Pour le 21.03.17

Devoir à la maison n°8
CORRECTION

Exercice

On désigne par a et b deux réels distincts et soit ϕ l'application de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^4$ qui à tout polynôme P associe le quadruplet $(P(a), P'(a), P(b), P'(b))$.

1. ϕ est linéaire :

$$\begin{aligned}\forall\ P,Q \in \mathbb{R}_3[X], \lambda,\mu\in\mathbb{R}, \quad \phi(\lambda P+\mu Q) &= \big((\lambda P+\mu Q)(a), (\lambda P+\mu Q)'(a), (\lambda P+\mu Q)(b), (\lambda P+\mu Q)'(b)\big)\\ &= \lambda(P(a),P'(a),P(b),P'(b)) + \mu(Q(a),Q'(a),Q(b),Q'(b))\end{aligned}$$

par linéarité de la dérivation et de l'application de substitution Par ailleurs, $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$. Il suffit donc de démontrer que ϕ est injective pour affirmer qu'elle est bijective.
Or

$$\begin{aligned}P\in \text{Ker }\Phi &\iff P(a)=P'(a)=P(b)=P'(b)=0 \iff a,b \text{ racines doubles de } P\\ &\iff (X-a)^2(X-b)^2|P \iff P=0(\text{ car } \deg P\leqslant 3)\end{aligned}$$

Donc Ker $\phi=\{0\}$, ϕ est injective, donc ϕest bijective.

$$\boxed{\phi \text{ est un isomorphisme de } \mathbb{R}_3[X] \text{ dans } \mathbb{R}^4.}$$

2. La base canonique de $\mathbb{R}^4$ est noté ici (e_1,e_2,e_3,e_4).
On cherche donc $P_i\in\mathbb{R}_3[X]$ (unique puisque ϕ bijective) tel que $\phi(P_i)=e_i$.
Donc

$$P_1(a)=1, P_1'(a)=P_1(b)=P_1'(b)=0$$

ainsi $(X-b)^2|P_1$ et donc il existe r et s tels que $P_1=(X-b)^2(rX+s)$.
Puis $P'=2(X-b)(rX+s)+r(X-b)^2$, donc $P'(a)=(a-b)[2(ra+s)+r(a-b)]=(a-b)(r(3a-b)+2s)=0$ donc $(3a-b)r+2s=0$.
Enfin $P(a)=1$, donc $(a-b)^2(ra+s)=1$ et ainsi $a(a-b)^2r+(a-b)^2s=1$.
On obtient un système de deux équations à deux inconnues r et s, que l'on résout par les formules de Cramer :

$$\left\{\begin{array}{lll}(3a-b)r & +2s & =0\\ a(a-b)^2r & (a-b)^2s & =0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} r & = & \dfrac{-2}{(a-b)^3}\\ s & = & \dfrac{3a-b}{(a-b)^3}\end{array}\right.$$

Donc $P_1=\dfrac{1}{(a-b)^3}(X-b)^2(-2X+(3a-b))$.
Le calcul de P_3 est identique, mais les rôles de a et b sont inversés : $P_3=\dfrac{1}{(b-a)^3}(X-a)^2(-2X+(3b-a))$.
On cherche maintenant P_2

$$P_2'(a)=1, P_2(a)=P_2(b)=P_2'(b)=0$$

ainsi $(X-a)(X-b)^2|P_2$ et donc il existe t tel que $P_2=t(X-a)(X-b)^2$.
Puis comme $P_2'(X)=t[(X-b)^2+2(X-a)(X-b)]=t(X-b)(3X-b-2a)$, donc $P'(a)=1=t(a-b)^2$
Donc $P_2=\dfrac{1}{(a-b)^2}(X-a)(X-b)^2$.
Le calcul de P_4 est identique, mais les rôles de a et b sont inversés : $P_4=\dfrac{1}{(b-a)^2}(X-b)(X-a)^2$.
L'image réciproque de la base canonique est

$$\boxed{\begin{array}{ll} P_1=\dfrac{1}{(a-b)^3}(X-b)^2(-2X+(3a-b)) & P_2=\dfrac{1}{(a-b)^2}(X-a)(X-b)^2\\ P_3=\dfrac{1}{(b-a)^3}(X-a)^2(-2X+(3b-a)) & P_4=\dfrac{1}{(b-a)^2}(X-b)(X-a)^2\end{array}}$$

