Huitième partie

Analyse (2)

Chapitre 34

Développements limités

Résumé -

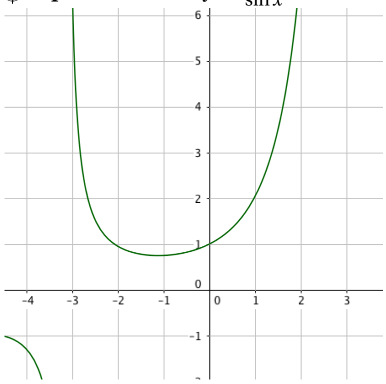
Au voisinage d'un point a, une courbe est tout à fait comparable à une droite; pas n'importe laquelle : sa tangente d'équation $y = a + f'(a)(x-a)$. Est-il possible d'être encore plus précis ? Les développements limités répondent à cette question : ils permettent de transformer une fonction quelconque en une famille plus simple de fonctions -polynômes de Taylor- très proche.
Pour pouvoir affirmer ce résultat (et l'exploiter abusivement en sciences physiques), il faut d'abord commencer par formaliser du vocabulaire très précis : une fonction f est dominé par (resp. négligeable devant, équivalente à) une fonction g au voisinage de a si…
Au passage, on formalisera l'expression bien connue des lycées : « g l'emporte sur f »…
Au lieu d'une liste de problème, nous commençons par l'étude d'un cas précis.
Quelques vidéos :

- *Optimal sup/spé - Formules de Taylor et Développements limités - https ://www.youtube.com/watch ?v=TVW8UBTmT58*
- *Avenir-cours - DL4(1) de ln(x)/x? a partir de DL connus MPSI - https ://www.youtube.com/watch ?v=a8Q5ErJNPYs*
- *Science for all - Les développements limités Relativité 3 - https ://www.youtube.com/watch ?v=TM9HdSBat8o*

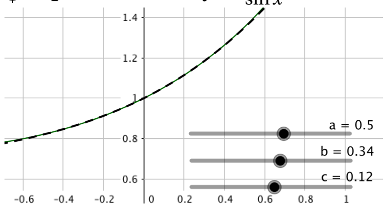
Sommaire

1. Problème

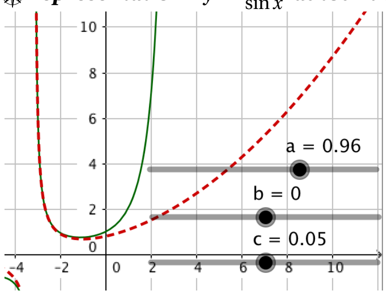
Représentation - $y = \frac{e^x-1}{\sin x}$



Représentation - $y = \frac{e^x-1}{\sin x}$ **autour de** $x=0$



Représentation - $y = \frac{e^x-1}{\sin x}$ **autour de** $x=-\pi$



Problème 147 - Une courbe, des zooms

Considérons une fonction exemplaire :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{\sin x}$$

Le tracé de cette courbe figure en marge.
Elle semble de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\pi,\pi[$.
On peut alors visiblement obtenir certains nombres significatifs : $f(0)$, $f'(0)\ldots$, mais aussi $\lim_{+\pi^-} f$ ou encore $\lim_{+\pi^-} f'\ldots$
On peut dire mieux, au lieu de regarder en un point, on peut regarder au voisinage d'un point. On zoome par exemple en 0 ou en $+\pi$ (cf. en marge).
Cela la puissance du zoom, on voit alors apparaître une famille de fonctions plus ou moins simples ; plus ou moins connue.

— Au voisinage de 0 : Visiblement $f(0) = 1$. Une première approximation est $f = 1$. Pas satisfaisant... Puis par tâtonnement, il semble que la courbe d'équation (polynomiale) $y = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{8}x^3$ semble très proche de $y = f(x)$, au moins au voisinage de 0.

— Au voisinage de $-\pi$: La valeur est infini, cela ressemble plus à une hyperbole.
Par tâtonnement, il semble que $y = \frac{1-e^{-\pi}}{x+\pi} + e^{-\pi}(-1 + \frac{1}{2}(x+\pi))$

Le principe d'un développement limité, consiste à approcher une fonction (ou une suite) par une fonction (ou une suite) mieux connue ; polynomiale par exemple

Heuristique - Développement limité

Il s'agit de remplacer une fonction par une version polynomiale - *développement limité* (ou autre - *développement asymptotique*) mieux maitrisée.
Ce remplacement dépend du voisinage du point considéré.
Plus on souhaite qu'il soit bon, plus il faudra que le développement ait de coefficients.

Il est d'abord nécessaire de comprendre comment comparer deux fonctions (celle de référence et sa version locale polynômiale). On s'intéresse donc dans cette partie aux relations de comparaison entre fonctions.
Le principe est le même pour les suites (mais étudiées toujours uniquement en $n \to +\infty$).

