Chapitre 37

Familles sommables

Résumé -

On définit ici les familles de nombres sommables. Il s'agit d'élargir la question des sommes finies (vues en début d'année), puis des séries (vues au second semestre) à une somme de réels ou de complexes indexés sur un ensemble qui finalement doit être dénombrable (comme $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{N}^2$...).
On commence par étudier ces sommes pour des réels positifs. Le plus difficile est d'obtenir des critère nécessaire ET suffisant : la comparaison bien pratique ne suffit pas toujours ; on peut sommer par paquets, ou bien sur une suite croissante d'ensemble dont la réunion vaut D.
On reprend dans un second temps les méthodes lorsque les nombres sont réels voire complexes.
Finalement, il ne reste qu'une méthode : 1) Prendre la valeur absolue, 2) Sommer dans $\overline{\mathbb{R}}$ et 3) Conclure selon que la somme vaut $+\infty$ ou est un nombre de $\mathbb{R}$.

Sommaire

1. Problème

? Problème 157 - Somme d'une famille indexé sur $\mathbb{N}^2$

Il nous arrive de rencontrer une famille de nombres définie sur l'ensemble $\mathbb{N}^2$. Par exemple, si on lance deux dés avec une infinité de faces, et qu'on souhaite faire la somme des probabilités des résultats possibles (sur les couples) donc. Comment gérer ces sommes? En particulier si on note p et q les deux nombres. Faut-il d'abord faire $p \to +\infty$, puis $q \to +\infty$ ou l'inverse ou encore les deux « en même temps »?

? Problème 158 - Changement d'ordre de l'addition des termes d'une série

Considérons la somme $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Notons, pour tout entier n, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$. Alors, on démontrera que (S_n) converge (vers $\ln 2$, par ailleurs).

Que pensez alors de la sommation suivante :

$$\begin{aligned} S &= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} - \tfrac{1}{12} + \dots \\ &= 1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{16} + \dots \\ &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{10} - \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{14} - \tfrac{1}{16} + \dots = \frac{1}{2} S \end{aligned}$$

Etonnant : $S = \frac{1}{2}S$, alors que $S = \ln 2$. Pourquoi?

Mieux : on peut même trouver n'importe quelle limite possible $\ell \in \mathbb{R}$, en changeant l'ordre de sommation. Comment démontrer ce résultat?

? Problème 159 - Ordre de calcul

On a vu dans le problème précédent que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ admet une limite, mais que si l'on change l'ordre du calcul, la valeur limite évolue.

Peut-on se débarrasser des problèmes du même genre : dépendance selon l'ordre de sommation? En particulier, en probabilité, il peut ne pas avoir d'ordre naturel entre les événements $[X = a]$ et donc les nombres $\mathbf{P}(X = a)$ pour $a \in A$, où $A = X(\Omega)$ est dénombrable (et X est une variable aléatoire). On aimerait que le résultat (qui conduit à l'espérance de X, par exemple) ne donne pas des nombres différents selon l'ordre de l'opération.

? Problème 160 - Structure d'espace vectoriel ?

Si deux familles sont sommables, en est-il de même de toutes combinaisons linéaires de ces familles? Et que dire de la somme de cette combinaison linéaire alors?

2. Somme de famille de réels positifs

Soit I un ensemble non vide et $\mathscr{P}_f(I)$, l'ensemble des parties finies de I.

2.1. Définition

Définition - Famille de réels positifs sommable
Une famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ de réels positifs ou nuls est dite sommable, si

$$\exists\, M \in \mathbb{R}+, \forall\, J \in \mathscr{P}_f(I), \sum_{i\in J} \alpha_i \leqslant M$$

Si tel est le cas, on définit et on note la somme de la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ par :

$$S_I(\alpha) := \sum_{i\in I} \alpha_i = \sup_{J\in\mathscr{P}_f(I)} \sum_{j\in J} \alpha_i$$

Si la famille n'est pas sommable, alors on pose $\sum_{i\in I} \alpha_i = +\infty$ (ce qui est bien la valeur de la borne supérieure...)

Remarque - Rappel
Une somme indexée par un ensemble vide existe et vaut 0.

Exemple - Cas I fini

Exercice
Supposons qu'il existe $a > 0$ tel que pour tout $i \in I$, $\alpha_i = a$.
Alors montrer que $(\alpha_i)_{i\in I}$ est sommable $\Longleftrightarrow$ I est fini.