3. On cherche une solution en exploitant les polynômes P_i précédents, on prendra $a = 2$ et $b = 1$:

$$P(2) = 3, P'(2) = 1, P(1) = 2, P'(1) = 4 \iff \phi(P) = (3, 1, 2, 4) = 3\phi(P_1)+1\phi(P_2)+2\phi(P_3)+4\phi(P_4)$$

$$\iff \phi(P) = \phi(3P_1 + P_2 + 2P_3 + 4P_4),$$

par linéarité. Donc $3P_1 + P_2 + 2P_3 + 4P_4$ est une solution particulière du problème.

$$\begin{aligned} 3P_1 + P_2 + 2P_3 + 4P_4 = &\ 3\frac{1}{(2-1)^3}(X-1)^2(-2X+5) + \frac{1}{(2-1)^2}(X-2)(X-1)^2 \\ &+ 2\frac{1}{(1-2)^3}(X-2)^2(-2X+1) + 4\frac{1}{(1-2)^2}(X-1)(X-2)^2 \\ = &\ (X-1)^2[-6X+15+X-2] + (X-2)^2[4X-2+4X-4] \\ = &\ (X^2-2X+1)(-5X+13) + (X^2-4X+4)(8X-6) \\ = &\ (-5X^3+23X^2-31X+13) + (8X^3-38X^2+56X-24) \\ = &\ 3X^3-15X^2+25X-11 \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme ϕ est linéaire, le problème est linéaire.
La solution est donc un espace affine, obtenu en prenant $P + \text{Ker}\ \overline{\phi}$, où $\overline{\phi}$ est l'extension de ϕ sur $\mathbb{R}[X]$.

$$\text{Ker}\ \overline{\phi} = \{Q \mid \overline{\phi}(Q) = 0\} = \{Q \mid (X-2)^2(X-1)^2|Q\} = [(X-2)^2(X-1)^2] \times \mathbb{R}[X]$$

(on rappelle que $a = 2$ et $b = 1$).
Ainsi

$$\boxed{\text{les polynômes } P \text{ vérifiant } P(2)=3, P'(2)=1, P(1)=2, P'(1)=4 \text{ sont les polynômes } (X-2)^2(X-1)^2 \times Q + 3X^3 - 15X^2 + 25X - 11, \text{ où } Q \in \mathbb{R}[X]}$$

Problème - Combien de façon de lacer ses chaussures ?

Le but de ce problème est d'étudier le nombre de façons différentes de lacer des chaussures.

A. Exemples

1. La liste $L = (1_G, 2_D, 3_D, 6_D, 2_G, 3_G, 4_G, 4_D, 5_G, 5_D, 1_D, 6_G)$ n'est pas acceptable puisqu'il s'y succède (à deux reprises) trois oeillets situés du même côté (souligné) :

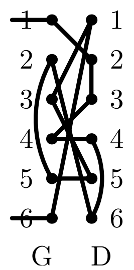
$$L = (1_G, \underline{2_D, 3_D, 6_D}, \underline{2_G, 3_G, 4_G}, 4_D, 5_G, 5_D, 1_D, 6_G)$$

Cela est contradictoire avec l'hypothèse de l'énoncé : *chaque oeillet d'une série (hormis le premier et le dernier) est relié à au moins un oeillet de l'autre série.*

$$\boxed{\text{Ainsi, les oeilets } 3_D \text{ et } 3_G \text{ ne respectent pas la consigne.}}$$

Pour rendre acceptable cette liste, nous pouvons ou bien permuter 3_D et 3_G ou bien permuter 6_D et 2_D.

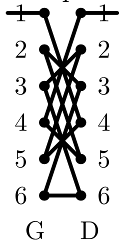
$$\boxed{\text{Nous obtiendrions la liste } L' = (1_G, 2_D, 3_D, 2_G, 6_D, 3_G, 4_G, 4_D, 5_G, 5_D, 1_D, 6_G)}$$



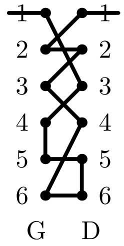
2. Pour ces deux listes (différentes) nous obtenons la même configuration :
(A noter qu'il n'est pas nécessaire que le début et la fin du laçage soit à un endroit précis)
La raison de cette double liste pour une même configuration est due au fait que pour chaque laçage, il existe deux façons de parcourir le trajet des oeillets. Ces deux façons conduisent à deux listes, chacune est le miroir de l'autre ; c'est pourquoi on parle de relation palindromique (on peut définir une relation d'équivalence et partitionner alors par les classes d'équivalence associées). Ces classes d'équivalence contiennent chacune deux éléments.

$$\boxed{\text{Lorsque nous compterons les laçage, il faudra penser à diviser par deux}}$$

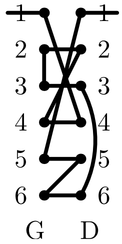
3. Nous allons ici faire la représentation du laçage associé à la liste, afin de mieux comprendre les quatre familles étudiées par l'énoncé.