Attention - Selon le point

Il n'est jamais trop tôt pour insister : la fonction (polynomiale - par exemple) plus simple qui décrit f **dépend du point** auprès duquel on est amené à faire l'étude.
Le résultat au voisinage de 0, n'a rien à voir avec celui au voisinage de $+\pi$! (par exemple)

2. Vocabulaire et opérations pour des développements asymptotiques de fonctions

2.1. Définitions

Définition - Définition généralisée

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, point ou borne de I. On dit que

— f est négligeable devant g au voisinage de a, notée $f \underset{a}{=} o(g)$ si
$$\forall \epsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid \forall x \in V, |f(x)| \leqslant \epsilon |g(x)|.$$

— f est équivalente à g au voisinage de a, notée $f \sim_a g$ si $f - g \underset{a}{=} o(g)$.

— f est dominée par g au voisinage de a, notée $f \underset{a}{=} O(g)$ si
$$\exists C > 0, \exists V \in \mathcal{V}_a \mid \forall x \in V, |f(x)| \leqslant C|g(x)|.$$

Remarque - Ensemble $g^{-1}(\{0\})$

Si $g(x) = 0$ pour $x \in V$, alors nécessairement, pour les trois cas précédent : $f(x) = 0$.

Donc $g^{-1}(\{0\}) \cap V \subset f^{-1}(\{0\}$, autrement écrit : $\mathcal{Z}(g) \cap V \subset \mathcal{Z}(f)$.

Exercice

Montrer que $f =_a o(g)$ si et seulement si il existe une fonction h telle que $h \underset{a}{\to} 0$ et $f = hg$ au voisinage de a.

Proposition - Domination, négligeabilité, équivalence pour les fonctions

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$, point ou borne de I ($a \in \overline{I}$).

— f est négligeable devant g au voisinage de a si et seulement si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a, x \notin g^{-1}(\{0\})}{\longrightarrow} 0$ et $\exists\, V \in \mathrm{V}_a$ tel que $g^{-1}(\{0\}) \cap V \subset f^{-1}(\{0\}$

— f est équivalente à g au voisinage de a si et seulement si $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\longrightarrow} 1$et $\exists\, V \in \mathrm{V}_a$ tel que $g^{-1}(\{0\}) \cap V \subset f^{-1}(\{0\}$

— f est dominée par g au voisinage de a ssi la fonction $\dfrac{f}{g}$ est bornée sur un voisinage de a et $g^{-1}(\{0\}) \subset f^{-1}(\{0\}$, au voisinage de a.

Attention - Insistons bien

Pour les fonctions, il s'agit bien d'une relation LOCALE (au voisinage de a).

On peut avoir $f = o(g)$ au voisinage de a ET $g = o(f)$ au voisinage de b...

Donc « $f = o(g)$, sans précision supplémentaire » NE SIGNIFIE RIEN

Démonstration

Exercice

Faire les autres démonstrations

Savoir faire - Avec une fonction « relative »

Notons, pour tout $x \in I$, $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Alors

- f est dominée par g au voisinage de a ssi h est bornée au voisinage de a.
- f est négligeable devant g au voisinage de a ssi $h \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
- f est équivalente à g au voisinage de a ssi $h \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$.

Proposition - Comparaison à une fonction constante
Soit f définie au voisinage de a. On a

$$\begin{aligned} f \underset{a}{=} O(1) &\quad \Leftrightarrow f \text{ est bornée au voisinage de } a. \\ f \underset{a}{=} o(1) &\quad \Leftrightarrow f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

2.2. Cas de suites

Définition - Définition généralisée
Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que

- (u_n) est négligeable devant (v_n), notée $u_n = o(v_n)$ si
$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{tel que} \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant \epsilon |v_n|.$$
- (u_n) est équivalente à (v_n), notée $u_n \sim v_n$ si $u_n - v_n = o(v_n)$.
- (u_n) est dominée par (v_n), notée $u_n = O(v_n)$ si
$$\exists C > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{tel que} \forall n \geqslant N, |u_n| \leqslant C|v_n|.$$

Savoir faire - Etude de négligeabilité/équivalence/domination... d'une suite.

Deux cas fréquents pour étudier une suite (u_n) :

- si la suite $(u_n) = f(n)$, alors en fait on étudie directement la fonction f...
  Très souvent, on se *ramène* à cette situation.
- si la suite est définie implicitement ou par récurrence, on étudie la limite de $\frac{u_n}{v_n}$, où v_n est le candidat pour être respectivement : le facteur de négligeabilité / d'équivalence / de domination (dans ce cas la limite vaut respectivement 0 / 1 / est bornée.

Nous ne reviendrons plus sur le cas des suites.

2.3. Relations d'équivalence. Relation de préordre

Les propositions et théorèmes suivants se démontrent comme pour les suites (les résultats sont totalement équivalents).

