Septième partie

Combinatoire et groupe fini

Chapitre 31

Dénombrement (combinatoire)

Résumé -

L'expérience montre que ce chapitre peut parfois rester opaque. Or il y a une première clé : pour réussir un bon dénombrement, il faut toujours commencer par une bonne description des choses. Dans un premier temps, nous allons réfléchir à ce que cela signifie. Nous verrons ensuite la seconde clé : il y a trois méthode classique de dénombrement : la bijection entre ensembles, la réunion d'ensembles, le produit cartésien d'ensembles.

Puis nous appliquerons ces méthode pour résoudre quelques cas pratiques. Dans ce chapitre, nous ferrons beaucoup d'exercices pour bien stabiliser les notions introduites et les méthodes présentées

Sommaire

1. Problèmes : expérience, modélisation et ensembles

1.1. Questionnement

Histoire - Actualité de la combinatoire
La combinatoire (ou dénombrement) est une des plus vieille branche des mathématiques. Il s'agit toujours de compter le nombre d'éléments d'un ensemble fini vérifiant une certaine (famille de) propriété(s).
Et pourtant, il s'agit d'un domaine de recherche toujours très actif. On y trouve régulièrement des nouvelles méthodes ! Et surtout, beaucoup de résultat de combinatoire s'applique facilement en géométrie. Parfois présentée comme ludique, la combinatoire est une partie des mathématiques les plus exposée à l'application.
Ici nous nous contenterons des premières règles (de jeune Padawan)

Exercice

1. Combien de mots de cinq lettres (compréhensibles ou non) existe-t-il en utilisant l'alphabet usuel ?
2. Xavier part en vacances aux États-Unis. Avant de rentrer, il décide d'écrire une carte à chacun de ses meilleurs amis : Arthur, Brigitte, Claude, Dominique et Emeric. Il se précipite chez le vendeurs de cartes postales, qui possèdent 26 modèles de cartes différents. Xavier se demande combien de possibilités il a pour envoyer des cartes postales à ses amis .

Analyse - Pourquoi trouve-t-on le même résultat ?

Analyse - Quelles sont les informations importantes dans ces problèmes ?

1.2. Expériences réelles et modélisation

Là encore des exercices vont nous aider à comprendre la méthode générale employée pour dénombrer des ensembles (ou avec le langage probabiliste : événements possibles).
Il est nécessaire là de bien faire la différence entre les ensembles et les listes!

Exercice

Boules tirées dans une urne

On considère une urne composée de 15 boules, numérotées de 1 à 15.
On en tire 3 avec remise, puis 5 sans remise et enfin une poignée de 4 boules.
Pouvez-vous décrire un exemple donné par une expérience ?
Quelle est la forme de la l'ensemble des résultats possibles ?

Exercice

Boules tirées dans une urne (bis)

On considère une urne composée de 15 boules, 5 vertes, 5 bleues et 5 rouges.
On en tire 3 avec remise, puis 5 sans remise et enfin une poignée de 4 boules.
Pouvez-vous décrire un exemple donné par une expérience ?
Quelle est la forme de la l'ensemble des résultats possibles ?

Exercice

Nous lançons deux dés à 6 faces (un rouge, un bleu). Combien de lancers différents existe-il ? Combien de score différents peut-on réaliser en sommant les deux résultats ?

Savoir faire - Méthode : description des expériences

Ce qui nous intéresse c'est de **décrire les résultats possibles** d'une expérience.
C'est souvent une excellente idée de donner un exemple de description et de mesurer au moment de son écriture si nous avons à faire à une liste, un ensemble, des répétitions possibles, comment les paramètres se

Pour aller plus loin - Deux citations concernant les modèles

« Un modèle est une interprétation abstraite, simplifiée et idéalisée d'un objet du monde réel ou d'une description de la réalité. » David Ruelle.
« La science est la seule activité humaine où le mot "modèle" a le sens inverse de celui que lui donne la langue usuelle. Est modèle ce que l'on imite ou qui mérite d'être imité. Il a avec la réalité le même type de rapport que celui qu'entretient un "modèle réduit" avec l'objet dont il est la reproduction plus aisément manipulable. L'inversion de sens est frappante et mérite d'être méditée... Que la science comme activité consiste essentiellement à se construire des objets sous la forme de modèles est en revanche une vérité incontestable, bien que trop peu connue des non-scientifiques. (...) Le modèle scientifique est une imitation humaine de la nature que le savant prend bientôt pour "modèle" - au sens ordinaire - de celle-ci. » Jean-Pierre Dupuy

combinent les uns avec les autres...
On note E, l'ensemble des résultats possibles ; la description de ces expériences permet de préciser la nature de l'ensemble E (ensemble, liste ...?)
Enfin, pour dénombrer l'ensemble des résultats possibles, il « suffit » de calculer le cardinal de E