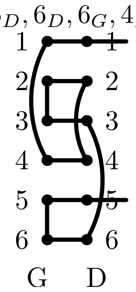
Laçage dense ou compact
$(1_G, 4_D, 5_G, 2_D, 3_G, 6_D, 6_G, 3_D, 2_G, 5_D, 4_G, 1_D)$



Laçage simple
$(1_G, 3_D, 4_G, 5_G, 5_D, 6_D, 6_G, 4_D, 3_G, 2_D, 2_G, 1_D)$



Laçage droit
$(1_G, 4_D, 4_G, 2_D, 2_G, 3_G, 3_D, 6_D, 6_G, 5_D, 5_G, 1_D)$



Laçage superdroit
$(1_D, 1_G, 4_G, 4_D, 2_D, 2_G, 3_G, 3_D, 6_D, 6_G, 5_G, 5_D)$

B. Laçages droits

On cherche dans cette partie à dénombrer le nombre de laçages droits et superdroits.

1. (a) Pour montrer ce résultat, nous allons travailler en deux temps :

(1) toutes listes obtenues par la décomposition proposée est une liste de laçage droit,

(2) et réciproquement toute liste de laçage droit se décompose ainsi.

Considérons une permutation de l'ensemble E, on peut la noter $\ell' = (i_1, i_2, \dots i_n)$, où i_k est un entier de E différent des autres.
Associons alors à chacun des i_k une lettre $A_k \in \{G, D\}$,
Nous noterons B_k, la lettre complémentaire de A_k dans $\{G, D\}$.
Enfin, indiquons si le second oeillet est à la même hauteur que le premier.
Nous créons ainsi deux listes précises : $\ell_1 = (i_{1A_1}, i_{1B_1}, i_{2A_2}, i_{2B_2}, \dots i_{nA_n}, i_{nB_n})$ (même hauteur), ou $\ell_2 = (i_{1A_1}, i_{2A_2}, i_{2B_2}, \dots i_{nA_n}, i_{nB_n}, i_{1B_1},)$ (hauteur différente).
Par construction,

— dans le premier cas, les oeillets $(2k-1)^{\text{e}}$ position et $(2k)^{\text{e}}$ position sont à la même hauteur donc cette liste représente un laçage droit (pour tout $k \in [\![1, n]\!]$)

— dans le second cas, les oeillets en $(2k)^{\text{e}}$ position et $(2k+1)^{\text{e}}$ position sont à la même hauteur donc cette liste représente un laçage droit (pour tout $k \in [\![1, n]\!]$).

Ainsi, en appliquant la décomposition de l'énoncé, on obtient bien une liste représentant un laçage droit.

Réciproquement, montrons que toute liste de laçage droit se décompose ainsi.
Soit L, une liste de laçage droit. Il y a deux possibilités :

— ou bien les deux premiers oeillets sont à la même hauteur (cas 1)

— ou bien les deux premiers oeillets sont à des hauteurs différentes (cas 2)

Dans le premier cas, nécessairement, le troisième oeillet est d'une hauteur différente que le deuxième (qui est à la hauteur du premier) et donc le quatrième est à la même hauteur que le troisième (puisque le laçage est droit)...Et par récurrence, dans la liste L ainsi obtenue, chaque hauteur est visitée une seule fois, formant ainsi une permutation de l'ensemble E. Puis, pour chaque hauteur, il faut définir lequel des deux oeillets (droit ou gauche) est visité en premier. Ainsi dans ce cas, la liste L se décompose comme indiqué dans l'énoncé.
Dans le deuxième cas, nécessairement, le troisième oeillet est de la même hauteur le deuxième (sinon le laçage ne serait pas droit) et donc le quatrième est à une hauteur différente que le troisième...Et par récurrence, dans la liste L ainsi obtenue, chaque hauteur est visitée une seule fois, formant ainsi une permutation de l'ensemble E. Puis, pour chaque hauteur, il faut définir lequel des deux oeillets (droit ou gauche) est visité en premier. Ainsi dans ce cas, la liste L se décompose comme indiqué dans l'énoncé.
Par conséquent,

$$\boxed{\text{pour définir un laçage droit, il faut et il suffit d'opérer les trois étapes de l'énoncé.}}$$

Remarques !