2.2. Cas $I = \mathbb{N}$

Proposition - Cas $I = \mathbb{N}$. Les séries positifs
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.
En cas de sommabilité : $S_{\mathbb{N}}(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Démonstration

Remarque - Notation
Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, on peut noter sa sommes $S_I(u)$ ou bien $\sum_{i\in I} u$, il n'y a pas de contradiction lorsqu'on écrit quelque chose comme $\sum_{p\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$.
Cela peut tout autant désigner la limite de la série ou la somme de la famille sommable.

2.3. Cas $I = \mathbb{N}^2$

Savoir faire - Sous ensembles finis de $\mathbb{N}^2$
Se concentrer sur $[\![0, N]\!] \times [\![0, P]\!]$ car les familles sont à termes positifs.

Exercice

Montrer la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{p^2 q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$

Savoir faire - Montrer qu'une famille n'est pas sommable
Si l'on trouve une suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles finis de I tel que $S_n := \sum_{i\in J_n} u_i$ n'est pas majorée, alors nécessairement la suite n'est pas sommable.

Exercice

On cherche à étudier la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{p^2+q^2}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$

1. Par une comparaison série-intégrale, montrer que
$$\sum_{q=1}^{Q} \frac{1}{p^2+q^2} \geqslant \frac{1}{p}\left(\arctan\frac{Q+1}{p} - \arctan\frac{1}{p}\right)$$
2. Montrer alors que la suite $\left(\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{2p-1}\frac{1}{p^2+q^2}\right)_n$ n'est pas majorée.
3. Conclure

2.4. Comparaisons

Proposition - Comparaison des ensembles
Soit $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, une famille de réels positifs.
Supposons que $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille sommable
Soit $I' \subset I$.

Alors $(\alpha_i)_{i\in I'}$ est une famille sommable et $\sum_{i\in I'} \alpha_i \leqslant \sum_{i\in I} \alpha_i$.

Démonstration

Proposition - Comparaison de termes

Soit $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, une famille de réels positifs.
Soit $(\beta_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}_+^I$, une autre famille de réels positifs tels que : $\forall\, i \in I$, $(0 \leqslant)\beta_i \leqslant \alpha_i$.

• Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille est sommable, alors $(\beta_i)_{i\in I}$ est une famille est sommable.
Et $\sum_{i\in I} \beta_i \leqslant \sum_{i\in I} \alpha_i$.

• Si $(\beta_i)_{i\in I}$ n'est pas une famille sommable, alors $(\alpha_i)_{i\in I}$ n'est pas une famille sommable (contraposée).
Et $\sum_{i\in I} \beta_i = \sum_{i\in I} \alpha_i = +\infty$.

Démonstration

Théorème - I est au plus dénombrable

Si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une famille de réels positifs sommable, alors $I' = \{i \in I \mid \alpha_i > 0\}$ est au plus dénombrable.

Remarque - Rappels

On rappelle qu'un ensemble E est dénombrable s'il existe une bijection $\varphi : N \to E$.
Cette bijection permet d'indexer les éléments de E (i.e. les nommer, mais aussi les ordonner).
On dit qu'un ensemble est au plus dénombrable s'il est dénombrable ou fini.
Il suffit que E s'injecte dans $\mathbb{N}$ pour être au plus dénombrable (i.e : $\exists\, \psi : E \to \mathbb{N}$, injective.

Démonstration

Remarque - Intégration d'une fonction
Il est donc vain d'espérer intégrer une fonction sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (donc non dénombrable) en posant $\int_I f = \sum_{i\in I} f(i)$.

2.5. Sommation par suite croissante d'ensembles

A partir de maintenant, toutes les familles seront indexées par un ensemble au plus dénombrable, on le note D.

Théorème - Critère de sommabilité - Suite croissante de parties
Soit (D_n) une suite croissante de parties de D, de réunion : $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}^{\uparrow} D_n$.
On note : Soit $(u_d)_{d\in D} \in \mathbb{R}_+^D$, une famille de réels positifs.
(u_d) est sommable si et seulement si :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_d)_{d\in D_n}$ est sommable
2. $\left(\sum_{d\in D_n} u_d\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente (ici croissante majorée).

Si tel est le cas, alors on a : $\sum_{d\in D} u_d = \lim_{n\to+\infty} \sum_{d\in D_n} u_d$.

Remarque - D_n fini?
Si il est possible que pour tout $n \in \mathbb{N}$, D_n est fini; il est également tout à fait possible que pour tout $n \in \mathbb{N}$, D_n n'est pas fini... Dans le premier cas, on en tire un savoir-faire.

Démonstration

Savoir faire - Trouver une suite croissance d'ensembles d'indexation (fini)

Une stratégie classique consiste, dans le cas où D est dénombrable sans être fini à considérer : $\sigma : \mathbb{N} \to D$, une bijection.
Puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $D_n = \sigma([\![0, n]\!])$. On a $D = \bigcup\!\uparrow_{n\in\mathbb{N}} D_n$.

