \in E^*$ (forme linéaire), avec E, $\mathbb{C}$-ev est sesquilinéaire si
$\forall\ \lambda, \mu \in \mathbb{C}, x, y \in E,$
$f(\lambda x + \mu y) = \overline{\lambda} f(x) + \overline{\mu} f(x).$
On dit que f (forme linéaire sur $(E^*)^2$) est hermitienne si
$\forall\ x, y \in E, f(x, y) = \overline{f(y, x)}.$

On appelle produit scalaire complexe, toute forme linéaire à gauche, sesquilinéaire à droite (ou l'inverse) hermitienne, définie et positive.

Définition - Notations
Les notations les plus usuelles sont :
$$\phi(x, y) = (x, y) = \langle x, y \rangle = \langle x \mid y \rangle = x \cdot y$$

Définition - Espace préhilbertien réel
On appelle espace préhilbertien réel un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

Savoir faire - Montrer qu'on a un produit scalaire

On vérifie chacune des hypothèses...
A commencer par le fait qu'il s'agisse d'une forme linéaire!
On démontre la symétrie avant la linéarité à gauche. Comme cela, on obtient la linéarité à droite.
On démontre la forme positive avant le fait que cela soit une forme définie.

Proposition - La bilinéarité en action
Soient $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ et $(Y_j)_{1\leqslant j\leqslant s}$ deux familles de vecteurs de E et $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ et $(\mu_j)_{1\leqslant j\leqslant s}$ deux familles de réels. Alors

$$\langle \sum_{i=1}^{r} \lambda_i X_i \mid \sum_{j=1}^{s} \mu_j Y_j\rangle = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \lambda_i\mu_j \langle X_i \mid Y_j\rangle.$$

Démonstration

Théorème - Inégalité de Cauchy-Schwarz
Soient $x, y \in E$,

$$\langle x \mid y\rangle^2 \leqslant \langle x \mid x\rangle\langle y \mid y\rangle$$

avec égalité si et seulement si (x, y) est une famille liée.

Démonstration classique (parmi les 10 à connaître sur l'année).

Démonstration

Pour aller plus loin - Pour les produit scalaire complexe
L'inégalité de Cauchy-Schwarz reste vraie, on voit apparaître des modules.
Ils sont nécessaires et expliquent la définition donnée à de telles produits

2.2. Norme euclidienne

Définition - Norme
On appelle norme sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E toute application N de E dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$$
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall x \in E,\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$$
$$\forall (x,y) \in E^2,\ N(x+y) \leqslant N(x) + N(y) \text{ (inégalité triangulaire)}$$

Corollaire - Propriétés directes
Plus précisément :
— $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
— $N(-x) = N(x)$
— $N(x) \geqslant 0$

Démonstration

Proposition - Inégalité triangulaire revisitée
Soit N une norme sur E, alors

$$\forall (x,y) \in E^2,\ \Big|N(x) - N(y)\Big| \leqslant N(x+y) \leqslant N(x) + N(y).$$

Démonstration

Définition - Vecteur unitaire
Soit N une norme sur E. Un vecteur x de E est dit unitaire (ou normé) si $N(x) = 1$.

Définition - Distance associée (et proposition)
Si N est une norme sur E, l'application

$$d \ : \begin{array}{ll} E^2 & \to \mathbb{R}_+ \\ (A,B) & \mapsto N(B-A) \end{array}$$

est appelée distance associée à la norme N et vérifie
— $\forall (A,B) \in E^2,\ d(A,B) = 0 \Leftrightarrow A = B$
— $\forall (A,B) \in E^2,\ d(A,B) = d(B,A)$
— $\forall (A,B,C) \in E^3,\ d(A,C) \leqslant d(A,B) + d(B,C)$

Démonstration

Proposition - Norme euclidienne

Si E est muni d'un produit scalaire $\langle . | . \rangle$ alors l'application

$$\begin{array}{ll} E & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle} \end{array}$$

est une norme sur E. On l'appelle norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle . | . \rangle$, la distance associée est appelée distance euclidienne.

Pour aller plus loin - Espace métrique

On appelle espace normé, un espace vectoriel muni d'une norme.
On appelle espace métrique, un espace vectoriel muni d'une distance.
D'après notre définition-proposition : toute espace normé est un cas particulier d'espace métrique.
D'une certaine façon, la topologie est l'étude des espaces métriques.
Les espaces préhilbertiens forment une classe très particulières des espaces métriques…

Remarque - Inégalité de Minkowski

L'inégalité triangulaire d'une norme, qui dérive d'un produit scalaire (norme euclidienne) s'appelle en règle générale l'inégalité de Minkowski. Elle a un sens géométrique certain (et pas uniquement algébrique)

Démonstration

Histoire - Hermann Minkowski

Hermann Minkowski, né à Alexotas en Russie (aujourd'hui en Lituanie) le 22 juin 1864 et mort à Göttingen le 12 janvier 1909, est un mathématicien et un physicien théoricien allemand.
Il est également connu pour sa contribution non négligeable auprès d'Einstein pour la mise en place de la théorie de la relativité générale.

