

DEVOIR SURVEILLÉ N°9

Sujet donné le samedi 30 avril 2024, 4h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la **précision des raisonnements** et l'**énoncé des formules utilisées**. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.

BON TRAVAIL

PROBLÈME - CHEMIN DANS UNE MATRICE POSITIVE. . .

Objectifs du problème :

Ce problème étudie diverses propriétés des matrices primitives (strictement positives à partir d'une certaine puissance) définies dans la partie III. Elles sont exploitées dans de nombreuses situations liées à la graphes.

On cherche à étudier l'indice de primitivité, *s'il existe* pour une matrice positive (III) ainsi que la limite de la suite des puissances de ces matrices.

Plusieurs raisonnements (en particulier en partie III) s'appuient sur la notion de chemin dans une matrice positive, que l'on définit dans le préambule.

Généralités

- Dans tout le problème n désigne un entier supérieur ou égal à 2. $\mathbb{N}_n$ désigne l'ensemble des entiers compris entre 1 et n : $\mathbb{N}_n = \{k \in \mathbb{N} \mid 1 \leq k \leq n\}$.
- On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Si A est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on notera $a_{i,j}$ ou $[A]_{i,j}$ le coefficient de A situé en ligne i et colonne j .
On note $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées inversibles d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- On identifie une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ qui lui est canoniquement associé. Cela permet de légitimer les notations $\text{Im}(A)$ et $\text{Ker}(A)$.
- On note A^T la transposée d'une matrice A .
- On identifie un élément $x = (x_i)$ de $\mathbb{K}^n$ avec la matrice-colonne associée, ce qui légitime la notation Ax pour tout A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Dans ces conditions x^T désigne la matrice-ligne associée au vecteur x .

Elements propres d'une matrice

- On dit que λ est une *valeur propre* de la matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ n'est pas réduit à 0.
- On note alors $E_\lambda = \{x \in \mathbb{K}^n \mid Ax = \lambda x\} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid (A - \lambda I_n)x = 0\} = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$.
Cet espace s'appelle *l'espace propre* de A associé à la valeur propre λ .
- Les éléments non nuls de E_λ sont appelés les *vecteurs propres* de A (associée à la valeur λ).
- On note $\text{Sp}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de A , on appelle *spectre* de A cet ensemble.
- On note $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \text{Sp}(A)\}$, si $\text{Sp}(A)$ est non vide.
(On démontre par II.6 qu'il s'agit bien d'un maximum).

Matrices positives

- On dit que $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *positive* et on note $A \geq 0$, si : $\forall (i,j), ([A]_{i,j} =) a_{i,j} \geq 0$.
On dit que A est *strictement positive* et on note $A > 0$, si : $\forall (i,j), ([A]_{i,j} =) a_{i,j} > 0$.
Ces définitions s'appliquent aux vecteurs x de $\mathbb{R}^n$ (notations $x \geq 0$ ou $x > 0$).
On prendra bien garde au fait que l'implication $(A \geq 0 \text{ et } A \neq 0) \implies A > 0$ est fausse!
- Il est clair (et on ne demande pas de le démontrer) que les puissances A^k (avec $k \geq 1$) d'une matrice carrée positive (respectivement strictement positive) sont positives (respectivement strictement positives).

Chemins dans une matrice positive

- Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Un *chemin* dans A est une suite $\mathcal{C} = (i_k)_{0 \leq k \leq m}$ de $\mathbb{N}_n$, avec $m \geq 1$, telle que : $\forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, a_{i_k, i_{k+1}} > 0$.
Un tel chemin sera noté : $i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow \dots \rightarrow i_m$.
- On dit que $\mathcal{C}$ a pour longueur m et qu'il va de i_0 (son origine) à i_m (son extrémité) en *passant* par les i_k .
- On dit que $\mathcal{C}$ est un *chemin élémentaire* si $i_0, \dots, i_m$ sont distincts deux à deux.
- On dit que $\mathcal{C}$ est un *circuit* si $i_m = i_0$ et un *circuit élémentaire* si de plus $i_0, \dots, i_{m-1}$ sont distincts. Dans un circuit, la notion d'origine et d'extrémité perd de son intérêt. On pourra donc dire d'un circuit qu'il passe par un indice i (sans se préoccuper de la position de i dans ce circuit).