Savoir faire - Exploitation d'une suite croissante d'ensembles finis

Si $(D_n)_n$ est une suite croissante d'ensembles finis d'union D.
Alors toutes les sommes $S_n := \sum\limits_{d\in D_n} u_d$ sont finies et la suite (S_n) est croissante.
La convergence de S_n est équivalente à la sommabilité de (u_d) sur D.
Et on a $\lim(S_n) = \sup S_n = \sum\limits_{d\in D} u_d$.

Proposition - Invariance de la sommabilité et de la somme par permutation des indices

Soient D et D' deux ensembles au plus dénombrables.
Soit $(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$. S'il exite une bijection $\sigma : D' \to D$,
alors $(u_d)_{d\in D}$ est sommable $\iff (u_{\sigma(d')})_{d'\in D'}$ est sommable.
Et en cas de sommabilité $\sum\limits_{d\in D} u_d = \sum\limits_{d'\in D'} u_{\sigma(d')}$

Démonstration

Application - Série à termes positifs

Proposition - Sommabilité d'une combinaison linéaire
Soit D, un ensemble au plus dénombrable.
Soient $(u_d)_{d\in D}$ et $(v_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$ deux familles de réels positifs, sommables.
Alors $(u_d+v_d)_{d\in D}$ et $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}_+$, $(\lambda u_d)_{d\in D}$ sont sommables.
Et $\sum_{d\in D}(u_d+v_d) = \sum_{d\in D} u_d + \sum_{d\in D} v_d$ et $\sum_{d\in D} \lambda u_d = \lambda \sum_{d\in D} u_d$.

Démonstration

2.6. Sommation par paquets et théorème de Fubini

Remarque - Rappel : sommation finie par paquets

On suppose que I (fini) s'écrit $I = \biguplus_{k=1}^{n} A_k$.

Alors $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i\in A_k} a_i\right)$.

Théorème - Sommation par paquets
Soit $(P_i)_{i\in I}$ une partition de D (i.e. $D = \biguplus_{i\in I} P_i$).
Soit $(u_d) \in (\mathbb{R}_+)^D$.
$(u_d)_{d\in D}$ est sommable si et seulement si

$$\begin{cases} \forall\ i \in I,\ (u_d)_{d\in P_i} \text{ est sommable,} \\ \text{puis la famille } \left(\sum_{d\in P_i} u_d\right)_{i\in I} \in (\mathbb{R}_+)^I \text{ est sommable} \end{cases}$$

Dans ce cas, on a alors : $\sum_{d\in D} u_d = \sum_{i\in I}\left(\sum_{d\in P_i} u_d\right)$.

Remarque - I au plus dénombrable
Notons que I est au plus dénombrable. Il peut être fini, même si D est dénombrable.

Démonstration

Remarque - Avec l'ordre sur $\mathbb{N}$
Si la partition est directement indexée par $\mathbb{N}$ (ou une partie finie), i.e $I \subset \mathbb{N}$, alors on peut profiter de la relation d'ordre induite et considérer $D_k = \bigcup_{i=0}^{k} P_i$, on a alors (D_k) suite croissante convergent vers D.
On peut alors exploiter directement le théorème de suites croissantes d'ensemble.

Savoir faire - Application du théorème de sommation par paquets avec $I=\mathbb{N}$

Si $D = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} P_n$.

$(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$ est sommable si et seulement si :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(u_d)_{d\in P_n}$ est sommable,
2. puis $\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{d\in P_n} u_d\right)$ converge (série à termes positifs).

Et dans ce cas : $\sum_{d\in D} u_d = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{d\in P_n} u_d$.

Exemple - Sommabilité de $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$

Le théorème suivant apparait alors comme un corollaire :

Théorème - Fubini - suites doubles positifs indexées sur $\mathbb{N}^2$

Considérons une suite doublement indexée de réels positifs $(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.
$(u_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si

1. pour tout $p \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{q\geqslant 0} u_{p,q}$ converge
2. puis la série $\sum_{p\geqslant 0}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ converge

ou bien, si et seulement si

1. pour tout $q \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{p\geqslant 0} u_{p,q}$ converge
2. puis la série $\sum_{q\geqslant 0}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right)$ converge

On a alors

$$\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q} = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{q=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} u_{p,q}\right)$$

Remarque - Indice de la somme
Evidemment, le résultat s'adapte (comme dans l'exemple précédent), en prenant une partie de $\mathbb{N}^2$ qui ne « commencent » pas en $(0,0)$...