Proposition - Equivalence : relation d'équivalence
Soient f, g, h trois fonctions définies et ne s'annulant pas sur un voisinage de a (ou juste en a). On a

- $f \underset{a}{\sim} f$ (réflexivité).
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $g \underset{a}{\sim} f$ (symétrie).

— Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$ (transitivité).

La relation d'équivalence $\sim$ est donc une relation d'équivalence

Proposition - Relation de préordre
Soient f, g, h trois fonctions définies et ne s'annulant pas sur un voisinage de a. On a

— $f = O(f)$ au voisinage de a (réflexivité)
— Si $f = O(g)$ et $g = O(h)$ au voisinage de a alors $f = O(h)$ au voisinage de a. (transitivité)

Pour aller plus loin - Relation : même ordre de grandeur
Pour avoir une relation d'ordre, il faut associer la propriété d'antisymétrie.
Donc définir une égalité $\asymp$ entre fonctions par :

$$f \underset{a}{=} O(g) \text{ et } g \underset{a}{=} O(f) \Longrightarrow f \asymp g$$

Proposition - Liens entre les relations

— Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $f \underset{a}{=} O(g)$
— On a : $f \underset{a}{\sim} g \Leftrightarrow f - g \underset{a}{=} o(g)$ (ou encore noté : $f = g + o(g)$).
— Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{=} O(f)$.
— Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $h \underset{a}{=} o(f) \Leftrightarrow h \underset{a}{=} o(g)$.

2.4. Echelle de comparaison

Proposition - Comparaisons usuelles
Pour $\alpha > 0, \beta > 0$ on a

$$(\ln x)^\beta \underset{+\infty}{=} o(x^\alpha), \quad x^\alpha \underset{+\infty}{=} o(e^{\beta x}),$$

$$|\ln x|^\beta \underset{0}{=} o(\frac{1}{x^\alpha},)$$

$$e^{\beta x} \underset{-\infty}{=} o(\frac{1}{|x|^\alpha}).$$

On a également pour $0 < p < q$:

$$x^p \underset{+\infty}{=} o(x^q)$$

$$x^q \underset{0}{=} o(x^p) \text{ et } (x-a)^q \underset{a}{=} o((x-a)^p).$$

En d'autres termes, aux bornes des intervalles de définition, "l'exponentielle domine(=« *l'emporte sur* ») la puissance, la puissance domine(=« *l'emporte sur* ») le logarithme" (croissances comparées).

Proposition - Taux d'accroissement réinterprété
En utilisant les limites classiques (taux d'accroissement), on a

1. $\sin x \underset{0}{=} x + o(x)$ ou encore $\sin x \underset{0}{\sim} x$
2. $\tan x \underset{0}{=} x + o(x)$ ou encore $\tan x \underset{0}{\sim} x$
3. $\ln(1+x) \underset{0}{=} x + o(x)$ ou encore $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$
4. $e^x \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$ ou encore $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$
5. $(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + o(x)$ ($\alpha \in \mathbb{R}^*$) ou encore $(1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$

Démonstration

2.5. Algèbre des relations de comparaison

Proposition - Opérations avec o ou O

Soient f, g, h, k quatre fonctions définies au voisinage de a. On a

- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(h)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f + g \underset{a}{=} o(h)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(g)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors $\lambda f \underset{a}{=} o(g)$
- Si f et g ne s'annulent pas au voisinage de a et si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $\dfrac{1}{g} \underset{a}{=} o(\dfrac{1}{f})$.
- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $h \underset{a}{=} o(k)$ alors $fh \underset{a}{=} o(gk)$.
- Si les fonctions f et g sont > 0 avec $f \underset{a}{=} o(g)$, alors pour $\alpha > 0$ on a $f^\alpha \underset{a}{=} o(g^\alpha)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $hf \underset{a}{=} o(hg)$

Les propriétés sont encore vraies en remplacant les « o » par des « O ».

Théorème - Signe d'une fonction

Si f est équivalente à g en a, alors il existe V voisinage de a, tel que f et g sont de même signe sur $V \setminus \{a\}$.

Exercice

Faire la démonstration

Théorème - Equivalents et limite

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$.

- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$;
- Si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$, $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell \neq 0$, alors $f \underset{a}{\sim} \ell$.

Proposition - Opérations

Soient f, g, h trois fonctions définies sur un voisinage de a. On a

- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $h \underset{a}{\sim} k$ alors $fh \underset{a}{\sim} gk$ (et $\frac{f}{h} \underset{a}{\sim} \frac{g}{k}$ si h ne s'annule pas)
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $f \underset{a}{\sim} g$, f ou g strictement positives (une suffit...) alors

$$f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$$

En appliquant le théorème de composition des limites, nous avons un nouveau résultat :

Proposition - Substitution dans les relations de comparaison
Soient ϕ définie sur un voisinage de a telle que $\lim\limits_{t\to a}\phi(t) = b$, f, g définies sur un voisinage de b. Alors :

$$f \underset{b}{=} O(g) \Rightarrow f\circ\phi \underset{a}{=} O(g\circ\phi)$$

$$f \underset{b}{=} o(g) \Rightarrow f\circ\phi \underset{a}{=} o(g\circ\phi)$$

$$f \underset{b}{\sim} g \Rightarrow f\circ\phi \underset{a}{\sim} g\circ\phi$$

Attention - Ce qui ne marche pas
D'une manière générale, les équivalents ne passent ni aux sommes, ni aux exponentielles, ni aux logarithmes.