I Préliminaires

Dans ces préliminaires, nous étudions d'abord quelques propriétés d'une certaine famille de matrice $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Puis, nous donnerons des résultats essentiels sur les chemins dans une matrice positive dont la bonne compréhension est importante dans la perspective des parties suivantes.

On définit, donc, pour $n \in \mathbb{N}$, la matrice $W_n = (w_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $w_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i < n \text{ et } j = i + 1 \\ 1 & \text{si } i = n \text{ et } j \in \{1, 2\} \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$

Par exemple, pour $n = 5$, $W_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

I.1. Etude de W_n .

- (a) Calculer W_5^5 . En déduire l'expression d'un polynôme annulateur de W_5
- (b) On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque et on note $A = (C_1 | C_2 | \dots | C_n)$, où C_i est la i -ième colonne de A .
Montrer que pour tout $k \leq n - 1$,

$$A \times W_n^k = (C_{n-k+1} | \underbrace{C_{n-k+2} + C_{n-k+1} | C_{n-k+3} + C_{n-k+2} | \dots | C_{n-1} + C_n | C_n + C_1}_{k \text{ colonnes}} | \underbrace{C_2 | \dots | C_{n-k}}_{n-k-1 \text{ colonnes}})$$

- (c) En déduire que $W_n^n = W_n + I_n$.
- (d) En déduire que $W_n^{n^2-2n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} W_n^k$ puis que

$$W_n^{n^2-2n+2} = I_n + W_n + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-2}{k-2} W_n^k$$

I.2. Chemins dans les matrices positives. On rappelle que les définitions de chemins dans une matrice et de matrices positives ont été données plus haut.

Dans cette partie, A désigne une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (a) Montrer que s'il existe dans A un chemin de i vers j , avec $i \neq j$, alors il existe un chemin *élémentaire* de i vers j et de longueur $\ell \leq n - 1$.
- (b) De même, montrer que s'il existe dans A un circuit passant i , alors il existe un circuit *élémentaire* passant par i et de longueur $\ell \leq n$.
- (c) Soit $A \geq 0$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit i, j dans $\mathbb{N}_n$. Soit $m \geq 1$.
Montrer l'équivalence des propositions :
 - il existe dans A un chemin d'origine i , d'extrémité j , de longueur m ;
 - le coefficient d'indice i, j de A^m (noté $[A^m]_{i,j}$) est strictement positif.
 On pourra procéder par récurrence sur l'entier $m \geq 1$.
- (d) Soit i, j dans $\mathbb{N}_n$, et soit ℓ et m dans $\mathbb{N}^*$. Montrer l'équivalence des propositions :
 - il existe dans A^m un chemin d'origine i , d'extrémité j , de longueur ℓ ;
 - il existe dans A un chemin d'origine i , d'extrémité j , de longueur $m\ell$.

II Valeurs propres

Les définitions des éléments propres d'une matrice sont données au début du sujet.

Ici nous démontrons quelques résultats classiques d'algèbre linéaire, pas encore vu en cours...

II.1. Donner un critère qui dépend du rang d'une certaine matrice pour affirmer que λ est valeur propre de A .

II.2. En déduire que si λ est valeur propre de A , il en est de même de A^T .

II.3. Montrer que si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $x \in E_\lambda$, alors pour tout polynôme $T = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, on a : $T(A) \times x = T(\lambda) \cdot x$

II.4. En déduire que les valeurs propres de W_n sont parmi les racines de $X^n - X - 1$.

II.5. Soient $\lambda \neq \mu \in \text{Sp}(A)$. Montrer que $E_\lambda \oplus E_\mu$.

II.6. Plus globalement, montrer que si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in \text{Sp}(A)$, alors on a la somme directe $\oplus_{i=1}^s E_{\lambda_i}$.

On peut être amené à considérer $T_h = \prod_{i \neq h} (X - \lambda_i)$ et calculer $T_h(A) \times \dots$

II.7. En déduire que $\text{Sp}(A)$ est fini et donc bornée.

III Matrices primitives et indice de primitivité

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $A \geq 0$. On dit que A est *primitive* s'il existe $m \geq 1$ tel que $A^m > 0$.

Avec cette définition, il est clair que toute matrice carrée strictement positive est primitive.

Dans toute la suite, *matrice primitive* signifie *matrice carrée positive primitive*.

Si A est primitive, on appelle *indice de primitivité* de A le plus petit entier $m \geq 1$ tel que $A^m > 0$.