Démonstration

Exercice

1. Etudier la sommabilité de $\left(\dfrac{1}{(pq)^\alpha}\right)_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.
   Dans le cas sommable, donner la valeur de la somme.
2. Si on note $d(n)$, le nombre de diviseurs de n, montrer alors que cette somme vaut $\sum\limits_{n=1} \dfrac{d(n)}{n^\alpha}$.

Théorème - Fubini - suites doubles positifs indexées sur un produit cartésien
Considérons une suite doublement indexée de réels positifs $(u_{d,d'})_{(d,d')\in D\times D'}$.
$(u_{d,d'})_{(d,d')\in D\times D'}$ est sommable si et seulement si

1. pour tout $d\in D$, la famille $(u_{d,d'})_{d'\in D'}$ est sommable de somme s_d
2. puis la famille $(s_d)_{d\in D}$ est sommable.

ou bien, si et seulement si

1. pour tout $d'\in D'$, la famille $(u_{d,d'})_{d\in D}$ est sommable de somme $s_{d'}$
2. puis la famille $(s_{d'})_{d'\in D'}$ est sommable.

On a alors

$$\sum_{(d,d')\in D\times D'} u_{d,d'} = \sum_{d\in D}\left(\sum_{d'\in D'} u_{d,d'}\right) = \sum_{d'\in D'}\left(\sum_{d\in D} u_{d,d'}\right)$$

Démonstration

Corollaire - Produit
Si $(u_d)_{d\in D}\in(\mathbb{R}_+)^D$ et $(v_{d'})_{d'\in D'}\in(R_+)^{D'}$ sont deux familles sommables, alors $(u_d v_{d'})_{(d,d')\in D\times D'}$ est sommable. Et

$$\sum_{(d,d')\in D\times D'} u_d v_{d'} = \sum_{d\in D} u_d \times \sum_{d'\in D'} v_{d'}$$

Démonstration

Remarque - La réciproque est fausse

Par exemple avec $u_n = 0$ et $v_n = \dfrac{1}{n+1}$.
Mais si les familles sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, alors la réciproque devient vraie

2.7. Enoncé dans $\overline{\mathbb{R}_+} = [0, +\infty]$

Remarque - Convention

Soit $(u_d)_{d\in D}$ une famille d'éléments de $\overline{R_+}$.
On note par convention $\sum\limits_{d\in D} u_d = +\infty$ si il existe $d \in D$ tel que $u_d = \infty$, ou si $(u_d)_{d\in D}$ n'est pas sommable.

> **Théorème - Sommation par paquets dans $\mathbb{R}_+$ - cas général**
>
> Soit $(P_i)_{i\in I}$ une partition de l'ensemble D (i.e. $D = \biguplus\limits_{i\in I} P_i$).
>
> Pour toute famille $(u_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$, on a :
>
> $$\sum_{d\in D} u_d = \sum_{i\in I}\left(\sum_{d\in P_i} u_d\right) \qquad \text{(égalité dans } \overline{\mathbb{R}}\text{)}$$
>
> que la famille $(u_d)_{d\in D}$ soit sommable ou non (fini ou non).

Démonstration

Savoir faire - Etude d'une famille sommable

On se place dans $\overline{\mathbb{R}}$, on peut donc calculer d'abord la somme.
(Si besoin, on ajoute : « sous réserve de convergence »).
Et on tire la conclusion selon la valeur de la somme : $S \in \mathbb{R}_+$ ou $S = +\infty$.
Les méthodes s'adaptent.

3. Familles complexes sommables

3.1. Définition

On considère des nombres à valeurs dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ (total !).
On suppose également que D (ensemble des indices) est un ensemble au plus dénombrable, non vide.

Définition - Famille complexe sommable
Une famille $(z_d)_{d\in D} \in \mathbb{K}^D$ est dite sommable si la famille de réels positifs $(|z_d|)_{d\in D}$ est sommable.
On note $\ell^1(D,\mathbb{K})$, l'ensemble des familles sommables indexées sur D et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Application - Cas des suites indexées sur $\mathbb{N}$

Exemple - Famille non sommable et série (semi-)convergente

Savoir faire - Montrer la sommabilité d'une famille de réels ou de complexes

> On montre la sommabilité de la famille des valeurs absolues, respectivement modules.
> On commence donc toujours par considérer $(|z_d|)_{d\in D}$.

Exercice
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Etudier la sommabilité de $(z^{pq})_{(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2}$.