Exercice

Soit E un espace préhilbertien. Dans quel cas a-t-on $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ (l'égalité triangulaire) ?

Corollaire - Inégalités (Cauchy-Schwarz, Minkowski) avec des normes

Soit E, un espace préhilbertien.

$$\forall (x, y) \in E^2, |\langle x | y \rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\|$$

avec égalité si et seulement si (x, y) est une famille liée.

$$\forall (x, y) \in E^2, \|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

avec égalité si et seulement si (x, y) est positivement liée.

Savoir faire - Montrer qu'on a une norme

On vérifie chacune des hypothèses...

Ou bien; on démontre que la norme dérive d'un produit scalaire bien connue (ou démontré)

Proposition - Produits scalaires usuels et normes associées

On définit des produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$, et sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$, en posant :

— sur $\mathbb{R}^n$, avec $x=(x_1,\dots,x_n)$ et $y=(y_1,\dots,y_n)$,

$$\langle x \mid y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

— sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$,

$$\langle f \mid g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)\,dt \quad \|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,dt}$$

Démonstration

Exemple - Application de ces inégalités

2.3. Différentes identités

Théorème - Identités
Soit E un e.v. muni d'un produit scalaire $\langle . | . \rangle$ et $\|.\|$ la norme associée. Pour $(x, y) \in E^2$ on a

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x \mid y\rangle$$
$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x \mid y\rangle$$
$$\langle x \mid y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Les trois premières égalités sont appelées « identités de polarisation » (elles permettent de récupérer le produit scalaire à partir de la norme) et la quatrième « égalité du parallélogramme »

Démonstration

Remarque - Identité de polarisation
Non seulement, elles permettent de récupérer le produit scalaire à partir de la norme, mais surtout, elles permettent de savoir si une norme donné dérive d'un produit scalaire.
Ou encore, de manière identique, elles permettent de savoir si un espace normé est en fait un espace euclidien. Dans ce cas, il aurait une structure beaucoup plus riche (comme on le voit par la suite avec les notions d'orthogonalité ou d'angles...)

Savoir faire - Montrer qu'on a une norme est euclidienne
La polarisation donne une expression d'une forme bilinéaire qui nécessairement est à l'origine de la norme, si celle-ci est bien euclidienne. Il s'agit donc de vérifier chacun des points pour cette forme : $(x, y) := \frac{1}{2}(N(x+y) - N(x) - N(y)$ (ou $\frac{1}{4}(N(x+y) - N(x-y)$). C'est sur la linéarité qu'on peut avoir des difficultés...

Pour l'exercice suivant, on fera attention à ne pas confondre vecteur x, y et coordonnées $x, y\dots$

Exercice

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $Q(x, y) = 2x^2 + 5y^2 - 2xy$. Montrer que Q est le carré d'une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice

Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on pose $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$. Montrer que $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$, non euclidienne.

3. Orthogonalité

E désigne un espace préhilbertien réel.

3.1. Vecteurs orthogonaux

Définition - Vecteurs orthogonaux

Soient x et y deux vecteurs de E. x et y sont dits orthogonaux si $\langle x \mid y \rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.

Théorème - Pythagore

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration

Exercice

Montrer que dans $\mathscr{C}([0, \pi], \mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel, $\sin \perp \cos$.

3.2. Sous-espaces orthogonaux

Définition - Espace orthogonaux

Soient F et G deux s.e.v de E. F et G sont dits orthogonaux si

$$\forall x \in F, \forall y \in G, x \perp y.$$

On note alors $F \perp G$.

Proposition - Résultats directs

Soient F et G deux s.e.v de E.

— Si $F \perp G$ alors $F \cap G = \{0_E\}$.

— Si $F = \text{vect}(f_1, \dots, f_n)$ et $G = \text{vect}(g_1, \dots, g_p)$ alors

$$(F \perp G) \Leftrightarrow (\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!], f_i \perp g_j).$$

Démonstration

Définition - « Le » espace orthogonal
Soit F un s.e.v de E. On appelle orthogonal de F, et on note $F^{\perp}$, l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à ceux de F :

$$F^{\perp} = \{x \in E \mid \forall y \in F, x \perp y\}.$$

$F^{\perp}$ est un s.e.v. de E. Plus précisément, il s'agit du plus grand espace vectoriel pour la relation d'ordre de l'inclusion :

$$G \perp F \Rightarrow G \subset F^{\perp}$$

Démonstration

Proposition - Propriétés de l'orthogonal
Soient F, G deux s.e.v de E. Alors

$F \subset (F^{\perp})^{\perp}$;

$F \subset G \Rightarrow G^{\perp} \subset F^{\perp}$.