III.1. Chemins élémentaires dans une matrice primitive.

Soit A une matrice primitive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tous $i \neq j$ il existe dans A un chemin élémentaire de i à j et de longueur $\ell \leq n - 1$, et que pour tout i il existe dans A un circuit élémentaire passant par i et de longueur $\ell \leq n$.

III.2. Puissances d'une matrice primitive

(a) Donner un exemple simple d'une matrice carrée primitive mais non strictement positive.

(b) Soit $B > 0$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x \geq 0$ dans $\mathbb{R}^n$ avec $x \neq 0$. Montrer que $Bx > 0$.

(c) Soit A une matrice primitive et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^m > 0$. Montrer que $\forall p \geq m, A^p > 0$.

On pourra remarquer, en le justifiant, qu'aucune des colonnes $c_1, c_2, \dots, c_n$ de A n'est nulle.

(d) Prouver que si A est primitive, alors A^k est primitive pour tout $k \geq 1$.

III.3. On rappelle que la matrice de Weilandt a été définie dans les préliminaires

(a) Préciser le plus court circuit passant par l'indice 1 dans la matrice W_n .

(b) En déduire que la matrice positive $W_n^{n^2-2n+1}$ n'est pas strictement positive.

On pourra exploiter le résultat démontré en I.1.(d).

(c) Montrer que pour tous i, j de $\mathbb{N}_n$, avec $i \neq j$, il existe dans W_n au moins un chemin d'origine i , d'extrémité j , et de longueur inférieure ou égale à $n - 1$.

(d) En déduire que la matrice $W_n^{n^2-2n+2}$ est strictement positive et conclure sur l'indice de primitivité de W_n .

III.4. Indice de primitivité maximum.

Le but ici est de prouver que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est primitive, on a toujours $A^{n^2-2n+2} > 0$, c'est-à-dire que l'indice de primitivité de A est inférieur ou égal à $n^2 - 2n + 2$. Ce majorant est en fait un maximum, comme on l'a vu avec la matrice W_n de Weilandt dans la question précédente.

Dans toute cette question, A est une matrice primitive donnée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On peut donc appliquer à la matrice A les résultats de la question III.1.

En particulier, on note $\ell \in \mathbb{N}_n$ la plus petite longueur d'un circuit élémentaire de A .

(a) Par l'absurde, on suppose $\ell = n$. Montrer qu'alors tous les circuits de A sont de longueur multiple de n .

(b) En déduire que les matrices A^{kn+1} (avec $k \in \mathbb{N}$) sont de diagonale nulle et aboutir à une contradiction.

D'après ce qui précède, il existe dans A un circuit élémentaire $\mathcal{C}$ de longueur $\ell \leq n - 1$.

Pour simplifier la rédaction, et parce que cela n'enlève rien à la généralité du problème, on suppose qu'il s'agit du circuit $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow \ell - 1 \rightarrow \ell \rightarrow 1$ (les $n - \ell$ indices restants $\ell + 1, \ell + 2, \dots, n$ étant donc situés « en dehors » du circuit $\mathcal{C}$).

Nous allons montrer que $A^{n+\ell(n-2)}$ est strictement positive.

Pour cela, on se donne i et j dans $\mathbb{N}_n$. Tout revient à établir qu'il existe dans A un chemin d'origine i , d'extrémité j et de longueur $n + \ell(n - 2)$.

(c) Montrer que dans A , on peut former un chemin d'origine i , de longueur $n - \ell$, et dont l'extrémité est dans $\{1, 2, \dots, \ell\}$

On pourra traiter le cas $1 \leq i \leq \ell$, puis le cas $\ell + 1 \leq i \leq n$.

On notera k , par la suite cette extrémité située dans $\{1, 2, \dots, \ell\}$

(d) Dire pour quelle raison les ℓ premiers coefficients diagonaux de A^ℓ (et en particulier le k -ième) sont strictement positifs.

(e) Montrer alors qu'il existe un chemin de longueur $n - 1$ dans A^ℓ (c'est-à-dire un chemin de longueur $\ell(n - 1)$ dans A) d'origine $k \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ et d'extrémité j .

(f) En déduire finalement $A^{n+\ell(n-2)} > 0$, puis $A^{n^2-2n+2} > 0$.