3.2. Critère de sommabilité et calcul de somme

Remarque - Rappels
Pour les encadrements (voire les équivalences), on exploite souvent les relations :

— Si $x \in \mathbb{R}$: $|x| = \max(x,-x)(\geqslant 0)$, $x^+ := \max(x,0) = x\mathbb{1}_{x\geqslant 0}(\geqslant 0)$ et $x^- := \max(0,-x) = -x\mathbb{1}_{x\leqslant 0}(\geqslant 0)$.
On a alors $|x| = x^+ + x^-$, $x = x^+ - x^-$ et les équivalences : $x \geqslant 0 \Leftrightarrow x^- = 0 \Leftrightarrow x = x^+$ et $x \leqslant 0 \Leftrightarrow x^+ = 0 \Leftrightarrow x = x^-$

— Si $z \in \mathbb{C}$, $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$, et les équivalence
$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \mathrm{Re}(z)$ et $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z = \mathrm{Im}(z)$.
On peut donc couper z en l'addition de 4 nombres réels positifs (dont deux multipliés par i).
Et $\left.\begin{array}{r}\mathrm{Re}(z)\\ \mathrm{Im}(z)\end{array}\right\} \leqslant |z| = \sqrt{\mathrm{Re}^2(z)+\mathrm{Im}^2(z)} \leqslant \mathrm{Re}(z)+\mathrm{Im}(z)$.

Savoir faire - Décomposition en « morceaux »

> $(x_d) \in (\mathbb{R})^D$ est sommable $\Longleftrightarrow$ $(x_d^+)_{d\in D}$ et $(x_d^-)_{d\in D}$ sont sommables.
> $(z_d) \in (\mathbb{C})^D$ est sommable $\Longleftrightarrow$ $(\mathrm{Re}(z_d))_{d\in D}$ et $(\mathrm{Im}(z_d))_{d\in D}$ sont sommables.

Proposition - Critères de sommabilité
Soient $(x_d)_{d\in D} \in (\mathbb{R}_+)^D$ et $(z_d)_{d\in D} \in \mathbb{C}^D$, deux familles.
Si on a $\forall\ d \in D, |z_d| \leqslant x_d$ et $(x_d)_{d\in D}$ sommable,
alors $(z_d)_{d\in D}$ sommable.

Ce qui se convertit en un second savoir-faire qu'on exploite très fréquemment (une condition suffisante, seulement) :

Savoir faire - Sommabilité par majoration
$\forall\ d \in D, |z_d| \leqslant x_d$ et $(x_d)_{d\in D}$ sommable $\Longrightarrow (z_d)_{d\in D}$ est sommable.

Démonstration

Définition - Somme d'une famille sommable
Soit $(x_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{R})$ une famille de réels, sommable.
On pose alors $\sum\limits_{d\in D} x_d = \sum\limits_{d\in D} x_d^+ - \sum\limits_{d\in D} x_d^-$.
Soit $(z_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{C})$ une famille de complexes, sommable.
On pose alors

$$\begin{aligned}\sum_{d\in D} z_d &= \sum_{d\in D} \mathrm{Re}(z_d) + i \sum_{d\in D} \mathrm{Im}(z_d)\\ &= \sum_{d\in D} \mathrm{Re}(z_d)^+ - \sum_{d\in D} \mathrm{Re}(z_d)^- + i \sum_{d\in D} \mathrm{Im}(z_d)^+ - i \sum_{d\in D} \mathrm{Im}(z_d)^-\end{aligned}$$

Remarque - Elargissement
Ces définitions élargissent bien les définitions précédentes.

3.3. Espace vectoriel $\ell^1(D,\mathbb{K})$

Remarque - Addition
On a vu que si $(a_d)_{d\in\mathbb{D}}$ et $(b_d)_{d\in\mathbb{D}}$ sont positifs et sommables et $\lambda > 0$, alors $(\lambda a_d + \mu b_d)_{d\in D}$ est sommable. Et $\sum\limits_{d\in D} \lambda a_d + \mu b_d = \lambda \sum\limits_{d\in D} a_d + \mu \sum\limits_{d\in D} b_d$.
Qu'en est-il si $\mu < 0$ ou (a_d) pas toujours positif?