Démonstration

Remarque - A-t-on égalité $F = (F^{\perp})^{\perp}$?
Dans le cas des espaces de dimensions finis, nous verrons avec un raisonnement sur la dimension qu'on a nécessairement l'égalité ($\dim F = \dim E - \dim F^{\perp} = \dim (F^{\perp})^{\perp}$).
Dans le cas infini, il peut n'y avoir qu'une inclusion : Par exemple, en prenant $E = \mathbb{C}^0(I)$ et F, l'espace des fonctions polynomiales.
Alors, par argument de densité : $F^{\perp} = \{0\}$ et donc $(F^{\perp})^{\perp} = E \neq F$

3.3. Familles orthogonales, orthonormales

Heuristique - Intérêt des bases orthonormales

Lorsqu'on connait une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots e_n)$ d'un espace vectoriel E, on écrit régulièrement :
« si $x \in E$, alors x s'écrit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \dots$ ».
Ce qui serait bien ce serait de pouvoir faire « un truc » qui nous permette d'avoir accès à x_i à partir de x et de la base $\mathscr{B}$.
Ce truc, ou opération devrait pouvoir affirmer :
coordonnée du vecteur e_i dans la base (e_k) : 1 si $k = i$ et 0 si $k \neq i$.
C'est exactement ce que propose un produit scalaire, pour une base orthonormale

Pour aller plus loin - Forme linéaire duale
Plus précisément ce qu'on cherche : $\Phi_i : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_i$.
On a en fait $\Phi_i : x \mapsto \langle x | e_i \rangle$ si la famille $(e_1, e_2, \dots e_n)$ est une base orthonormée de E

Définition - Famille orthogonale - orthonormale
Soit $\mathscr{F} = (u_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathscr{F}$ est orthogonale si $\forall (i,j) \in I^2$, $i \neq j \Rightarrow u_i \perp u_j$, et que $\mathscr{F}$ est orthonormale (orthonormée) si elle est orthogonale et $\forall i \in I$, $\|u_i\| = 1$.

Exercice

Montrer que pour la produit scalaire : $\langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P^{(k)}(a) Q^{(k)}(a)$ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$, la base $((X-a)^k)_k$ est une base orthogonale.
Retrouver la formule de Taylor

Pour aller plus loin - Polynôme de Lagrange
On peut faire un exercice équivalent en choisissant bien le produit scalaire et pour lequel la base est formée de la famille des polynômes d'interpolation de Lagrange

Proposition - Famille libre
Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
Toute famille orthonormale est libre.

Démonstration

Proposition - Pythagore (généralisé)
Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille orthogonale de vecteurs de E. On a

$$\left\| \sum_{i=1}^{p} u_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|u_i\|^2.$$

Démonstration

Théorème - Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt
Soit E un $\mathbb{R}$-e.v. muni d'un produit scalaire et $\mathscr{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ une famille libre de vecteurs de E.
On définit la famille $\mathscr{F} = (f_1, \ldots, f_p)$ par

$$f_1 = \frac{1}{\|e_1\|} e_1$$

$$\forall i \in [\![2, p]\!],\ f_i = \frac{1}{\|e'_i\|} e'_i \text{ où } e'_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle e_i \mid f_j \rangle f_j$$

Alors $\mathscr{F}$ est une famille orthonormale de E telle que

$$\forall k \in [\![1, p]\!],\ \mathrm{vect}(f_1, \ldots, f_k) = \mathrm{vect}(e_1, \ldots, e_k).$$

On dit que $\mathscr{F}$ est déduite de $\mathscr{E}$ par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

Histoire - Schmidt

Erhard Schmidt (13 janvier 1876 - 6 décembre 1959) est un mathématicien allemand né à Dorpat, dans l'Empire russe (aujourd'hui Tartu, en Estonie). Le procédé d'othonormalisation est souvent associé également à Jorgen Petersen Gram.

Démonstration

Remarque - Cette famille orthonormalisée est-elle unique ?
La famille obtenue ne dépend que de la famille initiale. Est-elle unique?

D'une certaine façon, non. On aurait pu choisir $-f_i$, on aurait alors obtenue une nouvelle famille orthonormale à partir de la même famille $(e_1, \dots e_n)$.
A cette différence de signe près, il n'y a pas d'autres solutions à partir de la famille $(e_1, \dots e_n)$. Notons que lorsqu'on calcule e'_i, les signes se compensent.

Savoir faire - Orthonormaliser une base

> Pour obtenir une base orthonormalisée, on considère une base de E.
> On commence par l'orthogonaliser, puis la normaliser à chaque étape.
> Au final, e'_i est la soustraction de e_i, du projeté orthogonal de e_i sur $\text{vect}(e_j)_{j<i}$.

Exercice

Vérifier que l'on munit $\mathbb{R}_2[X]$ d'un produit scalaire en posant $\langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.
Déterminer une b.o.n. de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

4. Cas de la dimension finie : espaces euclidiens

4.1. Définition

Définition - Espace euclidien
Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-e.v. de dimension finie, muni d'un produit scalaire (c'est-à-dire un espace préhilbertien réel de dimension finie).