(g) Donner une méthode (par calcul matriciel) pour savoir si il existe un chemin entre tout i, j d'une matrice A positive.

IV Étude des puissances d'une matrice primitive

Cette partie utilise uniquement la définition des matrices primitives : elle est pratiquement indépendante de la partie III.

Pour toute matrice primitive A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on admet le résultat suivant :

Le rayon spectral $\rho(A)$ de A (dont on sait qu'il est strictement positif) est une valeur propre dominante de A et le sous-espace propre associé est une droite vectorielle qui possède un vecteur directeur $x > 0$.

Dans toute cette partie, on se donne une matrice primitive A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour simplifier les notations, on note r (plutôt que $\rho(A)$) le rayon spectral de A . On rappelle que $r > 0$.

Il est clair que A^T est primitive, et que A et A^T ont le même rayon spectral r .

On peut donc noter $\tilde{x}$ (respectivement $\tilde{y}$) un vecteur directeur strictement positif de la droite $D = \text{Ker}(A - rI_n)$

(respectivement de la droite $\Delta = \text{Ker}(A^T - rI_n)$). On note $H = \text{Im}(A - rI_n)$.

Quitte à multiplier $\tilde{y}$ par un coefficient strictement positif adéquat, on suppose $\tilde{y}^T \times \tilde{x} = 1$.

On note $L = \tilde{x} \times \tilde{y}^T$ (c'est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

IV.1. Puissances de la matrice $B = A - rL$

- (a) Pourquoi parle-t-on de la droite (vectorielle) Δ et de l'hyperplan H ?
- (b) Montrer que $\forall x \in H$ et $y \in \Delta$, $y^T \times x = 0$.
On dit que l'hyperplan H est *orthogonal* à la droite Δ .
- (c) Montrer alors que $\mathbb{R}^n = H \oplus \Delta$.
- (d) Prouver que L est la matrice (dans la base canonique) de la projection de $\mathbb{R}^n$ sur la droite Δ , parallèlement à H .
- (e) Vérifier que L est de rang 1, qu'elle est strictement positive, et que $L^T \tilde{y} = \tilde{y}$.
- (f) Montrer que $AL = LA = rL$. En déduire : $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $(A - rL)^m = A^m - r^m L$.

IV.2. Etude du spectre de $B = A - rL$.

Dans cette question, on pose $B = A - rL$. On va montrer que $\rho(B) < r$ et en déduire un résultat intéressant sur la suite des puissances successives de A .

Soit λ une valeur propre non nulle de B et soit z un vecteur propre associé (donc non nul).

- (a) Montrer que $Lz = 0$, puis $Az = \lambda z$. En déduire $\rho(B) \leq r$.
- (b) Par l'absurde, on suppose $\rho(B) = r$. On peut donc choisir λ de telle sorte que $|\lambda| = r$.
Montrer qu'alors $\lambda = r$ puis $Lz = z$ et aboutir à une contradiction. Conclure.
- (c) Déduire de ce qui précède que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{r}A\right)^m = L$.
On admettra que si une matrice M vérifie $\rho(M) < 1$, alors $M^n \rightarrow 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$, i.e : $\forall i, j \in \mathbb{N}_n$, $[M^n]_{i,j} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

• • • FIN • • •

Correction

PROBLÈME - CHEMIN DANS UNE MATRICE. . .

I Préliminaires

, Dans ces préliminaires, nous étudions d'abord quelques propriétés d'une famille de matrice $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Puis nous démontrons quelques résultats classiques d'algèbre linéaire, pas encore vu en cours. . .

Enfin, nous donnerons des résultats essentiels dont la bonne compréhension est importante dans la perspective des parties suivantes.

On définit, donc, pour $n \in \mathbb{N}$, la matrice $W_n = (w_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par $w_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq i < n \text{ et } j = i + 1 \\ 1 & \text{si } i = n \text{ et } j \in \{1, 2\} \\ 0 & \text{dans tous les autres cas} \end{cases}$

Par exemple, pour $n = 5$, $W_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

I.1. Etude de W_n .

- (a) Calculer W_5^5 . En déduire l'expression d'un polynôme annulateur de W_5 .

Les calculs donnent

$$W_5^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad W_5^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad W_5^5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc $W_5^5 = W_5 + I_5$. W_5 est annulé par $X^5 - X - 1$.