Pour aller plus loin - Ensemble ou liste
Nous reprendrons les définitions par la suite.
A avoir en tête, d'ores et déjà :
- *un ensemble est noté entre accolade, les éléments ne se répètent pas et il y a une indifférence à l'ordre :* $\{1,2,3\} = \{3,2,1\} = \{1,1,1,2,2,3\}$
- *une p-liste (ou p-uplet) est noté entre parenthèse, sans précision contraire les éléments peuvent se répéter et l'ordre compte :* $(1,2,3) \neq (1,3,2)$ *ou encore* $(1,2) \neq (1,1,1,2,2)$

2. Ensembles finis

2.1. Cardinal d'un ensemble

<u>Ensemble fini</u>

On rappelle ici des résultats vus en début d'année.

Heuristique - Principe du calcul du cardinal
La notion de cardinal d'un ensemble repose sur le fait suivant :

S'il existe une bijection de $[\![1,p]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ alors $n = p$.

Dénombrer, c'est déterminer le cardinal d'un ensemble fini.
L'ensemble $\mathbb{N}_n$ est le représentant principal de tous les ensembles en bijection avec lui (classe d'équivalence)

Définition - Ensemble fini ou infini
On dit qu'un ensemble non vide E est fini s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que E soit en bijection avec $[\![1,n]\!]$ (i.e. il existe $f : E \to [\![1,n]\!]$ bijective).
Par convention $\emptyset$ est un ensemble fini.
Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini.

<u>Cardinal d'un ensemble fini</u>

Proposition - Taille des ensembles
Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.
- S'il existe une application injective $f : [\![1,p]\!] \to [\![1,n]\!]$ alors $p \leqslant n$.
- S'il existe une bijection de $[\![1,p]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$ alors $n = p$.

Démonstration

Corollaire - Invariant
Soit E un ensemble. $n, p \in \mathbb{N}$. S'il existe une bijection de E sur $[\![1, n]\!]$ et une bijection de E sur $[\![1, p]\!]$ alors $n = p$.

On peut alors donner la définition suivante :

Définition - Cardinal
Si E est fini, l'élément n de $\mathbb{N}$ tel que E soit en bijection avec $[\![1, n]\!]$, s'appelle le cardinal de E, noté Card E (ou $|E|$, $\sharp(E)$).
On peut alors noter $E = \{x_1, \dots, x_n\}$.
Par convention, Card $\emptyset = 0$.

Remarque - Relation d'équivalence
La relation $\mathscr{R}$ définit sur l'ensemble des ensembles :

$$E\mathscr{R}F \Longleftrightarrow \exists\, \varphi : E \to F, \text{ bijective}$$

est une relation d'équivalence (A démontrer!).
Les classes d'équivalence ont pour représentant principaux les ensembles $[\![1, n]\!] = \mathbb{N}_n$.
La fonction Card est une fonction invariante et caractéristique des classes d'équivalence Par transitivité de cette relation d'équivalence :

Proposition - Critère d'égalité des cardinaux
Si E et F sont deux ensembles finis et $f : E \to F$ une bijection, alors Card E = Card F.

Corollaire - Injection
Soit E un ensemble et $n \in \mathbb{N}$. S'il existe une injection de E sur $[\![1, n]\!]$,
alors E est fini et card$E \leqslant n$.

<u>**Sous-ensembles**</u>

Proposition - Sous-ensemble. Critère d'égalité
Tout sous-ensemble A d'un ensemble fini E est fini. On a

$$\text{Card } A \leqslant \text{Card } E \text{ avec égalité si et seulement si } A = E.$$

Démonstration

> ***Pour aller plus loin - En langage verbal***
> *Une méthode additive correspond verbalement à un **OU**.*
> *Une méthode multiplicative correspond verbalement à un **ET**.*

Heuristique - Trois types de méthode pour le dénombrement

Ce théorème est fondamental, beaucoup de dénombrements sont basés dessus. On a en fait deux grandes méthodes de dénombrement :

— **Méthode 1 - directe** :
on montre que E en bijection avec un ensemble de cardinal connu.