Pour aller plus loin - Espace hermitien
Un espace préhilbertien complexe de dimension finie a été baptisé par David Hilbert, espace hermitien

Exemple - Retour sur les deux produits canoniques

Proposition - Ecriture matricielle
Soit E est un espace euclidien (produit scalaire noté $\langle . \mid . \rangle$), muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
On note A la matrice

$$A = \Big(\langle e_i \mid e_j \rangle\Big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} \|e_1\|^2 & \dots & \langle e_1 \mid e_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle e_n \mid e_1 \rangle & \dots & \|e_n\|^2 \end{pmatrix}$$

appelée matrice du produit scalaire dans la base $\mathcal{B}$.
Soient X et Y les matrices colonnes de $x \in E$ respectivement de $y \in E$ dans $\mathcal{B}$.
Alors, en identifiant une matrice d'ordre 1 à son unique coefficient, on a

$$\langle x \mid y \rangle = {}^t X A Y$$

Pour aller plus loin - Algèbre bilinéaire
Il s'agit maintenant d'algèbre bilinéaire.
Un même objet -une matrice- peut donc avoir deux sens différents.
En algèbre linéaire : $f(x) \circlearrowleft A \times X$
En algèbre bilinéaire : $\Phi(x, y) \circlearrowleft X^T A \times Y$

Exercice

Que dire de $\mathcal{B}$ si $A = I_n$?

Démonstration

Proposition - Propriétés de la matrice d'un produit scalaire
Soit A la matrice d'un produit scalaire dans une base quelconque. Alors
- A est une matrice symétrique : ${}^tA = A$;
- A est une matrice <u>positive</u> : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX \geqslant 0$;
- A est une matrice <u>définie</u> : $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = 0 \Rightarrow X = O_{n,1}$;
- A est inversible : $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

Démonstration

Remarque - Toutes les propriétés essentielles du produit scalaire
se répercutent directement comme propriétés essentielles de la matrice A.
- La bilinéaire donne l'existence de la matrice
- La forme se transforme en produit qui donne un nombre en bout de course
- Le fait d'être positif
- Le fait d'être défini

Exercice
Montrer que les valeurs propres d'une matrice symétrique définie positive sont des réels strictement positifs.

Pour aller plus loin - Valeur propre
$\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de A s'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X \neq O_{n,1}$ tel que $AX = \lambda X$

4.2. Bases orthonormales

Définition - Base orthonormale
$\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E euclidien si $\mathscr{B}$ est une base de E et une famille orthonormale.

Exemple - Base canonique

Théorème - Existence de bases orthonormales
- Tout espace vectoriel euclidien possède une base orthonormale.
- Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale de E.

Démonstration

Exercice
Réciproquement, étant donné une base $\mathscr{B}$ de E, $\mathbb{R}$-ev.
Existe-t-il un produit scalaire de E telle que la base $\mathscr{B}$ soit orthonormales ?

Savoir faire - Montrer qu'une famille est une base orthonormée

De même que pour savoir si une famille est une base, on exploite la matrice de cette famille; pour montrer qu'une famille est une base orthonormale, on peut commencer par écrire sa matrice de corrélation : $A = (\langle e_i, e_j\rangle)_{i,j}$.
Cette matrice est symétrique. Elle est inversible ssi (e_i) est une base.
Cette matrice est diagonale ssi (e_i) est une famille orthogonale.
$A = I_n$ ssi (e_i) est orthonormée.

Proposition - Calculs en b.o.n

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E euclidien (pour le produit scalaire $\langle . | . \rangle$).
Soient $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ deux vecteurs de E, X et Y les matrices colonnes associées. Alors :

$$\langle x | y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^tXY$$

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = \langle x | e_i\rangle$$

Proposition - Opération matricielle de changement de base orthonormale

Soient $\mathscr{B}$ une base orthonormale de E euclidien de dimension n, $\mathscr{B}'$ une famille de n vecteurs de E, et P la matrice de $\mathscr{B}'$ dans $\mathscr{B}$. Alors $\mathscr{B}'$ est une base orthonormale de E si et seulement si ${}^tPP = I_n$.
Dans ce cas on a donc $P^{-1} = {}^tP$ (on dit que P est une matrice orthogonale).

Remarque - Matrice de passage

On rappelle que la matrice P de $\mathscr{B}'$ dans $\mathscr{B}$ est, comme son nom l'indique, la matrice des coordonnées des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ écrite dans la base $\mathscr{B}$.
Elle vérifie pour X et X' matrice de x écrites dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ respectivement :

$$X = PX'$$

Démonstration

Savoir faire - Changement de base pour une forme bilinéaire

Soit E un espace euclidien et deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.
Si x a pour coordonnées X dans $\mathscr{B}$ et X' dans $\mathscr{B}'$.
Si y a pour coordonnées Y dans $\mathscr{B}$ et Y' dans $\mathscr{B}'$.
On note A et A' la matrices du produit scalaire dans chacune des deux bases.
Enfin, on note P la matrice de $\mathscr{B}'$ dans $\mathscr{B}$.
On a alors $X = PX'$, $Y = PY'$.