En fait on a construit une bijection entre les laçages droits est un ensemble plus simple à décrire et surtout à décompter : $\mathfrak{S}_E \times \{G, D\}^n$

(b) Nous allons alors appliquer le principe de décomposition pour calculer le nombre de liste de laçage droit.
— pour la première opération (permutation), il y a $n!$ possibilités.
— pour la seconde opération (choix de G ou de D), il y a $\text{Card}(\{G, D\}^n) = 2^n$ possibilités.
— pour la troisième opération, il y a deux possibilité.
Ainsi, par bijection, il y a $2 \times 2^{n+1} n!$ listes différentes de laçage droit. Mais d'après la remarque A.2., pour connaître le nombre de laçages différents, il faut diviser par deux (deux sens de laçage) et donc

$$\boxed{\text{card}(\mathcal{D}) = 2^n \times n!}$$

2. (a) Par définition des laçages superdroits, la liste des oeillets doit alterner la gauche et la droite, par groupe de deux oeillets. La liste de laçage est donc de la forme $(G, D, D, G, G, D, D, \dots)$ ou $(D, G, G, D, D, G, G \dots)$.
Ainsi les oeillets du même côté sont situés en position $1, 4, 5, 8, 9 \dots$ c'est-à-dire en k avec $k \equiv 1[4]$ ou $k \equiv 0[4]$.
Pour que le laçage se termine, il faut nécessairement dans ce cas que :
— que l'on se trouve du même côté que le côté initial
— qu'il y ait un nombre pair d'oeillets : autant de D que de G.
Il faut donc que la liste des oeillets soit une k-liste avec $k \equiv 1$ ou $0[4]$ et k pair. Il n'y a qu'une possibilité : $4|k$. Et donc comme, $n = 2k$, on trouve que 2 doit diviser n.

$$\boxed{\text{Par contraposée, si } n \text{ est impair, il n'existe pas de laçage superdroit.}}$$

(b) Supposons que n est pair, alors on démontre comme pour la question 1 que pour déterminer exactement un laçage superdroit, il faut et il suffit :
— déterminer su le premier oeillet visité est à droite ou à gauche : 2 possibilités
— associer à la liste précédente $(G, D, D, G, \dots)$ ou $(D, G, G, D, D, \dots)$ une permutation de l'ensemble E. Il y a $n!$ possibilités..
On applique ensuite le principe de décomposition en tenant compte de la remarque en A.2

$$\boxed{\text{si } n \text{ est pair, alors } \text{Card}(\mathcal{SD}) = \frac{2n!}{2} = n!}$$

3. Il est évident, compte-tenu des définitions que

$$\boxed{\mathcal{SD} \subset \mathcal{D} \text{ et donc } \text{Card}(\mathcal{SD} \cap \mathcal{D}) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ n! & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}}$$

C. Laçages compacts

On cherche dans cette partie à dénombrer le nombre de laçages compacts (ou denses).

1. Soit L une liste de laçage de $\mathcal{SD} \cap \mathcal{C}$, alors
— le second oeillet est relié à un oeillets d'en face puis à un de son côté(disposition $(G, D, G \dots)$ ou $(D, G, D, \dots)$), puisqu'il s'agit d'un laçage compact.
— le second oeillet est relié exactement à deux oeillets d'en face (disposition $(G, D, D, \dots)$ ou $(D, G, G, \dots)$), puisqu'il s'agit d'un laçage superdroit.
Il est impossible d'avoir une telle configuration. Donc

$$\boxed{\mathcal{SD} \cap \mathcal{C} = \emptyset \text{ donc } \text{Card}(\mathcal{SD} \cap \mathcal{C}) = 0}$$