- (b) On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ quelconque et on note $A = (C_1 | C_2 | \cdots | C_n)$, où C_i est la i -ième colonne de A .
Montrer que pour tout $k \leq n - 1$,

$$A \times W_n^k = (C_{n-k+1} | \underbrace{C_{n-k+2} + C_{n-k+1} | C_{n-k+3} + C_{n-k+2} | \cdots | C_n + C_1}_{k \text{ colonnes}} | \underbrace{C_2 | \cdots | C_{n-k}}_{n-k-1 \text{ colonnes}})$$

On démontre le résultat énoncé par récurrence.

Notons, pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\mathcal{P}_k$: « $A \times W_n^k = (C_{n-k+1} | \underbrace{C_{n-k+2} + C_{n-k+1} | C_{n-k+3} + C_{n-k+2} | \cdots | C_n + C_1}_{k \text{ colonnes}} | \underbrace{C_2 | \cdots | C_{n-k}}_{n-k-1 \text{ colonnes}})$ ».

— On note $C_h(M)$, la h -ième colonne de M .

D'après le calcul matriciel par bloc :

$$C_k(AW_n) = \sum_{\ell=1}^n C_\ell(A)[W_n]_{\ell,k} = \sum_{\ell=1}^{n-1} C_\ell(A)\delta_{\ell,k-1} + C_n(A)(\delta_{k,1} + \delta_{k,2}) = \begin{cases} C_n(A) & \text{si } k = 1 \\ C_1(A) + C_n(A) & \text{si } k = 2 \\ C_{k-1}(A) & \text{si } k > 2 \end{cases}$$

Ainsi, $C_k(AW_n) = (C_n | C_1 + C_n | C_2 | \cdots | C_{n-1})$.

Et comme $n - k + 1 = n$ si $k = 1$, on retrouve bien $\mathcal{P}_1$.

— Soit $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$. Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vérifiée.

On a alors $A \times W_n^{k+1} = A \times W_n^k \times W_n$.

En exploitant le calcul précédent :

$$C_\ell(A \times W_n^{k+1}) = \begin{cases} C_n(AW_n^k) & \text{si } \ell = 1 \\ C_1(AW_n^k) + C_n(AW_n^k) & \text{si } \ell = 2 \\ C_{\ell-1}(AW_n^k) & \text{si } \ell > 2 \end{cases}$$

Or $\mathcal{P}_k$ est vraie, donc $C_1(AW_n^{k+1}) = C_n(AW_n^k) = C_{n-k} = C_{n-(k+1)+1}$.

$C_2(AW_n^{k+1}) = C_1(AW_n^k) + C_n(AW_n^k) = C_{n-k+1} + C_{n-k} = C_{n-(k+1)+2} + C_{n-(k+1)+1}$.

pour $\ell \in \llbracket 3, k+2 \rrbracket$, $C_\ell(AW_n^{k+1}) = C_{\ell-1}(AW_n^k)$, ce qui correspond bien au décalage attendu. Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Ainsi,

$$A \times W_n^k = (C_{n-k+1} | \underbrace{C_{n-k+2} + C_{n-k+1} | C_{n-k+3} + C_{n-k+2} | \cdots | C_n + C_1}_{k \text{ colonnes}} | \underbrace{C_2 | \cdots | C_{n-k}}_{n-k-1 \text{ colonnes}})$$

- (c) En déduire que $W_n^n = W_n + I_n$.

Le calcul précédent a été fait pour $k = n-1$, maximale, et donc $AW_n^{n-1} = (C_2|C_3+C_2|C_4+C_3|\cdots|C_n+C_{n-1}|C_n+C_1)$. En multipliant à droite par W_n , on trouve

$$\begin{aligned} AW_n^n &= (C_1 + C_n|C_1 + C_2 + C_n|C_3 + C_2|C_4 + C_3|\cdots|C_n + C_{n-1}) = (C_1|C_2|\cdots|C_n) + (C_n|C_1 + C_n|C_2|\cdots|C_{n-1}) \\ &= AI_n + AW_n = A(I_n + W_n) \end{aligned}$$

Ce résultat est vraie pour tout A , en particulier pour $A = I_n$. Donc

$$W_n^n = I_n + W_n$$

- (d) En déduire que $W_n^{n^2-2n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} W_n^k$ puis que

$$W_n^{n^2-2n+2} = I_n + W_n + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-2}{k-2} W_n^k \quad (*)$$