$$\langle x \mid y \rangle =^t XAY =^t X'A'Y' =^t X'^t PAPY'$$

Ceci étant vrai pour tout x, y, on a donc nécessairement $A' =^t PAP$ Ce résultat reste vraie que les bases sont orthonormales ou non

Exercice

$E = \mathbb{R}^3$, $\mathscr{B}$ base canonique. On pose $\mathscr{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ où

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3),\ f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(e_1 + e_2 + e_3),\ f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(e_1 - 2e_2 + e_3).$$

Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base orthonormale de E (pour le produit scalaire canonique).
Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ défini par $f(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z)$. Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice

Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

5. Projections orthogonales

5.1. Supplémentaire orthogonal

Théorème - L'orthogonal est un supplémentaire (C.S. : F dimension finie)

Soit E un espace préhilbertien réel (pas nécessairement de dimension finie) et F un s.e.v de dimension finie de E. Alors

$$E = F \oplus F^{\perp}.$$

Démonstration

Heuristique - LE supplémentaire

Un des problèmes de la notion de supplémentaire est la non-unicité de ceux-ci (E et F étant donné, il existe généralement une infinité G_i tels que $E = F \oplus G_i$).
Parmi ceux-ci (les G_i) un a une propriété qui le rend unique et intéressant (dans le cas d'un espace préhilbertien).

Définition - Supplémentaire orthogonal
Soit E un espace préhilbertien réel (pas nécessairement de dimension finie) et F un s.e.v de dimension finie de E.
$F^\perp$ est appelé LE supplémentaire orthogonal de F.

Proposition - Deux propriétés
Soit E un espace euclidien et F un s.e.v de E. Alors

$$\dim F^\perp = \dim E - \dim F$$
$$(F^\perp)^\perp = F$$

Démonstration

5.2. Projections orthogonales

Définition - Projection orthogonale
Soit F un s.e.v de dimension finie de E préhilbertien réel.
On appelle projecteur orthogonal (projection orthogonale) sur F le projecteur sur F de direction $F^\perp$.

Remarque - Exprimer explicitement la projection
La proposition qui suit est très importante, elle permet de dépasser une limite de la notion de projecteur pour les espaces vectoriels quelconques. Il était, alors, généralement impossible d'exprimer ce projecteur explicitement, théoriquement. Dans le cas du projecteur orthogonal, cette impossibilité n'existe plus.

Proposition - Expression du projecteur
Soit p_F le projecteur orthogonal sur F.
Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ b.o.n de F alors

$$\forall x \in E,\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x \,|\, e_i \rangle e_i \qquad \text{et } y = p_F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ x - y \in F^\perp \end{cases}$$

Remarque - Déjà vu?
• Dans le procédé d'orthonormalisation de Schmidt $e'_i = e_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle e_i \,|\, f_j \rangle f_j$ désigne le vecteur obtenu en soustrayant à e_i son projeté orthogonal sur le sous-espace engendré par les précédents vecteurs de la famille.
• Dans la démonstration de la supplémentarité de F et $F^\perp$, nous avons exploité cette fonction p_F (noté $y = p_F(x)$ à l'époque)

Démonstration

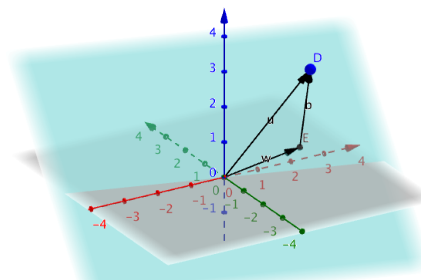
Corollaire - Cas particuliers
Soit E, un espace préhilbertien réel

1. Si $F = \text{vect}(e)$ est une droite, alors $p_F(x) = \left\langle x | \frac{e}{\|e\|} \right\rangle \frac{e}{\|e\|} = \frac{\langle x | e \rangle}{\|e\|^2} e$.
2. Si F est un hyperplan de E de dimension finie, alors $F^\perp = \text{vect}(e)$ est une droite et $p_F(x) = x - \left\langle x | \frac{e}{\|e\|} \right\rangle \frac{e}{\|e\|}$.

Démonstration

<u>Exercice</u>
Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur le plan F d'équation $x + y - 2z = 0$.

Représentation - Visualisation



On a $d(u, \mathscr{P}) = \|b\|$

5.3. Distance à un sous-ensemble d'une espace préhilbertien

Définition - distance à un sous-ensemble
Soient $x \in E$ et A une partie de E, préhilbertien réel.
L'ensemble $\{d(x,z); z \in A\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$, minorée par 0, qui admet donc une borne inférieure, appelée distance de x à A :

$$d(x, A) = \inf_{z \in A} \|x - z\|.$$

Théorème - Meilleure approximation
Soient E un espace préhilbertien réel, F un s.e.v de dimension finie de E et p_F la projection orthogonale sur F. Soit $x \in E$, alors

$$y = p_F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ \forall z \in F, \|x - y\| \leqslant \|x - z\| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ \|x - y\| = d(x, F) \end{cases}$$

Remarque - Interprétation
La distance de x à un sous-espace vectoriel F est la distance de x à $p_F(x)$, $p_F(x)$ étant l'unique vecteur de F réalisant cette distance : $p_F(x)$ est le vecteur de F « le plus proche » de x en ce sens.
On dit que $p_F(x)$ est la meilleure approximation de x dans F.