2. Une liste de laçage compacte est de la forme $(i_{1D}, j_{1G}, i_{2D}, \dots)$ ou bien $(j_{1G}, i_{1D}, j_{2G}, \dots)$.
Alors pour parfaitement déterminer une liste L compact, il faut et il suffit :
— déterminer le côté du premier oeillet : il y a 2 possibilités
en effet, une fois le premier côté désigné, les autres oeillets suivent en alternance
— ordonner la liste d'apparition des oeillets de gauche : il y a $n!$ possibilités (nombre de permutation)
— ordonner la liste d'apparition des oeillets de droite : il y a $n!$ possibilités (nombre de permutation)
Selon le principe de décomposition, et en tenant compte de la remarque A.2,

$$\boxed{\text{Card}(\mathcal{C}) = \frac{2 \times n! \times n!}{2} = (n!)^2}$$

3. Décomposition de $\mathcal{C}$.

(a) Nous avons vu que la forme d'une liste de laçage compacte est $(i_{1D}, j_{1G}, i_{2D}, \dots)$ ou bien $(j_{1G}, i_{1D}, j_{2G}, \dots)$.
Si de plus, elle est issue d'un laçage droit alors :
— ou bien $i_1 = j_1$, puis nécessairement pour tout k, $i_k = j_k$
— ou bien $i_1 \neq j_1$ et :
  — si la liste commence par D : dans ce cas $j_1 = i_2$ puis $j_k = i_{k+1}$ et $j_n = i_1$
  — si la liste commence par G : dans ce cas $i_1 = j_2$ puis $i_k = j_{k+1}$ et $i_n = j_1$
Il reste doc à choisir les permutations de la liste des oeillets de droite (par exemple), ceux de gauche suivent.
D'après le principe de décomposition (2 choix pour le côté du premier oeillet, 2 choix pour la forme ($i_1 = j_1$ ou non) et $n!$ pour la liste d'apparition des oeillets droits) et cela donne $2 \times 2 \times n!$ possibilités.

$$\boxed{\mathrm{Card}\,(\mathcal{C} \cap \mathcal{D}) = 2 \times n!.}$$

(b) Un laçage de $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}$ est simple donc la suite des valeurs rencontrées débute en 1 puis s'étend jusqu'à n de manière croissante, puis de manière décroissante, retourne aux premières valeurs.
Nous allons attribuer à chaque hauteur i, le symbole suivant :
— 0 : cela signifie que le laçage ne passe pas par la hauteur i dans le sens croissant.
— 1 : cela signifie que le laçage passe par un unique oeillet à la hauteur i dans le sens croissant.
— 2 : cela signifie que le laçage passe par les deux oeillets de hauteur i dans le sens croissant.
Par ailleurs, sachant que le laçage est également (dans le cas présent) dense, il alterne donc les oeillets de droite à gauche. Le contexte nous permet donc de savoir quel est l'oeillet rencontré (dans le cas 1) ; il nous suffit juste de savoir su le laçage commence à gauche ou à droite.
En appliquant le principe de décomposition, sachant qu'une liste de $\mathcal{C} \cap \mathcal{S}$ est parfaitement déterminée :
— la latéralité du premier oeillet rencontré : gauche ou droite
— la succession des symboles attribués aux hauteurs de $i = 1$ à $i = n-1$, pris dans l'ensemble $\{0, 1, 2\}$.
  Notons que pour $i = n$, le dernier symbole est 2.
Il y a donc $2 \times 3^{n-1}$, liste de laçages possibles ici. Suivant le principe de A.2., on a

$$\boxed{\mathrm{card}\,(\mathcal{C} \cap \mathcal{S}) = 3^{n-1}}$$

(c) Les listes de laçage de $(\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \cap \mathcal{S})$ sont déterminées comme les précédentes, mais comme elles sont droites, il ne s'agit plus pour chaque oeillet de choisir un élément de $\{0, 1, 2\}$, mais un élément de $\{0, 2\}$ (avec le même codage), puisque les lignes droites doivent être toutes présentes, soit dans le sens descendant, soit dans le sens montant.
Il y a donc (même raisonnement que précédemment) : $2 \times 2^{n-1}$ listes différentes.
Selon le principe A.2., on trouve

$$\boxed{\mathrm{card}\,(\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \cap \mathcal{S}) = 2^{n-1}.}$$

(d) C'est une formule du cours. Voir la démonstration du cours.