On a alors

$$W_n^{n^2-2n+1} = W_n^{n(n-2)} \times W_n = W_n \times (W_n^n)^{n-2} = W_n \times (W_n + I_n)^{n-2}$$

Comme W_n commute avec I_n , on peut appliquer le binôme de Newton (avec $k = h+1$) :

$$W_n^{n^2-2n+1} = W_n \times \sum_{h=0}^{n-2} \binom{n-2}{h} W_n^h = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} W_n^k$$

Si on multiplie tout par W_n (et en coupant la somme en 2) :

$$W_n^{n^2-2n+2} = \sum_{k=1}^{n-2} \binom{n-2}{k-1} W_n^{k+1} + \binom{n-2}{n-2} W_n^n = \sum_{\ell=2}^{n-1} \binom{n-2}{\ell-2} W_n^\ell + I_n + W_n$$

avec $\ell = k+1$ et d'après la relation : $W_n^n = W_n + I_n$.

$$W_n^{n^2-2n+2} = I_n + W_n + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-2}{k-2} W_n^k$$

La matrice W_n (avec la relation $(*)$) pourra être exploité à titre d'exemples (ou de contre-exemples) dans les parties suivantes.

- I.2. Chemins dans les matrices positives. On rappelle que les définitions de chemins dans une matrice et de matrices positives ont été données plus haut.

Dans cette partie, A désigne une matrice positive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (a) Montrer que s'il existe dans A un chemin de i vers j , avec $i \neq j$, alors il existe un chemin *élémentaire* de i vers j et de longueur $\ell \leq n-1$.

On suppose qu'il existe un chemin de i vers j dans A avec $i \neq j$.

Notons $L = \{\ell \in \mathbb{N}^* \mid \exists \mathcal{C} \text{ chemin de } i \text{ vers } j \text{ et de longueur } \ell\}$.

Alors $L \subset \mathbb{N}$, $L \neq \emptyset$, par hypothèse, donc L admet un plus petit élément.

Notons $\ell_0 = \min L$. Donc il existe $\mathcal{C} : i_0 = i \rightarrow \cdots \rightarrow i_k \rightarrow \cdots \rightarrow i_{\ell_0} = j$.

Supposons, par l'absurde que $\mathcal{C}$ n'est pas élémentaire.

Il existe donc $k_1 < k_2 \in \llbracket 0, \ell_0 \rrbracket$ tel que $i_{k_1} = i_{k_2}$.

Le chemin $\mathcal{C}' = i_0 = i \rightarrow \cdots \rightarrow i_{k_1-1} \rightarrow i_{k_1} = i_{k_2} \rightarrow i_{k_2+1} \rightarrow \cdots \rightarrow i_{\ell_0} = j$ relie i à j

et est de longueur strictement plus petite que ℓ_0 .

Ceci contredit le caractère minimal de ℓ_0 . L'hypothèse $\mathcal{C}$ n'est pas élémentaire est donc fausse.

Ensuite, puisque $\llbracket 0, \ell_0 \rrbracket \rightarrow \mathbb{N}_n$, $k \mapsto i_k$ est injective (puisque le chemin est élémentaire)

on a donc $\text{Card}(\llbracket 0, \ell_0 \rrbracket) \leq \text{Card} \mathbb{N}_n$, donc $\ell_0 + 1 \leq n$.

S'il existe un chemin de i vers j , alors il existe un chemin *élémentaire* de i vers j et de longueur $\ell \leq n-1$.

- (b) De même, montrer que s'il existe dans A un circuit passant i , alors il existe un circuit *élémentaire* passant par i et de longueur $\ell \leq n$.

C'est la même démonstration avec $i_\ell = i = i_0$.

Le plus petit est nécessairement élémentaire, et il a une longueur ℓ tel que $\llbracket 0, \ell-1 \rrbracket$ s'injecte dans $\mathbb{N}_n$, donc $\ell \leq n$.

S'il existe dans A un circuit passant i , alors il existe un circuit *élémentaire* passant par i et de longueur $\ell \leq n$.

(c) Soit $A \geq 0$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit i, j dans $\mathbb{N}_n$. Soit $m \geq 1$.

Montrer l'équivalence des propositions :

- il existe dans A un chemin d'origine i , d'extrémité j , de longueur m ;
- le coefficient d'indice i, j de A^m (noté $[A^m]_{i,j}$) est strictement positif.