— **Méthode 2 - additive** :
on écrit E comme une réunion disjointe (partition finie) d'ensembles de cardinaux connus.

— **Méthode 3 - multiplicative** :
on écrit E comme un produit cartésien d'ensemble de cardinaux connus.

Il arrive aussi que les trois méthodes soient exploitées ensemble dans un même problème

2.2. Dénombrement par applications (entre ensembles finis)

Proposition - Relation entre cardinaux

Soient E, F des ensembles et f une application de E dans F.

— Si f est injective et F fini, alors E est fini
et $\text{Card } E = \text{Card }(f(E)) \leqslant \text{Card } F$.
S'il y a égalité, f est bijective.

— Si f est surjective et E fini, alors F est fini
et $\text{Card } F = \text{Card }(f(E)) \leqslant \text{Card } E$.
S'il y a égalité, f est bijective.

Démonstration

Le théorème suivant est comparable à un théorème donnant une équivalence semblable, lorsque f est un endomorphisme ($\dim(E) = \dim(F)$)

Théorème - Critère d'équivalence
Si E et F sont finis de **même cardinal** et f une application de E dans F, alors

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective.}$$

Savoir faire - Montrer qu'un ensemble est fini
Pour montrer qu'un ensemble E est fini, on peut
- soit montrer que $E \subset F$ avec F fini ;
- soit chercher une injection de E dans F fini. Si de plus on a une bijection et que l'on connait Card F, alors on a Card E.

Savoir faire - Calculer, théoriquement, le cardinal d'un ensemble fini
La fonction caractéristique (ou indicatrice) possède beaucoup d'intérets :
- elle donne le cardinal d'un ensemble $F \subset E$:

$$\text{Card } F = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_F(x)$$

- on a la relation $x \in F \Leftrightarrow \mathbb{1}_F(x) = 1$

2.3. Dénombrement par calcul du cardinal d'une réunion. Addition.

Proposition - Cardinal du complémentaire
Soit A une partie de E fini. Alors

$$\mathbb{1}_{\complement_E(A)} = 1 - \mathbb{1}_A \qquad \text{et} \qquad \text{Card } (\complement_E A) = \text{Card } E - \text{Card } A$$

Démonstration

Théorème - Réunion d'ensembles
Soit E un ensemble (non nécessairement fini)
- Soient A, B deux sous-ensembles finis. Alors $A \cup B$ est fini et

$$\text{si } A \cap B = \emptyset \text{ alors Card } (A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B$$

sinon

$$\text{Card } (A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } (A \cap B).$$

Pour aller plus loin - Formule du crible
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E_1, E_2 \dots E_n$, n ensembles finis. Alors $\bigcup_{k=1}^{n} E_k$ est un ensemble fini,

$$\text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h-1} \sum_{\{i_1 \dots i_h\} \in \binom{\mathbb{N}_n}{h}} \text{Card}(E_{i_1} \cap \cdots E_{i_h})$$

En fait cette formule est relativement simple ! Le h indique que les ensembles considérés possèdent h éléments !

$$\begin{aligned}\text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = {} & \\ & \text{Card}E_1 + \text{Card}E_2 + \cdots + \text{Card}E_n \\ & -\text{Card}(E_1 \cap E_2) - \text{Card}(E_1 \cap E_3) - \dots \\ & \qquad - \text{Card}(E_{n-1} \cap E_n) \\ & +\text{Card}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) + \dots \\ & \qquad + \text{Card}(E_{n-2} \cap E_{n-1} \cap E_n) \\ & \dots \\ & \pm\text{Card}(E_1 \cap E_2 \cap E_3 \dots E_n)\end{aligned}$$

— Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des parties deux à deux disjointes de E alors

$$\text{Card } (A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \text{Card } \big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\big) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card } A_i$$

Savoir faire - Formule du crible

Comme au programme ne figure pas la formule du crible de Poincaré (cas non disjoints des ensembles), il faut donc savoir se remettre toujours dans de telles conditions.
Donc si les (A_i) ne sont pas disjoints deux à deux, on décompose en sous-ensembles disjoints.
(Ou bien on exploite les fonctions caractéristiques)

Démonstration

Exercice

Montrer que $1 - \mathbb{1}_{A_1 \cup A_2 \cdots \cup A_n} = \prod_{i=1}^{n} (1 - \mathbb{1}_{A_i})$.
En déduire la formule du crible de Poincaré

Rappel :

Définition - Partition

Soit E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties non vides de E. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E si

1. $E = \bigcup_{i\in I} A_i$
2. $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