— Somme : en 0 avec $f_1(t) = t$, $f_2(t) = t + t^2$, $g_1(t) = g_2(t) = -t$ on a $f_1 \underset{0}{\sim} f_2$ mais $f_1 + g_1 \underset{0}{\not\sim} f_2 + g_2$.

— Exponentielle : en $+\infty$ avec $f(t) = t^2$ et $g(t) = t^2 + t$ on a $f \underset{+\infty}{\sim} g$ mais $e^f \underset{+\infty}{\not\sim} e^g$.

Exercice
Déterminer un équivalent de $\ln(\sin x)$ en 0.

Attention - Rien de plus TERRIBLE...
Ne pas écrire $f \sim 0$, cela n'a pas de sens avec la définition précédente, et avec la définition générale qui suit, cela signifie que f est nulle dans un voisinage de a (ce qui est bien rare...)

Attention - Confusion fréquente
Ne pas confondre $f \sim g$ et $f(x) - g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
Par exemple $x + 1 \underset{+\infty}{\sim} x$ mais $x + 1 - x = 1$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

3. Développements limités

3.1. Définitions

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $n \in \mathbb{N}$.

Définition - DL en un point réel
Soit I un intervalle contenant a ou d'extrémité a. Soit f une fonction définie sur I sauf éventuellement en a, à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a (en abrégé

DL_n en a ou $DL_n(a)$) s'il existe un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que

$$\begin{aligned}\forall x \in I, f(x) &\underset{a}{=} P(x-a) + o((x-a)^n) \\ &\underset{a}{=} a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)\end{aligned}$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\forall x \in I, f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + (x-a)^n \epsilon(x) \text{ où } \epsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

ou

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)$$

$P(x-a)$ s'appelle la partie régulière du DL_n de f en a.

Pour aller plus loin - Linéarisation d'une équation différentielle

Supposons que l'on doit résoudre une équation différentielle d'inconnue y mais qui n'est pas linéaire.
On peut l'écrire sous la forme $F(y, y', \dots y^{(n)}) = 0$ si elle est d'ordre n.
Imaginons qu'on connait une solution $\tilde{y}$ du problème.
*On chercher alors une autre solution dans son voisinage : $y(t) = \tilde{y}(t) + \epsilon(t)$. On a alors : $F(\tilde{y} + \epsilon, \tilde{y}' + \epsilon', \dots \tilde{y}^{(n)} + \epsilon^{(n)}) = 0$. Or cette équation peut **se linéariser** : on fait un DL_1 de F au voisinage de $\tilde{y}$, cela conduit à une équation différentielle **linéaire** d'ordre n.*
On connait des méthodes de résolution…

Définition - DL en ∞

Soit f une fonction définie sur $I = [a, +\infty[$. On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de $\pm\infty$ s'il existe un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in K_n[X]$ tel que

$$\begin{aligned}\forall x \in I, f(x) &= P\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \\ &= a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right).\end{aligned}$$

Remarque - Ecriture

Par convention, les termes d'un développement limité sont toujours écrits dans l'ordre croissant des puissances (de $(x-a)$ ou $1/x$). Ainsi chaque terme est négligeable devant ceux qui le précèdent et chaque nouveau terme apporte une précision par rapport à ceux qui le précède.

3.2. Propriétés

Théorème - Unicité

- Si f admet un DL_n en $a \in \mathbb{R}$ (ou en ∞), il est unique.
- Si f admet un DL_n en a, alors f admet un DL_p en $a \in \mathbb{R}$ (ou en ∞) pour tout $p \leqslant n$ obtenu en tronquant la partie régulière à la puissance p (c'est-à-dire en enlevant les monômes de degré $> p$ du polynôme).

Pour aller plus loin - Linéarisation d'une équation différentielle (suite)

Considérons (par hasard…) le problème : $y'' + a\sin(y) = 0$.
Une solution est $\tilde{y} : t \mapsto 0$. Une solution approchée est $y = \tilde{y} + \epsilon$.
On a donc $\sin(y) = \sin(0+\epsilon) = \epsilon - \frac{\epsilon^3}{6} + o(\epsilon^4)$.
Donc si ϵ reste proche de 0 : $y'' - ay = o(y)$ et donc une solution approchée est $y = A\sin(\sqrt{a}t + \varphi)$.
Les solutions sont de la forme : $t \mapsto A\sin(\sqrt{a}t + \varphi) + o(t)$…

Démonstration

Corollaire - Lien avec la parité
Soit f définie sur un voisinage de 0.