$$\boxed{\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).}$$

On considère donc les ensembles $A = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ et $B = \mathcal{C} \cap \mathcal{S}$.
Comme le nombre de laçages compacts droits ou simples exactement $\mathrm{Card}(A \cup B)$, on a :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{le nombre de laçages compacts; droits ou simples est}\\ \mathrm{Card}\mathcal{C} \cap \mathcal{D} + \mathrm{Card}\mathcal{C} \cap \mathcal{S} - \mathrm{Card}\mathcal{C} \cap \mathcal{D} \cap \mathcal{S} = 2n! + 3^{n-1} - 2^{n-1}\end{array}}$$

4. L'ensemble des laçages compacts ni droits, ni simple est le complémentaire de l'ensemble précédent. Il y en a donc $\mathrm{Card}(\mathcal{C}) - \mathrm{Card}(A \cup B)$.

$$\boxed{\text{le nombre de laçages compacts ni droits ni simples est } (n!)^2 - 2n! - 3^{n-1} + 2^{n-1}.}$$

D. Nombre total de laçages

On cherche dans cette partie à dénombrer le nombre total de laçages.
On notera $m = \dfrac{n}{2}$, si n est pair et $m = \dfrac{n-1}{2}$ si n est impair, de sorte que m est toujours un entier.

1. Considérons une liste de laçage quelconque, elle peut se voir comme la décomposition selon les latéralités et selon les hauteurs des oeillets correspondant. Ce qui fait la particularité d'un laçage est qu'*un côté peut se répéter une fois, mais jamais plus*. C'est sur cette observation que nous allons baser notre étude combinatoire.
   Cette liste peut commencer par un oeillet gauche ou un oeillet droit et terminer indépendamment par un oeillet gauche ou droit.

   Supposons que la liste commence par un G et se termine par un D. Effectuons un dénombrement en raisonnant sur les doublement de la lettre G.
   On utilise un paramètre : p, le nombre de fois où la liste ne passe pas de gauche à droite.
   Alors cette stagnation du côté gauche peut s'effectuer au moins 0 dois (c'est el cas des laçages simples), et au plus $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ fois.
   Si cette liste change $n-p$ fois de latéralité dans le sens gauche-droite, cela signifie, que parmi les n symboles j_G de la liste, il y en a $n-p$ qui sont suivis d'un symbole i_D et p j'_G.
   Si l'on considère une liste alternant les $G, D, G, D \dots$ ($n-p$ fois) alors on obtiendra exactement un laçage en doublant p G parmi ces $n-p$ G de la liste. Cela nos donne une liberté de choix égale à $\binom{n-p}{p}$.
   L'étude similaire se produit pour D. Et enfin, elle se reconduit, quelle que soit la latéralité du premier et du dernier oeillet rencontré.

   On peut donc résumer ceci dans un tableau.

$n^{\text{e}} \backslash 1^{\text{er}}$	G	D
G	$\sum_{p=0}^{m} \binom{n-p}{p}\binom{n-p+1}{p-1}$	$\sum_{p=0}^{m} \binom{n-p}{p}\binom{n-p}{p}$
D	$\sum_{p=0}^{m} \binom{n-p}{p}\binom{n-p}{p}$	$\sum_{p=0}^{m} \binom{n-p+1}{p-1}\binom{n-p}{p}$

   Il faut somme ces quatre coefficients pour obtenir le nombre total de listes acceptables.
   Remarquons d'abord que $\binom{n-(p-1)}{p-1} = \frac{p}{n-p}\binom{n-p}{p}$.
   Et donc on a

   $$S = 2\sum_{p=0}^{m} \binom{n-p}{p}\binom{n-p+1}{p-1} + 2\sum_{p=0}^{m} \binom{n-p}{p}\binom{n-p}{p} = 2\sum_{p=0}^{m} \left(\left(\frac{p}{n-p}+1\right) \binom{n-p}{p}^2 \right)$$

   $$S = 2\sum_{p=0}^{m} \frac{n}{n-p}\binom{n-p}{p}^2$$

   En tenant compte ensuite des permutations autorisées pour la liste des hauteurs de gauche et celle de droite, on a donc $2(n!)^2 S$ liste différentes de laçage.
   Enfin d'après notre remarque $A.2.$,

   $$\boxed{\text{il y a } (n!)^2 \sum_{p=0}^{n} \frac{n}{n-p}\binom{n-p}{p}^2 \text{ laçages différents}}$$

2. Il s'est inspiré d'un article du conférencier de la semaine dernière (voir plus bas)