On note $E = \biguplus_{i\in I} A_i$

Remarque - Classes d'équivalence
En début d'année, nous avons déjà rencontré la définition de partition d'un ensemble.
Nous avons vu qu'une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ sur un ensemble E, « partitionne » cet ensemble en classes d'équivalence qui forme une partition de E.
Si celle-ci sont finies et nombres finis (nécessairement si E est fini) on a alors :

$$\text{Card }(E) = \sum_{x \text{ représentant de } E/\mathscr{R}} \text{Card }(O(x))$$

Proposition - Dénombrement par partition
Si E est un ensemble de cardinal fini et si $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E.
Alors $\text{Card }(E) = \sum_{i\in I} \text{Card }(A_i)$

2.4. Dénombrement par calcul du cardinal d'un produit cartésien. Multiplication.

Les résultats suivants sont démontrés comme des applications des résultats précédents. Mais il faut bien les voir comme de nouveaux résultats sur lesquels s'appuyer pour faire du dénombrement (de même la multiplication dérive de l'addition, mais lorsqu'on doit calculer 5×7, on ne fait plus $7+7+7+7+7\ldots$).

Théorème - Cardinal de produit cartésien
Soient E, F deux ensembles finis avec Card $E = n$, Card $F = p$.
Alors $E\times F$ est fini et

$$\text{Card }(E\times F) = \text{Card } E \times \text{Card } F = np$$

plus généralement si les E_i sont finis

$$\text{Card }(E_1\times\cdots\times E_n) = \text{Card } E_1 \times\cdots\times \text{Card } E_n.$$

Pour aller plus loin - Lemme des bergers
Soit $f : E \to F$, surjective tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que
$\forall\ y \in F$, $\text{card}\{f^{-1}(y)\} = k$.
Alors $\text{card}(F) = \dfrac{\text{card}(E)}{k}$.

Démonstration

Pour aller plus loin - Principe des bergers
Dans la littérature mathématiques classiques, on parle ici du principe des bergers. Cela s'écrit : Soit $f : X \to Y$, surjective. Supposons que Card $Y = q$ et pour tout $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ est de cardinal p.
Alors X est de cardinal $p\times n$.
Saurez-vous voir le lien ? On l'appelle aussi parfois dans ce cours, le principe de décomposition

Savoir faire - Quand est-ce que l'on voit apparaître un produit cartésien ?
Dans les exercices, lorsque l'on peut dire on tire PUIS on tire (à nouveau) PUIS ... on tire (une dernière fois), alors c'est que l'on est en train de créer une liste des résultats.
Cela correspond exactement à notre modèle.
Ainsi de manière générale, dès qu'il y a PUIS, on effectue une MULTIPLICATION.

3. Listes et combinaisons

Dans cette partie, nous appliquons essentiellement le troisième principe (celui du produit, ou de décomposition) pour dénombrer quelques situations fréquentes. On commence par les définir, puis on se concentre sur chacune.

3.1. Définitions des différents types d'ensemble

Définition - Liste, permutation, combinaison
Soit E un ensemble. On appelle
- p-liste (ou p-uplet) d'éléments de E tout élément de E^p ;
- permutation de E (E fini) toute bijection de E sur E ;
- combinaison à p éléments de E (E fini) toute partie (ensemble) à p éléments de E.

Exemple - de 2-listes sans répétition

Exemple - de combinaison à 2 éléments à partir de $\mathbb{N}_4$

Remarque - Vocabulaire
On parle aussi parfois de p-uplet au lieu de p-liste.
Une 2-liste (ou 2-uplet) s'appelle un couple.
Une 3-liste (ou 3-uplet) s'appelle un triplet...

3.2. Dénombrement d'un ensemble de listes avec répétition

Comme une p-liste (avec répétition possible) est un élément du produit cartésien E^p, on peut affirmer (même si cela est la répétition de 2.4.) :

Théorème - Nombre de p-liste (répétition possible)
Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Le nombre de p-listes d'éléments de E est $n \times n \times \cdots \times n = n^p$.
Le nombre de p-listes, élément de $E_1 \times E_2 \times \cdots E_p$ est $\text{Card } E_1 \times \cdots \times \text{Card } E_p$

Exemple - Trajets !

Exercice
Combien de mots différents de 7 lettres alternant consonnes et voyelles peut-on former
1. si la première lettre est une consonne ?
2. si la première lettre est une voyelle ?