- Si f admet en 0 un DL_n, $f(x) = P(x) + o(x^n)$, alors $g : x \mapsto f(-x)$ admet en 0 le DL_n
$$g(x) = P(-x) + o(x^n).$$
- Si f admet un DL_n en 0 et f paire (resp. f impaire) alors le DL ne contient que des puissances paires (resp. impaires).

Démonstration

Proposition - Limites et équivalents

- Si f admet un DL_n en $a \in \mathbb{R}$ alors f est continue ou prolongeable par continuité en a, avec $f(a) = a_0$.
- Si $n \geqslant 1$, f (ou son prolongement) est dérivable en a, de dérivée a_1.
- Le premier (si les puissances sont « rangées » comme il faut!) terme non nul d'un DL de f en a fournit un équivalent en a, ou encore si on a la **forme normalisée** d'un DL
$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p(a_p + a_{p+1}h + \cdots + a_n h^{n-p} + o(h^{n-p})) \text{ avec } a_p \neq 0 \text{ et } n \geqslant p$$
alors $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_p h^p$.

Remarque - Généralisation en $+\infty$
En ∞, si f admet un DL_n alors f admet a_0 pour limite et le premier (si les puissances sont « rangées » comme il faut!) terme non nul d'un DL de f en ∞ fournit un équivalent.

Démonstration

Attention - A ne pas généraliser pour $f^{(2)}(a)$

Cela ne se généralise pas aux dérivées suivantes.
Contre-exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^{100}\sin\frac{1}{x^{100}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ Alors f admet un DL_{99} en 0 ($f(x) = 0 + o(x^{99})$) mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Savoir faire - Obtenir un $DL_n(a)$ d'une fonction f

On se ramène usuellement en 0 :

— Pour obtenir un DL_n en a de f, on pose $h = x - a$, on effectue un DL_n en 0 de $g(h) = f(a+h)$ puis on remplace h par $x - a$.

— Pour obtenir un DL_n en ∞ de f, on pose $t = 1/x$, on effectue un DL_n en 0 de $g(t) = f(1/t)$ puis on remplace t par $1/x$.

Il suffit donc de savoir obtenir les $DL_n(0)$

3.3. Existence de développements limités

On cherche maintenant les $DL_n(0)$ des fonctions usuelles.

Théorème - Premières formules

Les fonctions $\dfrac{1}{1-x}$ et $\dfrac{1}{1+x}$ admettent des DL_n en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$ donnés par :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$$
$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

Démonstration

Proposition - Primitivation

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $F : I \to \mathbb{R}$ dérivable. On suppose que F' admet un DL_n en 0

$$F'(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n).$$

Alors F admet en 0 le DL_{n+1} (obtenu en primitivant celui de F)

$$F(x) \underset{x\to 0}{=} F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + o(x^{n+1}).$$

Exercice

Donner le $DL_n(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$

Démonstration

Corollaire -

$$\text{Arctan}\, x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Démonstration

Attention - Mais on ne peut pas dériver!!
Si f est dérivable, l'existence d'un DL_n pour f n'implique pas l'existence d'un DL_{n-1} pour f'.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^{100} \sin \frac{1}{x^{100}} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ Alors f admet un DL_{99} en 0, mais n'est pas deux fois dérivable en 0.

Remarque - Mais tout n'est pas perdu...
En revanche si f est de classe $\mathscr{C}^n$, alors f' est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ et le DL_{n-1} de f' est obtenu par dérivation du DL_n de f.
(son intégration doit correspondre avec celui de f (unicité))

Théorème - Formule de Taylor-Young
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de I dans K, n fois dérivable en $a \in I$.
Alors il existe $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I$ on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}\epsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to a} \epsilon(x) = 0.$$

Démonstration

Attention - Ne pas en dire trop
Cette formule donne uniquement un résultat **local**, elle NE sert donc QU'à préciser la fonction f au voisinage de a.

Corollaire - Condition suffisante simple
Toute fonction n fois dérivable en a admet un DL_n en a, donné par la formule de Taylor-Young.

Ce résultat permet de retrouver les DL précédemment obtenus, mais également ceux d'autres fonctions usuelles :

Proposition - Développements limités usuels en 0
On a les résultats suivants (à connaître parfaitement)

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p}) (\text{ ou } o(x^{2p+1}))$$
$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1}) (\text{ ou } o(x^{2p+2}))$$
$$\operatorname{ch} x \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + o(x^{2p}) (\text{ ou } o(x^{2p+1}))$$
$$\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + o(x^{2p+1}) (\text{ ou } o(x^{2p+2}))$$
$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \ldots + \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$
$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$
$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$
$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2) \quad (\alpha = \frac{1}{2})$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) \quad (\alpha = -\frac{1}{2})$$

Démonstration

Remarque - Composition de DL = composition de polynômes
En fait, on remarque que dans plusieurs cas, l'enjeu des composés des développements limités, il s'agit donc d'appliquer des formules de composition de polynômes. Or, on a vu que cela n'était pas vraiment une choses facile...
On reviendra sur cette remarque un peu plus loin...