Démonstration

Savoir faire - Minimiser une forme quadratique

De manière générale, dans ce contexte, on ne cherche pas le minimum d'une norme, mais bien d'une norme au carré (forme quadratique) qui dérive du produit scalaire canonique.
L'enjeu : reconnaître le produit scalaire et les espaces E et surtout F. Puis, on exploite une projection orthogonale sur F, elle est explicite si l'on connait une base orthonormale de F.
On remarque qu'une base orthogonale de F suffit.

<u>Exercice</u>
Soit $f(x,y)=(x+y-2)^2+(x-y-2)^2+(2x+y)^2$.
Montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ que l'on déterminera (avec les valeurs de x et y correspondantes).

Pour aller plus loin - Optimisation de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Ce problème peut aussi se rencontrer en cours d'optimisation d'une fonction de plusieurs variables.
On remarque ici que

$$f(x,y) = 6x^2+3y^2+4xy-8x+8$$
$$= \frac{1}{3}\left(3y+2x\right)^2+\frac{14}{3}\left(x-\frac{6}{7}\right)^2+\frac{32}{7}$$

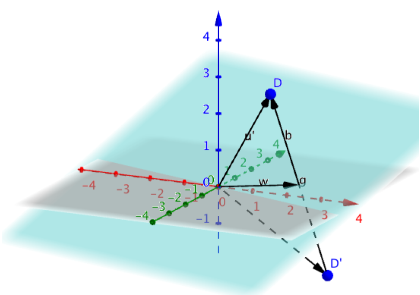
Elle est minimale pour $x=\frac{6}{7}$ et $y=\frac{-4}{7}$ et vaut alors $\frac{32}{7}$.

L'exercice qui suit donne une idée de la stratégie de la minimisation par la méthode des moindres carrés. Il s'agit de prendre le problème de manière duale

<u>Exercice</u>
On se donne quatre points $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(3,4)$, $D(-1,-1)$.
Déterminer la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=ax+b$ telle que si A',B',C',D' sont les projetés de A,B,C,D sur $\mathscr{D}$ parallèlement à l'axe Oy, alors $S_{a,b}=AA'^2+BB'^2+CC'^2+DD'^2$ soit minimale.
Comment généraliser cette méthode ?, indépendamment de coordonnés concrètes pour A, B... et d'une projection aussi simple...

5.4. Symétries orthogonales

Représentation - Réflexion dans l'espace



Définition - Symétrie orthogonale
Soient E un espace préhilbertien réel, F un s.e.v de dimension finie de E.
On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie par rapport à F de direction $F^\perp$.
On a $s_F = 2p_F - Id_E$ où p_F est la projection orthogonale sur F.

Proposition - CNS de symétrie orthogonale
$s \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie orthogonale si et seulement si

$$s\circ s = Id_E$$
$$\mathrm{Ker}\,(s-Id_E) \perp \mathrm{Ker}\,(s+Id_E)$$

Démonstration

Définition - Réflexion
On appelle réflexion toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

6. Hyperplans vectoriels et affines d'un espace euclidien

6.1. Lemme de Riesz

Proposition - Caractérisation des formes linéaires
Soient E un espace euclidien et $\phi \in E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{R})$.
Alors il existe un unique $a \in E$ tel que

$$\forall x \in E, \phi(x) = \langle a \,|\, x \rangle.$$

Démonstration

Heuristique - Principe de construction
Ici on a :

0. Un espace ambiant, euclidien donc muni d'un produit scalaire de référence.
1. Une forme linéaire $f \in E^*$
2. Alors il existe $a \in E$ tel que $f : x \mapsto \langle a \,|\, x \rangle$

Corollaire - Equation de H et vecteur normal
Soient $\mathscr{B}$ une b.o.n de E euclidien et H un hyperplan de E.
Alors il existe $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ soit l'équation de H dans $\mathscr{B}$ et dans ce cas $a \in E$ de coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathscr{B}$ est un vecteur normal à H, $H = \text{vect}(a)^\perp$.

Exemple - Gradient

6.2. Espace affine euclidien (élargissement vers l'affine)

Vecteur normal

Proposition - Vecteur normal à un hyperplan affine
Soit $\mathscr{R} = (\Omega, e_1, \ldots, e_n)$ un repère affine orthonormal de l'espace E de dimension n (c'est-à-dire que $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une b.o.n de E).
Soit $\mathscr{H}$ un hyperlpan affine de E.
On appelle vecteur normal à $\mathscr{H}$, tout vecteur normal à la direction H de $\mathscr{H}$, c'est-à-dire $a \in E$ tel que $H = \text{vect}(a)^{\perp}$.
Si a a pour coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathscr{B}$, alors $\mathscr{H}$ possède une équation dans $\mathscr{R}$ du type $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = h$.
Réciproquement

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = h \text{ avec } (a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$$

est l'équation d'un hyperlpan affine de vecteur normal a de coordonnées $(a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathscr{B}$.