Exercice
Un piano à queue à 88 touches. De combien de manières différentes peut-on jouer une mélodie de 7 sons consécutifs ?

Attention - p^n ou n^p ?
Ce cours sur le dénombrement est composé de nombreux résultats à connaître.
L'expérience montre que lorsque l'élève n'a pas bien compris les résultats, mais juste appris les formules en temps voulu, il ne les connaît plus plus tard dans l'année, et en particulier au moment du concours.
Comprenez bien qu'il s'agit de choisir ici, une touche de piano : 88 choix, puis une autre : encore 88 choix .... Finalement, il y a 88^7 choix mélodies possibles.
Dans la partie précédente : il s'agissait de choisir ici, une touche de piano : 88 choix, puis une autre différente : 87 choix .... Finalement, il y a $88 \times 87 \times \ldots 82$ choix de mélodies possibles.
Autrement dit : *si vous avez un doute sur la formule, REFLECHISSEZ !*

Théorème - Nombre d'applications
Soient E, F deux ensembles finis avec $\text{Card } E = n, \text{Card } F = p$.
Alors $\mathscr{F}(E,F)$ est fini et

$$\text{Card } \mathscr{F}(E,F) = (\text{Card } F)^{\text{Card } E} = p^n.$$

Et $\mathscr{P}(E)$ est fini et

$$\text{Card } \mathscr{P}(E) = 2^{\text{Card } E} = 2^n.$$

Démonstration

Exercice
Soit E un ensemble de n éléments.
Démontrer que le nombre de sous-ensembles de E est 2^n.

3.3. Dénombrement de permutation d'un ensemble E

Analyse - Représentation d'une permutation

D'où la proposition suivante (qui explique mieux le nom)

Proposition - Permutation (autre point de vue)
Soit E un ensemble à n éléments.
Toute n-liste (ordonnée) des n éléments distincts de E représente une permutation de E.
Et réciproquement.

Remarque - Mot clés
Les deux mots clés ici sont **ordonnée** et **distincts**.
Ces deux mots répondent aux deux dernières questions de notre exercice introductif.
Ce qui est important également, est le fait qu'*ici* on considère tous les éléments de E, sans en oublier ...

Exemple - Permutations de $\{a, b, c, d\}$

Proposition - Nombre de permutations
Soit E un ensemble de n éléments.
Alors **le nombre de permutations de** E **est** $n!$.

Démonstration

Exemple - Simple

Exercice
Combien existe-t-il d'anagrammes du mot "compris" ?

3.4. Dénombrement d'un ensemble de p-listes sans répétition

Théorème - Nombre de p-liste (sans répétition)
Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Le nombre de p-listes d'éléments distincts de E est $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leqslant n$, 0 sinon.
Par convention $0! = 1$.

Démonstration

Pour aller plus loin - Nombre d'arrangement
Le nombre $\dfrac{n!}{(n-p)!}$, parfois noté A_n^p s'appelle le nombre d'arrangement de p éléments distincts parmi n

Remarque - Explication de la démonstration
Voici un exemple illustratif de la démonstration, pour $n = 4$ et $p = 2$.
Considérons E de la forme $\{a, b, c, d\}$.
Les arrangements sont alors :

$abcd$	$abdc$	$acbd$	$acdb$	$adbc$	$adcb$
$bacd$	$badc$	$bcad$	$bcda$	$bdac$	$bdca$
$cabd$	$cadb$	$cbad$	$cbda$	$cdab$	$cdba$
$dabc$	$dacb$	$dbac$	$dbca$	$dcab$	$dcba$

Il y a $A_4^2 \times 2! = 4!$ permutations et donc $A_4^2 = \dfrac{4!}{2!} = 12$ arrangements.

Exercice
Un piano à queue à 88 touches. De combien de manières différentes peut-on jouer une mélodie de 7 sons consécutifs sans jouer deux fois la même note ?