Application - Montrer que $\sum\limits_{d\in D} (a_d - b_d) = \sum\limits_{d\in D} a_d - \sum\limits_{d\in D} b_d$ (avec $a_d, b_d \in \mathbb{R}$)

Proposition - Espace vectoriel
$\ell^1(D,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}^D,+,\cdot)$.
C'est-à-dire, si $\lambda,\lambda'\in\mathbb{K}$ et $(z_d)_{d\in D}$, $(z'_d)_{d\in D}$ sommables,
alors $(\lambda z_d+\lambda' z'_d)_{d\in D}$ est sommable. Et

$$\sum_{d\in D}\lambda z_d+\lambda' z'_d=\lambda\sum_{d\in D}z_d+\lambda'\sum_{d\in D}z'_d$$

Démonstration

3.4. Transfert de propriétés sur $\ell^1(D,\mathbb{K})$

Proposition - Réduction de la famille d'indexation
Si $(z_d)_{d\in D}\in\ell^1(D,\mathbb{K})$ et $D'\subset D$, alors $(z_d)_{d\in D'}\in\ell^1(D',\mathbb{K})$

Démonstration

Remarque - Comparaison des valeurs des sommes
Cela n'a pas de sens, car ce sont des nombres complexes à ce niveau là...
Notons pour la propriété suivante, qu'il s'agit d'une implication et non d'une équivalence pour démontrer la sommabilité.
Elle donne, en revanche, dès que la sommabilité est assurée, une façon simple de calculer la somme.

Pour aller plus loin - Et le produit direct ?
En fait, il s'agit plutôt du produit scalaire.
On exploite l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour tout famille finie $J\subset D$:

$$\sum_{d\in J}|z_d z'_d|\leqslant\sqrt{\sum_{d\in J}|z_d|^2\sum_{d\in J}|z'_d|^2}$$

Il suffit plutôt donc que $(z_d)_{d\in D}$ et $(z'_d)_{d\in D}\in\ell^2(D,\mathbb{K})$.

Proposition - Suite croissante d'ensembles donnant D

Soit $(z_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{K})$. Supposons que $D = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} D_n$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(z_d)_{d\in D_n} \in \ell^1(D_n,\mathbb{K})$ et $\sum_{d\in D} z_d = \lim_{n\to+\infty} \sum_{d\in D_n} z_d$.

Démonstration

Attention - La réciproque est fausse

A bien avoir en tête.
$\mathbb{N}^* = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} [[1,n]]$ et $x_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(x_k)_{k\in[[1,n]]}$ est sommable.
Et la somme $\sum_{k\in[[1,n]]} x_k$ admet une limite : $\ln 2 \in \mathbb{R}$.
Et pourtant, la famille $(x_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.
Finalement, la réciproque est vraie que pour des familles à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, (ou que dans $\mathbb{R}_-$...). La sommabilité est plus exigeante que la convergence... (comme pour les intégrales)

Savoir faire - Utiliser la propriété des suites croissantes d'ensemble pour calculer une somme (1)

On a vu que D était au plus dénombrable.
- Si D est fini, les calculs numériques sont simples.
- Si D est infini, il existe $\varphi : \mathbb{N} \to D$ bijective. On note alors $D_n = \varphi([[0,n]])$
  On a donc $D = \biguplus D_n$ et chaque D_n est fini.
  On exploite alors $\sum_{d\in D} z_d = \lim_{n\to+\infty} \sum_{d\in D_n} z_d$.

Application - Cas d'une somme sur $\mathbb{N}$

Théorème - Calcul de la somme avec indexation entière
Soit $\sigma : D' \to D$ une bijection. Soit $(z_d)_{d\in D} \in \mathbb{K}^D$.
on a $(z_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{K}) \iff (z_{\sigma(d')})_{d'\in D'} \in \ell^1(D',\mathbb{K})$.
En cas de sommabilité, on a $\sum_{d\in D} z_d = \sum_{d'\in D'} z_{\sigma(d')}$.

Corollaire - Version avec $D = \mathbb{N}$
Si $(z_n) \in \mathbb{C}^N$ et si $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_n$ est absolument convergente,
Alors pour tout $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$, $\sum_{n\in\mathbb{N}} z_{\sigma(n)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} z_n = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n$.

Démonstration

On peut compléter le savoir-faire précédent, avec, en plus, un changement de variables.

Savoir faire - Utiliser la propriété des suites croissantes d'ensemble pour calculer une somme (2)
On suppose que D est dénombrable, on reprend $\varphi : \mathbb{N} \to D$ bijective et $D_n = \varphi([\![0, n]\!])$
On a : $\sum_{d\in D} z_d = \lim_{n\to+\infty} \sum_{d\in D_n} z_d = \sum_{n=0}^{+\infty} z_{\varphi(n)}$.

Corollaire - La somme comme une forme linéaire
L'application $\ell^1(D,\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $(z_d)_{d\in D} \mapsto \sum_{d\in D} z_d$ est une forme linéaire.
Et pour tout $(z_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{K})$, on a $\left|\sum_{d\in D} z_d\right| \leqslant \sum_{d\in D} |z_d|$.