Exercice
Terminer la démonstration pour obtenir le DL d'ordre 4 de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

Savoir faire - DL des fonctions de référence en une autre valeur
Supposons que $x \to a$ pour $x \to a$. Alors $h = x - a \to 0$. On a respectivement :
- $\exp(x) = \exp(a+h) = e^a \times \exp(h) = e^a(1 + h + \frac{h}{2} + \dots)$
- $\ln(x) = \ln(a+h) = \ln\left(a(1+\frac{h}{a})\right) = \ln a + \frac{h}{a} - \frac{h^2}{2a^2} + \dots)$
- $\cos(x) = \cos(a+h) = \cos a \cos h - \sin a \sin h = \cos a(1 - \frac{h^2}{2} + \dots) - \sin a(h - \frac{h^3}{6} + \dots)$
- $\operatorname{sh}(x) = \operatorname{sh}(a+h) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch} h + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} a \dots$ (à démontrer)
- $x^\alpha = (a+h)^\alpha = a^\alpha \times (1+\frac{h}{a})^\alpha = a^\alpha(1 + \alpha\frac{h}{a} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\frac{h^2}{a^2} + \dots$

3.4. Opérations

Proposition - Combinaison linéaire
Si f et g admettent en a des DL_n alors pour $\lambda, \mu \in K$, $\lambda f + \mu g$ admet un DL_n en a, obtenu en faisant la combinaison linéaire correspondante des DL_n.
(résultat encore valable en ∞)

Démonstration

Exercice
Donner un DL_3 en 0 de $\cos x + 2\sin(-x)$.

Proposition - Produit
Si f et g admettent des DL_n en a alors fg admet un DL_n en a obtenu en multipliant les DL_n de f et de g et en supprimant les termes de degré $> n$ (termes non significatifs).
(résultat encore valable en ∞)

Démonstration

Remarque - Multiplication de polynôme
Si les parties régulières des DL_n de f et g sont des polynômes de valuation strictement positive, le produit des DL_n de f et g donne un DL d'un ordre strictement supérieur à n, mais dont on ne peut rien dire pour $k > n$.
Il s'agit d'une multiplication polynomiale.

Exercice
Donner le DL_3 en 0 de $e^x\sqrt{1+x}$ et le DL_4 en 0 de $\sin^2 x$.

Proposition - Composition
Soient $f : I \to K$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $\phi : J \to \mathbb{R}$ tel que $\phi(J) \subset I$ et $\lim\limits_{x\to 0} \phi(x) = 0$.
On suppose que f admet un DL_n en 0, $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$, et que ϕ admet un DL_n en 0, $\phi(x) = b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n)$. Alors $f \circ \phi$ admet un DL_n en 0, obtenu en écrivant

$$\begin{aligned} f\circ\phi(x) &= a_0 + a_1(b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n)) + a_2(b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n))^2 \\ &\quad + \cdots + a_n(b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n))^n + o(x^n) \end{aligned}$$

en développant et en supprimant les termes de degré $> n$ (termes non significatifs).

Remarque - Comment s'y prendre
En fait il s'agit, là aussi, des opérations sur les polynômes (en l'occurence la composition), puis une troncature.
Il faut bien prendre initialement des DL d'ordre n de f et ϕ pour obtenir un DL_n de $f \circ \phi$.
Il s'agit encore d'une composition de polynômes, ce qui donne bien un polynôme!

Pour aller plus loin - Intérêt des polynômes
En début d'année, on a vu que l'intérêt des fonctions polynomiales n'était pas dans le fait que la somme ou le produit de fonctions polynomiales donne une fonction polynomiale, mais bien dans la stabilité par composition.

Démonstration

Exercice
Donner un DL_4 en 0 de $\ln(\cos x)$.

Proposition - Inverse
Si f admet un DL_n en 0, $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$, et $f(0) = a_0 \neq$

0 alors $\dfrac{1}{f}$ admet un DL_n en 0 obtenu en écrivant

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{f(0)} \times \frac{1}{1+\frac{a_1}{a_0}x+\frac{a_2}{a_0}x^2+\cdots+\frac{a_n}{a_0}x^n+o(x^n)} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{f(0)} \times \left(1-u(x)+u(x)^2+\cdots+(-1)^n u(x)^n + o(u(x)^n)\right) \\ &\text{où } u(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{a_1}{a_0}x+\frac{a_2}{a_0}x^2+\cdots+\frac{a_n}{a_0}x^n+o(x^n),\end{aligned}$$

en développant et en supprimant les termes de degré $> n$ (termes non significatifs).