Pour aller plus loin - Factorielles (ou puissances) montantes
On trouve parfois aussi la notation $a^{\overline{n}}$ (ou $(a)_n$). Dans un contexte de dénombrement, elle représente le nombre :

$$a^{\overline{n}} = a \times (a+1) \times \cdots \times (a+n-1)$$

Cette définition est vraie, même si a n'est pas un nombre entier.
Mais si a est entier, on a donc $a^{\overline{n}} = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}$.
On note aussi parfois :

$$a^{\underline{n}} = a \times (a-1) \times \cdots \times (a-n+1)$$

Corollaire - Nombre d'applications injectives
Soient E et F deux ensembles finis, $\mathrm{Card}\,(E) = p$, $\mathrm{Card}\,(F) = n$, alors : le nombre d'applications injectives de E dans F est $n \times (n-1) \times \cdots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$ si $p \leqslant n$, 0 sinon ;

Démonstration

3.5. Dénombrement d'un ensemble de sous-ensemble à p éléments (combinaison)

Théorème - Nombre de combinaison et coefficient binomial

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Pour $p \leqslant n$, on note $\begin{pmatrix} E \\ p \end{pmatrix}$ l'ensemble des parties à p éléments de E. On a

$$\text{Card} \begin{pmatrix} E \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Ce nombre est appelé nombre de combinaisons de p éléments parmi n et se lit « p parmi n ».

Remarque - Autre notation

On peut aussi trouver la (vieille) notation $C_n^p = \binom{n}{p}$ (attention alors à l'inversion de n et p).

Démonstration

Remarque - Ensemble non ordonné

Le nombre de combinaison apparait lorsque l'on décompte un nombre de situations où les éléments élémentaires ne sont pas ordonnés. Cela peut se produire de deux façons :

— tous les éléments sont « tirés » ensemble (une poigné). Aucun ordre n'est possible

— les éléments sont tirés successivement, mais l'ordre ne compte pas (pour une raison ou une autre, clairement spécifiée dans l'énoncé)

Exercice

Quel est le nombre de main avec 3 as, si l'on distribue un jeu de 32 cartes ?

Sur cet exemple, on voit le principe de décomposition en action.

Savoir faire - Dénombrement et principe de décomposition

Il s'agit décrire *exactement* (c'est à dire tous les éléments, sans les compter plusieurs fois) l'ensemble des situations possibles.
On écrit :
« Une situation ... (qui correspond à nos attentes) est parfaitement définie par :

1. le choix de ...
   (combien d'éléments de disponible ? combien d'éléments choisis ? Y-a-t-il remise ou non ? est-ce une liste ou un ensemble ?), soit n_1 possibilités
   Puis
2. le choix de ......, soit n_2 possibilités
   Puis
   ⋮

k. le choix de ......, soit n_k possibilités

Il y a donc $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ situations possibles. »

Exercice
De combien de manières peut-on choisir parmi 30 personnes une équipe de 6 personnes en fixant parmi elles un capitaine ?

Savoir faire - Nature du coefficient binomial
Puisque le coefficient binomial exprime le nombre de quelque chose, il s'agit toujours d'un nombre entier, ainsi les calculs fractionnaires *se simplifieront toujours*.
Il faut donc toujours commencer par simplifier les calculs avant d'effectuer les premières multiplications

Exemple - Calculer $\binom{9}{5}$

3.6. Propriétés du coefficient binomial (rappels)

Proposition - Propriétés
On a vu :

$$\binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2};$$

$$\text{pour } p \leqslant n, \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

$$\text{pour } 1 \leqslant p \leqslant n \quad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

Par convention, si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$
(cela a du sens : selon la définition et dans le triangle de Pascal...)

Remarque - Binôme de Newton
En utilisant la distributivité de $\times$ par rapport à $+$, l'associativité et la commutativité de $+$ et la commutativité de $\times$ (en fait $ab = ba$ suffit) on obtient par dénombrement la formule du binôme de Newton dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (et en fait dans tout ensemble muni de deux opérations ayant les propriétés utilisées) :

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$$

d'où la dénomination de coefficients binomiaux pour les $\binom{n}{p}$.

Remarque - Nombre de chemins
Au chapitre 2, nous avions également fait le lien entre les coefficients binomiaux est le nombre de chemin avec k succès pour n répétitions d'épreuve de Bernoulli

4. Exercices d'applications

4.1. Tableau des dénombrements classiques

Pour aller plus loin - Factorielles montantes et binôme de Newton
Montrer que, pour tout a et b qui commutent dans un anneau :

$$(a+b)^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{\overline{k}} b^{\overline{n-k}}$$

Savoir faire - Questions à se poser

On considère un ensemble E de cardinal n. On effectue alors un tirage de p éléments (avec des hypothèses évoluantes)

	Ordre ?	Répétition ?	Nombre de cas	Ex. classique
Nombres de permutations (Arrangement **total**)	OUI	NON	$n!$	Nbre de bijections
Nbres de p-liste sans répétition (Arragenments simples)	OUI	NON	$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$	Nbre d'applications injectives
Nombres de p-liste (Arrangements avec répétition)	OUI	OUI	n^p	Nbre d'applications
Nombre de sous ensembles (Combinaisons simples)	NON	NON	$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$	Pioche d'une poignée

Il faut savoir remplir ce tableau de **façon intuitive** (et non uniquement grâce à la mémoire).