Démonstration

3.5. Sommation par paquets et Fubini

Théorème - Sommation par paquets dans $\mathbb{K}$ - cas général
Soit $(P_i)_{i\in I}$ une partition de l'ensemble D.
Soit $(z_d)_{d\in D} \in (\mathbb{K})^D$, on a :
$(z_d)_{d\in D}$ est sommable si et seulement si :

$$\begin{cases} 1.\ \text{Pour tout } i \in I,\ (|z_d|)_{d\in P_i} \text{ est sommable, on note } S_i^{va} \text{ sa somme} \\ 2.\ (S_i^{va})_{i\in I} := \left(\sum_{d\in P_i} |z_d|\right)_{i\in I} \text{ est une famille sommable.} \end{cases}$$

En cas de sommabilité :

$$\sum_{d\in D} z_d = \sum_{i\in I}\left(\sum_{d\in P_i} z_d\right)$$

Démonstration

Exercice

Faire la démonstration en démontrant que I est dénombrable donc de la forme $\{i_1, \ldots i_n \ldots\}$, puis en considérant $D_n = \cup_{i=1}^n P_i$ (réunion disjointe) donc (D_n) est une suite croissante...

Application - Somme sur $\mathbb{Z}$

Attention - Pas de sommablité par la somme
Il faut bien s'assurer d'abord de la sommabilité avant le calcul.
La famille $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall\ n \in \mathbb{N}^*,\ z_n = 1$ et $z_{-n} = -1$, et $z_0 = 0$ vérifie $\sum_{k=-n}^{n} z_k = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Et pourtant cette famille $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable.

Reprenons un calcul précédent :

Exercice

On considère $r \in [0,1[$, $\theta \in [0,2\pi[$ et $z_n = r^n e^{in\theta}$ si $n \leqslant 0$, $z_n = r^{-n} e^{in\theta}$ si $n > 0$.

1. Montrer que $(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable.
2. Calculer $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} z_n$.

Théorème - Fubini - suites doubles complexes indexées sur un produit cartésien

Considérons une suite numérique doublement indexée $(z_{d,d'})_{(d,d')\in D\times D'}$.
$(z_{d,d'})_{(d,d')\in D\times D'}$ est sommable si et seulement si

1. pour tout $d \in D$, la famille $(z_{d,d'})_{d'\in D'}$ est sommable
2. puis la famille $\left(\sum\limits_{d'} |z_{d,d'}|\right)_{d\in D}$ est sommable.

On a alors

$$\sum_{(d,d')\in D\times D'} z_{d,d'} = \sum_{d\in D}\left(\sum_{d'\in D'} z_{d,d'}\right) = \sum_{d'\in D'}\left(\sum_{d\in D} z_{d,d'}\right)$$

Démonstration

Deux cas d'application en particulier :

Proposition - Produit de termes

Soient $(z_d)_{d\in D} \in \ell^1(D,\mathbb{C})$ et $(z'_{d'})_{d'\in D'} \in \ell^1(D',\mathbb{C})$.

Alors $(z_d z'_{d'})_{(d,d')\in D\times D'} \in \mathbb{C}^{D\times D'}$ est sommable.

Et $\sum\limits_{(d,d')\in D\times D'} z_d z'_{d'} = \left(\sum\limits_{d\in D} z_d\right)\times\left(\sum\limits_{d'\in D'} z'_{d'}\right)$.

Exercice

Faire la démonstration

Proposition - Fubini complexe indexé sur $\mathbb{N}$

Soit $(z_{(p,q)})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}^2}$.
$(z_{p,q})_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si et seulement si

$$\begin{cases} \text{1. Pour tout } p\in\mathbb{N}, \text{ la série } \sum\limits_{q\geqslant 0} |z_{p,q}| \text{ converge} \\ \text{2. La série } \sum\limits_{p\geqslant 0}\left(\sum\limits_{q=0}^{+\infty} |z_{p,q}|\right) \text{ converge.} \end{cases}$$

Et on a alors $\sum\limits_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} z_{p,q} = \sum\limits_{p=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{q=0}^{+\infty} z_{p,q}\right) = \sum\limits_{q=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{p=0}^{+\infty} z_{p,q}\right)$.

On peut arbitrairement faire l'interversion $p \leftrightarrow q$.
Exercice
Faire la démonstration

Exemple - Convergence et somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^{n+1}}}$

3.6. Application : Produit de Cauchy

Définition - Produit de Cauchy
Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes.
Le produit de Cauchy des deux séries $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n$ est la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n$,

avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{h=0}^{n} a_h b_{n-h}$.