En fait, il s'agit d'un corollaire de la proposition précédente. Il faut plus le prendre comme un savoir-faire.

Exercice

Donner le DL_5 en 0 de $\tan x$.

Corollaire - $DL_3(0)$ **de** tan

$$\tan x \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

Truc & Astuce pour le calcul - Méthode (Bilan)

Pour faire le $DL_n(a)$ de f.

1. On évalue (rapidement) la valeur numérique de $f(a)$ (elle peut être nulle ou non).
   On garde le résultat auprès de soi.
2. On fait le changement de variable
   — $x = a+h$ avec $x \to a$ ssi $h \to 0$ pour $a \in \mathbb{R}$
   — $x = \frac{1}{y}$ avec $x \to \infty$ ssi $y \to 0$ pour $a = \pm\infty$
3. On factorise par $f(a)$.
   Selon la nature de f, il peut y avoir des simplification.
   Normalement, on retrouve nécessairement des $DL_n(0)$ connus de fonctions de référence.
4. Il peut y avoir des compositions : $(1+U)^n$ ou $\dfrac{1}{1+U}$, $\ln(1+U)\dots$ avec $U(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.
   On exploite les résultats de composition, avec U, dans un premier temps, remplacé ensuite par sa valeur.
5. Beaucoup de développements. On fait comme d'habitude : on n'écrit pas trop, et on associe directement les coefficients associés au même monôme h^k.

3.5. Généralisation

Définition - Développement limité généralisé

On dit que f admet un développement limité généralisé à l'ordre n s'il existe $Q,R \in K[X]$, $P,S \in K_n[X]$ tels que :

en 0, $f(x) = Q\left(\frac{1}{x}\right) + P(x) + o(x^n)$

en $\pm\infty$, $f(x) = R(x) + S\left(\frac{1}{x}\right) + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$

c'est-à-dire s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ (= $\deg Q$ ou $\deg R$) tel que, $x^p f(x)$ en 0, $\frac{1}{x^p} f(x)$ en $\pm\infty$, admette un DL_{n+p}

Exemple - Retour sur l'exemple original : $\frac{e^x-1}{\sin x}$ autour de $x = -\pi$

Définition - Développement asymptotique

On dit que f admet un développement aymptotique en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si f peut s'écrire

$$f(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x) + o(f_n(x))$$

où pour tout k, $f_k(x) \underset{a}{=} o(f_{k-1}(x))$.

On peut par exemple avoir $f_k(x) = g(x)^k$ où $g(x)$ est une fonction qui tend vers 0 en a ($g(x) = x^\alpha$ en 0 ($\alpha > 0$), $\quad g(x) = e^{-x}$ en $+\infty$...).

$f_n(x)$ s'appelle la précision du DA.

Exercice

Déterminer un DA en 0 de $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ à la précision $x \ln x$, puis à la précision x^3.

4. Applications des DL

4.1. Recherche de limites et d'équivalents (suite ou fonction)

Savoir faire - La force des développements limités

Les DL permettent d'avoir un équivalent (premier terme non nul) et, contrairement aux équivalents, ils peuvent être additionnés. C'est donc un outil "plus sûr" dans son maniement. L'équivalent permet ensuite d'avoir la limite.

On commence toujours par se ramener en 0 pour utiliser les DL usuels.

Exercice

Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{1+x^2} - \cos x\right) \frac{1}{x^2}$.

Exercice

Déterminer un équivalent de la suite (u_n) définie par $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e$.

Exercice

Déterminer $\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \left(\tan\frac{3x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos 3x}}$.

4.2. Etude locale d'une fonction

Savoir faire - Etude locale d'une courbe au voisinage d'un point

Les DL permettent d'avoir directement des résultats sur le comportement local d'une fonction plus précis que la limite ou l'équivalent en un point.

Tangentes et position, extremum local

Proposition - Exploitation graphique d'un DL en a

Si f admet en a un DL_k $(k \geqslant 2)$ de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_k(x-a)^k + o((x-a)^k)$$

alors f est prolongeable par continuité en a, de prolongement dérivable en a, l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est $y = a_0 + a_1(x-a)$, le signe de a_k et la parité de k donnent, localement, au voisinage de a, les positions relatives de la tangente et de la courbe, des conditions pour avoir un extremum local.

Remarque - « Seulement » un DL d'ordre 1

Un DL_1 donne le prolongement par continuité, la dérivabilité et l'équation de la tangente, mais ne permet pas d'avoir les positions relatives de la tangente et de la courbe car le signe de $o(x-a)$ est inconnu.

Exercice

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x\ln x}$. Quel est son domaine de définition ?

Montrer qu'elle se prolonge de manière continue et dérivable en 1. Donner l'équation de la tangente ainsi que les positions relatives de la tangente et de la courbe.

Préciser également le comportement de f aux autres bornes du domaine de définition.