Exercice

On considère une urne de 10 boules, 6 rouges et 4 bleues.
Combien existe-t-il de façons différentes de tirer 4 boules dans l'urne dont au moins deux serait rouges.

1. si le tirage se fait simultanément ?
2. si le tirage se fait une à une et avec remise ?
3. si le tirage se fait une à une et sans remise ?

La méthode est toujours la même. A chaque fois on prendra un paramètre ou **un conditionnement** : on supposera que le nombre de boules bleues tirées vaut k avec k variant de 0 à 2.

Exercice

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Déterminer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$.

4.2. Formule de Vandermonde

Exercice

Soient $n, m, p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leqslant \min(n, m)$.
Montrer que $\displaystyle\sum_{i=0}^{p} \binom{n}{i}\binom{m}{p-i} = \binom{n+m}{p}$ (Formule de Vandermonde)

Nouvelle démonstration (dans un autre genre) :

Exercice

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Soient $m, n \in \mathbb{N}$ et $p \leqslant \min(n, m)$.

1. Quel est le coefficient de x^p lorsque l'on développe $(1+x)^{n+m}$?
2. Quel est le coefficient de x^p lorsque l'on développe $(1+x)^n \times (1+x)^m$?
3. Retrouvez la formule de Vandermonde

Remarque - Pascal : cas particulier (essentiel) de Vandermonde

On voit là que finalement, la formule de Pascal est un cas particulier de celle de Vandermonde pour $p = 1$ et $n = 1$.
On doit alors pouvoir démontrer la formule de Vandermonde par récurrence à l'aide de celle de Pascal.

4.3. Coefficient multinomial

Analyse - Anagramme de mots avec lettres dédoublées

Savoir faire - Permutations avec répétition

Le nombre de permutations de n éléments avec k sous groupes tels que :
- le premier sous groupe est composé de n_1 éléments identiques (ou indiscernables)
- le deuxième sous groupe est composé de n_2 éléments identiques (ou indiscernables)
- $\ldots$,
- le k^{e} sous groupe est composé de n_k éléments identiques (ou indiscernables)

  vérifiant donc $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$,

est égal à : $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$.

Remarque - Coefficient multinomial

Le nombre $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$ est appelé coefficient multinomial.

Remarque - Autre expression

Le nombre de permutations de n éléments, répartis dans k classes dont
- n_1 sont de classe 1,
- n_2 sont de classe 2,
- $\ldots$,
- n_k sont de classe k,

indiscernables dans chaque classe est $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$

Exemple - A écrire

Exercice

Combien existe-t-il d'anagramme du mot "abracadabra" ?

Exercice

Dans un anneau, avec a, b, c et d qui commutent, exprimer

$$(a+b+c+d)^{10}$$

4.4. Avec bijection

Exercice

Déterminer $\sharp\{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbb{N}^3 | n_1+n_2+n_3=8\}$.

Exercice

Soit $p \leqslant n$. Pour simplifier les notations de l'exercice, on note $\mathscr{F}_c(p,n)$ (resp. $\mathscr{F}_{sc}(p,n)$) l'ensemble des applications croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ (resp. l'ensemble des applications strictement croissantes de $[\![1,p]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$).

1. Vérifier que l'application $\phi : f \mapsto g | \forall i \in [\![1,p]\!], g(i) = f(i)+i-1$ définit une bijection de $\mathscr{F}_c(p,n)$ dans $\mathscr{F}_{sc}(p,n+p-1)$. Qu'en déduit-on ?
2. On considère l'application ψ de $\mathscr{F}_c(p,n)$ dans $\mathbb{N}^n$, qui, à un élément f de $\mathscr{F}_c(p,n)$ associe
$$\left(\text{Card } f^{-1}(\{1\}), \text{Card } f^{-1}(\{2\}), \cdots, \text{Card } f^{-1}(\{n\})\right) = \left(\text{Card } f^{-1}(\{i\})\right)_{1\leqslant i \leqslant n}.$$
Est-elle injective ? surjective ?
Déterminer $\psi(\mathscr{F}_c(p,n))$.
3. En déduire le cardinal de $\{(n_1,\dots,n_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $n_1+\cdots+n_n = p\}$.
4. Quel est le nombre de dispositions différentes de m prospectus différents (resp. m prospectus identiques) dans k boîtes aux lettres différentes.