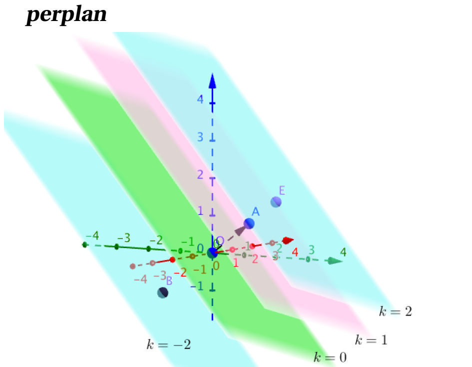
Démonstration

Exemple - Dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

Corollaire - Ligne de niveau : hyperplan
Dans E euclidien, les lignes de niveau de l'application $M \mapsto \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}$ (c'est-à-dire les ensembles $E_k = \{M \in E \mid \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = k\}$) sont des hyperplans affines de vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

Démonstration

Représentation - Les lignes de niveaux - hyperplan



$E_k = \{M \in E \mid \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = k\}$

Distance

Proposition - Distance à un hyperplan affine
Soit $\mathscr{H}$ un hyperplan affine de E euclidien, défini par un point A et un

vecteur normal unitaire $\vec{n}$. Alors, pour M point de E, on a

$$d(M,\mathscr{H}) = |\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}|.$$

Démonstration

Corollaire - Distance à une droite du plan
Soit $\mathscr{D}$ d'équation $ax+by+c=0$ dans un r.o.n du plan euclidien $\mathbb{R}^2$ et $M(x_M, y_M)$ un point. Alors

$$d(M,\mathscr{D}) = \frac{|ax_M+by_M+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Corollaire - Distance à un plan de l'espace
Soit $\mathscr{P}$ d'équation $ax+by+cz+d=0$ dans un repère orthonormé de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ et $M(x_M, y_M, z_M)$ un point. Alors

$$d(M,\mathscr{P}) = \frac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Démonstration

Exercice
Reprendre l'exercice du calcul de distance de $a=(2,2,0)$ à $F=\mathrm{vect}\big((1,1,2),(1,-1,1)\big)$.

6.3. Transposition

Un question posée il y a quelques temps : on sait passer de $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ à ${}^tM$.
Mais à quel endomorphisme associer alors ${}^tM$?

Définition - Adjoint de $u \in \mathcal{L}(E)$
Soit E un espace euclidien.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Il existe une unique application, noté ${}^tu \in \mathcal{L}(F^*, E^*)$ (parfois u^*) tel que

$$\forall\ x, y \in E, \qquad \langle u(x) \mid y\rangle = \langle x \mid {}^tu(y)\rangle$$

On appelle cet application u^*, l'adjoint de u.

Démonstration

Analyse - Interprétation matricielle

Remarque - S'il n'y a pas de base orthonormée
On en construit une! cf. partie suivante

6.4. Crochet de dualité

On commence par élargir la notion de produit scalaire.

Définition - Forme bilinéaire non dégénérée
Soit E, F deux espaces vectoriels.
On dit que la forme bilinéaire $B : E \times F \to \mathbb{R}$ est non dégénérée si

$$\begin{aligned}(\forall\ x \in E, B(x, y) = 0) &\quad \Rightarrow y &= 0\\ (\forall\ y \in E, B(x, y) = 0) &\quad \Rightarrow x &= 0\end{aligned}$$

Exercice
Montrer que tout produit scalaire définie sur E une forme bilinéaire non dégénérée

Définition - Crochet de dualité
Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel. On suppose que E est de dimension finie
On appelle crochet de dualité de E la forme bilinéaire non dégénérée :

$$B : E^* \times E \to \mathbb{R}, \qquad (\varphi, x) \mapsto \varphi(x)$$

Pour aller plus loin - Cas E non de dimension finie
On peut généraliser au cas E de dimension non finie.
On généralise aussi parfois aux espaces topologiques

Exercice
Montrer qu'il s'agit bien d'une forme bilinéaire non dégénérée.

Heuristique - Principe de construction/d'application
On a :

0. Un espace vectoriel (ambiant - de dimension finie)
1. Un isomorphisme de E^* sur E, note Φ.
2. On définit alors B, crochet de dualité : $B(f, x) = f(x)$

, En fait : $B(f,x) = \langle \Phi(f) \mid x \rangle$

On définit alors comme précédemment

Définition - Orthogonal dual
Soit A un sev de E. On note $A^0 = \{\varphi \in E^* \mid \forall\ x \in A, B(\varphi,x) = \varphi(x) = 0\}$.
Soit C un sev de E^*. On note $C^0 = \{x \in E \mid \forall\ \varphi \in C, B(\varphi,x) = \varphi(x) = 0\}$

Application - Mécanique quantique

Exercice
On suppose que E est de dimension finie n. Si $(e_1,\cdots,e_p)$ base de A, complétée en $(e_1,\cdots,e_n)$ base de E.
Donner une caractéristique avec les applications e_i^* de A^0. En déduire $\dim(A^0)$.