Asymptotes et position

Proposition - Exploitation graphique d'un DL en ∞

Si f admet en ∞ un développement limité généralisé d'ordre k $(k \geqslant 1)$ de la forme

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^k}\right)$$

alors $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = ax+b$, le signe de c et la parité de k donnent, localement, au voisinage de $+(-)\infty$, les positions relatives de l'asymptote et de la courbe.

Remarque - « Seulement » un DL d'ordre 0

Un développement limité généralisé à l'ordre 0 donne l'asymptote, mais ne permet pas d'avoir les positions relatives de la tangente et de la courbe.

Exercice

Soit f la fonction définie par $f(x) = (x^2-1)\ln\dfrac{x-1}{x+1}$.

Quel est son domaine de définition ?

Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote en $+\infty$ dont on donnera l'équation ainsi que la position relative par rapport à la courbe.

5. Bilan

Synthèse

⇝ Nous apprenons ici à remplacer localement une fonction par une expression plus simple (polynomiale la plupart du temps) et facile à étudier.
Cela est assez technique et calculatoire, mais également très puissant!
On commence toujours par se demander où est-ce qu'on se trouve!

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

— Savoir-faire - Avec une fonction « relative »
— Savoir-faire - Etude de négligeabilité/équivalence/domination... d'une suite.
— Savoir-faire - Obtenir un $DL_n(a)$ d'une fonction f
— Savoir-faire - DL des fonctions de références en d'autres points (que 0)
— Truc & Astuce pour le calcul - Méthode (Bilan)
— Savoir-faire - La force des développements limités
— Savoir-faire - Etude locale d'une courbe au voisinage d'un point

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$\mathcal{Z}(g)$	Ensemble des racine de g	$\mathcal{Z}(g)=g^{-1}(\{0\})=[g=0]=\{x \mid g(x)=0\}$	
$f \underset{a}{=} o(g)$	f est négligeable devant g au voisinage de a	$\forall\, \epsilon>0, \exists\, V\in\mathcal{V}_a \mid \forall\, x\geqslant V, \lvert f(x)\rvert \leqslant \epsilon\lvert g(x)\rvert$	si $\mathcal{Z}(g)\cap V\subset\mathcal{Z}(f)$, équivalent à $\lim\limits_{x\to a, x\notin\mathcal{Z}(g)} \dfrac{f(x)}{g(x)}=0$
$f \underset{a}{\sim} g$	f est équivalente à g au voisinage de a	$\forall\, \epsilon>0, \exists\, V\in\mathcal{V}_a \mid \forall\, x\geqslant V, \lvert f(x)+g(x)\rvert \leqslant \epsilon\lvert g(x)\rvert$	si $\mathcal{Z}(g)\cap V\subset\mathcal{Z}(f)$, équivalent à $\lim\limits_{x\to a, x\notin\mathcal{Z}(g)} \dfrac{f(x)}{g(x)}=1$
$f \underset{a}{=} O(g)$	f est dominée par g au voisinage de a	$\exists\, M>0, \exists\, V\in\mathcal{V}_a \mid \forall\, x\geqslant V, \lvert f(x)\rvert \leqslant M\lvert g(x)\rvert$	si $\mathcal{Z}(g)\cap V\subset\mathcal{Z}(f)$, équivalent à $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ bornée sur $\mathcal{Z}(g)\cap V$
$DL_n(a)$ de f	Développement limité d'ordre n de f au voisinage de a	$\exists\, P\in\mathbb{R}_n[X] \mid f(x)\underset{a}{=}P(x-a)+o((x-a)^n)$	

Retour sur les problèmes

147. $f(x)=\dfrac{e^x-1}{\sin x}$.
Au voisinage de 0 : $e^x-1=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$ et $\sin x = x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)$. On simplifie par x.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{24}x^3+o(x^3)}{1-\frac{1}{6}x^2+o(x^3)} \\ &= (1+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{6}x^2+\tfrac{1}{24}x^3+o(x^3))(1+\tfrac{1}{6}x^2+o(x^3)) \\ &= 1+\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{8}x^3+o(x^2). \end{aligned}$$

Au voisinage de $-\pi$: $\sin(x)=\sin(-\pi+h)=-\sin h=-h+\frac{1}{6}h^3+o(h^4)$.

$$e^x-1=e^{-\pi+h}-1=e^{-\pi}e^h-1=e^{-\pi}(1+h+\tfrac{1}{2}h^2+\tfrac{1}{6}h^3+o(h^3))-1.$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{-1}{h}\,\frac{e^{-\pi}-1+e^{-\pi}h+\frac{e^{-\pi}}{2}h^2+\frac{e^{-\pi}}{6}h^3+o(h^3)}{1-\frac{1}{6}h^2+o(h^3)} \\ &= \frac{1-e^{-\pi}}{h}-e^{-\pi}+\tfrac{1-4e^{-\pi}}{6}h+o(h) \end{aligned}$$