4.5. Séries génératrices

Heuristique - Fonction ou série génératrice

Voici une méthode qui fonctionne particulièrement bien en dénombrement.
On considère un problème de dénombrement, dont l'hypothèse dépend d'une variable entière n.
On note a_n, le dénombrement recherché et on crée la fonction :
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$
Alors, la plupart des hypothèses se transpose en une propriété calculatoire de f.
Puis, on cherche alors la fonction f. Et enfin, il ne reste plus qu'à trouver ses coefficients (identification)

On peut même, sans soucis de convergence, étudier des séries génératrices, sorte de polynôme de degré infini

Définition - Série génératrice
On considère $u = (u_n)$, une suite à valeurs dans un corps $\mathbb{K}$.
On lui associe la série génératrice $S(u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n X^n$.
On note $\mathbb{K}[[X]]$, l'ensemble des séries génératrices.

Remarque - Inclusion algébrique
En fait, $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X) \subset \mathbb{K}[[X]]$.

Exemple - Série géométrique

On a les règles opératoires suivantes qui permettent de passer de propriétés sur (u_n) à des propriétés sur S.

Proposition - Règles opératoires sur les séries génératrices
On généralise les opérations sur les polynômes aux opérations équivalentes sur les séries.
On a alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $u, v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:
— $S(u+v) = S(u) + S(v)$
— $S(\lambda u) = \lambda S(u)$
— $X^k S(u) = S(\underbrace{0,0,\dots 0}_{k}, u)$ (règle de décalage)

ou $S(u) = (u_0 - u_1 X - \dots u_{k-1} X^{k-1}) + X^k S\big((u_{n+k}\big)$
— $S'(u) = S\big((nu_n)_{n\geqslant 1}\big) =$ (règle de dérivation)
— $S(u) \times S(v) = S\big((\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k})_{n\geqslant 0}\big)$ (règle de produit de Cauchy)
Si $u_0 \neq 0$, on peut même définir l'inverse de $S(u)$... (comme pour des DL)

Heuristique - Comme pour les polynômes...
On a montrer comme pour les polynômes, en exploitant la dérivation formelle, qu'il y a une unique façon d'écrire une série formelle.

Pour aller plus loin - « En toute rigueur... »
Les soucis d'analyse (de type convergence...) ne sont pas féconds ici. On s'en inspire, mais le formalisme est suffisant (comme pour la dérivation des polynômes qui ne demande pas de montrer la dérivabilité de l'objet).
Néanmoins, si vous êtes pris de remords, les séries entières vues l'année prochaines répondront à toutes ces questions.
C'est aussi pour préparer ce thème important de seconde année (séries entières) que nous proposons cette partie hors-programme (séries formelles)

On peut identifier

Proposition - Identification
Si $S(u) = S(v)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$.

Application - Suite de Fibonacci

Exercice
Déterminer, avec les séries génératrices, Card $\{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3 \mid n_1 + n_2 + n_3 = 8\}$.
On pourra noter $u_k =$ Card $\{(n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{N}^3 \mid n_1 + n_2 + n_3 = k\}$,
puis considérer $F(X_1, X_2, X_3) = \sum_{n_1\in\mathbb{N}} X_1^{n_1} \times \sum_{n_2\in\mathbb{N}} X_2^{n_2} \times \sum_{n_3\in\mathbb{N}} X_3^{n_3} \dots$

Pour aller plus loin - Fonction (série) génératrice de plusieurs variables
Cela se généralise à plusieurs variables entières, on introduit alors plusieurs inconnues $x, y\dots$

5. Bilan

Synthèse

- ⇝ Les questions de dénombrements ne sont pas toujours évidentes à comprendre et souvent difficile à répondre synthétiquement. Il faut mettre en place une (méta-)stratégie.
- ⇝ Un premier réflexe à avoir : se demander comment décrire un exemple concret de situation répondant au problème. Il est bon alors d'être attentif au liberté pour choisir les paramètres qui ne manquent pas d'apparaitre.
- ⇝ Il apparait alors fondamentalement deux types classiques de calcul : l'addition-soustraction (réunion d'ensemble, méthode du crible de Poincaré, partitions...) et la multiplication (avec répétition : $n \times n \times \cdots \times n = n^p$ - sans répétition : $n(n-1)\dots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} = A_n^p = p!\binom{n}{p}$).