Proposition - Produit de séries absolument convergentes
Soient $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries absolument convergentes,

alors leur produit de Cauchy $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} c_n$ est une série abs. convergente.

Et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \times \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$.

Démonstration

Exemple - Exponentielle

Application - Formule du binôme négative

Pour aller plus loin - A démontrer autrement
Ou bien par dénombrement directement.
Ou bien avec la formule de Newton et une puissance entière négative...

Attention - Cas de non convergence absolue

Considérons $a_n = b_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$.

Les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont semi-convergence (critère de Leibniz), i.e. convergentes mais non absolument convergentes.

Le produit de Cauchy donne $c_n = \displaystyle\sum_{h=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\sqrt{(h+1)(n-h+1)}}$.

Or $x \mapsto (x+1)(n+1-x)$ est maximal en $x = \frac{n}{2}$ et vaut $(\frac{n}{2}+1)^2$.

d'où $|c_n| \geqslant (n+1)\dfrac{2}{n+2} \geqslant 1$, donc $\sum c_n$ diverge grossièrement : la famille $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas sommable.

4. Bilan

Synthèse

- Une famille de nombres positif indexé par I est sommable si l'ensemble des sommes possibles sur une partie finie de I est majorée. La somme est alors égale à la borne supérieure.
  Nécessairement : la famille I est dénombrable, si $I \subset \mathbb{N}$, alors cela est équivalent à l'absolue convergence de la série.
  On a deux autres stratégies pour montrer la sommabilité : la sommation par paquets, ou la sommation par suite croissante d'ensembles.
- Dans le cas de famille sommable de termes positifs, tout se passe parfaitement : linéarité, changement d'ordre de sommation, et Fubini !
  On a même, dans ce cas, une stratégie « idéale ». Sans se poser de question, on se place dans $\overline{R}$ et on calcule la somme des termes (dans l'ordre qui nous arrange) ; si la somme est un nombre réel, alors la famille est sommable (on peut appliquer alors Fubini...) ; sinon la somme vaut $+\infty$ et la famille n'est pas sommable.
- Dans le cas des familles de nombres (u_n) réels ou complexes, on étudie la sommabilité par l'étude du module de (u_n). Il est nécessaire et suffisant d'étudier (u_n^+) et (u_n^-) (voire les parties réelles et imaginaires).
  Quand la famille est sommable, on peut alors effectuer une sommation par paquets (ensembles disjoints) ou faire des interversions d'ordre de somme (Fubini - c'est le cas pour le produit de Cauchy, par exemple).

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- Savoir-faire - Sous-ensembles finis de $\mathbb{N}^2$
- Savoir-faire - Montrer qu'une famille n'est pas sommable
- Savoir-faire - Trouver une suite croissance d'ensemble d'indexation (fini)
- Savoir-faire - Exploitation d'une suite croissante d'ensembles finis
- Savoir-faire - Application du théorème de sommation par paquets avec $I = \mathbb{N}$
- Savoir-faire - Etude d'une famille sommable
- Savoir-faire - Montrer la sommabilité d'une famille de réels ou de complexes
- Savoir-faire - Décomposition en morceaux
- Savoir-faire - Sommabilité par majoration
- Savoir-faire - Utiliser la propriété des suites croissantes d'ensemble pour calculer une somme (1)
- Savoir-faire - Utiliser la propriété des suites croissantes d'ensemble pour calculer une somme (2)

Notations

Notations	*Définitions*	*Propriétés*	*Remarques*
$\mathscr{P}_f(I)$	Ensemble des parties (ou sous-ensembles) finis de I		
$D = \uparrow\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$	$(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de parties de D de réunion égal à D	$\forall\ n \in \mathbb{N}$, $D_n \subset D_{n+1}$ et $\forall\ x \in D$, $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in D_n$	Si $(u_d)_{d\in D}$ sommable, alors : $\sum\limits_{d\in D} u_d = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{d\in D_n} u_d\right)$
$D = \biguplus\limits_{i\in I} P_i$	$(P_i)_{i\in I}$ est une partition de D	$\forall\ x \in D$, $\exists!i \in I$ tel que $x \in P_i$ et $\forall\ i \in I$, $P_i \subset D$.	Si $(u_d)_{d\in D}$ sommable : $\sum\limits_{d\in D} u_d = \sum\limits_{d\in \biguplus_{i\in I}} u_d = \sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{d\in P_i} u_d$
$\ell_1(D, A)$ (avec $A = \mathbb{R}_+, \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)	Espace vectoriel des familles de nombres de A, indexés par D et sommables		

Retour sur les problèmes

133. Cours
134. Cours
135. Cours
136. Cours