7. Bilan

Synthèse

- ⇝ Avec un produit scalaire, il est simple d'obtenir (=voir numériquement) les dépendances entre vecteurs, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
  Cela donne aussi un moyen explicite de projeter (orthogonalement) sur des sous-espaces vectoriels.
- ⇝ Il est donc bon de savoir reconnaitre les produits scalaires abstraits (et les normes associés), puis les bases orthonormées associées (ou bien les créer directement par l'algorithme de Gram-Schmidt).
- ⇝ La projection orthogonale et donc le calcul de distance deviennent explicite (i.e. calculatoire). Cette méthode nous inspire pour créer une dualité entre espace vectoriel E de dimension finie et son espace dual E^*, par $(\varphi(\in E^*),x) := \varphi(x)$. Au passage on donne également un sens à l'endomorphisme dont la matrice est la transposée de celle de u.

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- — Savoir-faire - Montrer qu'on a un produit scalaire
- — Savoir-faire - Montrer qu'on a une norme
- — Savoir-faire - Montrer qu'on une norme est euclidienne
- — Savoir-faire - Orthonormaliser une base
- — Savoir-faire - Montrer qu'une famille est une base orthonormée
- — Savoir-faire - Changement de base pour une forme bilinéaire
- — Savoir-faire - Minimiser une forme quadratique

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$\langle \cdot \vert \cdot \rangle$	Produit scalaire sur E	Forme bilinéaire définie positive	Autre notation classique : $(\cdot,\cdot)$ ...
$\Vert \cdot \Vert$	Norme sur E	A valeurs dans $\mathbb{R}_+$, pseudo-linéaire, vérifiant l'inégalité triangulaire $x \mapsto \sqrt{\langle x \vert x \rangle}$ est une norme associée, dite euclidienne Propriété de C-S : $\langle x \vert y \rangle \leqslant \Vert x \Vert \times \Vert y$	Autre notation : $N(\cdot)$.
$x \perp y$	x et y sont orthogonaux	Equivalente à $\langle x \vert y \rangle = 0$	Relation symétrique
$F \perp G$	F et G sont orthogonaux	Equivalente à $\forall\ x \in F, y \in G$, $\langle x \vert y \rangle = 0$	Relation symétrique
$F^\perp$	L'orthogonal de F	$F^\perp = \{y \in E \mid \forall\ x \in F \langle x \vert y \rangle = \}0$	Si E est de dimension finie, $E = F^\perp \oplus F$
$A = (\langle e_i \vert e_j \rangle)_{i,j}$	Matrice euclidienne de la famille (e_i)	$(e_i)_i$ base orthonormée de E ssi A, positive, définie. A est alors inversible $\langle x \vert y \rangle = X^T \times A \times Y$ (avec $x = \sum_{i=1}^n X_i e_i$)	A est nécessairement symétrique Comme la matrice de variance-covariance...
$d(x,A) = \inf_{z \in A} \Vert x - z \Vert$	Distance de x à l'ensemble A	Si $\Vert \cdot \Vert$ est euclidienne, $d(x,A) = \Vert x - p_A(x) \Vert$ (projection orthogonale sur A)	A savoir démontrer !
${}^t u$	Adjoint de u (existe nécessairement si E de dimension finie)	$\forall\ x, y \in E$, $\langle u(x) \vert y \rangle = \langle x \vert {}^t u(y) \rangle$ $\mathcal{M}_{\mathcal{B}on}({}^t u) = \left(\mathcal{M}_{\mathcal{B}on}(u)\right)^T$	Parfois noté u^*
$A^0 = \{\varphi \in E^* \mid \forall\ x \in A, \varphi(x) = 0\}$	Dual de A (pour $A \subset E$)		A^0 est isomorphe à un supplémentaire de A dans E
$C^0 = \{x \in E \mid \forall\ \varphi \in C, \varphi(x) = 0\}$	Dual de C (pour $C \subset E^*$)		C^0 est isomorphe à un supplémentaire de C dans E^*

Retour sur les problèmes

131. Cours
132. Cours : $p_F(u) = \sum_{i=1}^{p} \langle u, e_i \rangle e_i$ si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ base orthonormale de F.
133. C'est tout simplement $G = F^\perp$.
134. $a_k = \langle u, e_k \rangle$ si $(e_1, \dots e_n)$ base orthogonale de E et e_k normé.
135. Il suffit d'orthonormaliser une base quelconque par le procédé de Gram-Schmidt.
136. Question plus subtile. On exploite les espaces othogonaux définies à partir d'une forme linéaire. C'est ce qu'on appelle la dualité.