On pourra procéder par récurrence sur l'entier $m \geq 1$.

Posons, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{Q}_m$ « il existe dans A un chemin d'origine i , d'extrémité j , de longueur m ; si et seulement si le coefficient d'indice i, j de A^m (noté $[A^m]_{i,j}$) est strictement positif. ».

- Pour $m = 1$, il existe un chemin de $i = i_0$ à $j = i_1$ de longueur 1, si et seulement si $[A]_{i,j} = [A]_{i_0,i_1} > 0$, donc $[A^1]_{i,j} > 0$ Donc $\mathcal{Q}_m$ est vraie.
- Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\mathcal{Q}_m$ est vraie. Soient $i, j \in \mathbb{N}_n$

$$[A^{m+1}]_{i,j} = \sum_{h=1}^n [A^m]_{i,h} [A]_{h,j}$$

Chaque terme de la matrice positif A et de la matrice positif A^m est positif, donc $\forall h \in \mathbb{N}_n$, $[A^m]_{i,h} [A]_{h,j} \geq 0$.

Ainsi, l'addition $\sum_{h=1}^n [A^m]_{i,h} [A]_{h,j}$ est nul si et seulement si chaque terme est nul.

Ce qui donne la contraposée suivante :

$$[A^{m+1}]_{i,j} > 0 \iff \exists h \in \mathbb{N}_n \text{ tel que } [A^m]_{i,h} [A]_{h,j} > 0 \iff \exists h \in \mathbb{N}_n \text{ tel que } [A^m]_{i,h} > 0 \text{ et } [A]_{h,j} > 0$$

Or $\mathcal{Q}_m$ est vraie donc $[A^m]_{i,h} > 0$ signifie exactement qu'il existe un chemin de longueur m de 1 à h .

On a donc les équivalences :

$$\begin{aligned} [A^{m+1}]_{i,j} > 0 &\iff \exists h \in \mathbb{N}_n \text{ tel que } \exists \mathcal{C} : i = i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_m = h \rightarrow i_{m+1} = j \\ &\iff \exists \mathcal{C} : i = i_0 \rightarrow \dots \rightarrow i_{m+1} = j \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{Q}_{m+1}$ est vraie.

Il existe dans A un chemin d'origine i , d'extrémité j , de longueur m ;
si et seulement si le coefficient d'indice i, j de A^m (noté $[A^m]_{i,j}$) est strictement positif.

(d) Soit i, j dans $\mathbb{N}_n$, et soit ℓ et m dans $\mathbb{N}^*$. Montrer l'équivalence des propositions :

- il existe dans A^m un chemin d'origine i , d'extrémité j , de longueur ℓ ;
- il existe dans A un chemin d'origine i , d'extrémité j , de longueur $m\ell$.

On exploite la question précédente, on a les équivalences :

- il existe dans A^m un chemin d'origine i , d'extrémité j , de longueur ℓ ;
- si et seulement si $[(A^m)^\ell]_{i,j} > 0$
- si et seulement si $[A^{m\ell}]_{i,j} > 0$
- si et seulement si il existe dans A un chemin d'origine i , d'extrémité j , de longueur $m\ell$.

Il existe dans A^m un chemin d'origine i , d'extrémité j , de longueur ℓ
si et seulement si il existe dans A un chemin d'origine i , d'extrémité j , de longueur $m\ell$.

II Valeurs propres et produit $y^T \times x$.

On dit que λ est une *valeur propre* de la matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$ n'est pas réduit à 0.

On note alors $E_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (A - \lambda I_n)x = 0\} = \text{Ker}(A - \lambda I_n)$. Cet espace s'appelle *l'espace propre* de A associé à la valeur propre λ . Les éléments non nuls de E_λ sont appelés les *vecteurs propres* de A (associée à la valeur λ).

On note $\text{Sp}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de A , on appelle *spectre* de A ce ensemble.

II.1. Donner un critère qui dépend du rang d'une certaine matrice pour affirmer que λ est valeur propre de A .

On a vu dans le cours les équivalences, pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$M \text{ est inversible} \iff \text{Ker} M = \{0\} \iff \text{rg}(M) = n$$

En prenant donc $M \rightarrow A - \lambda I_n$, on a les négations de ces affirmations

λ est valeur propre de A (ssi $A - \lambda I_n$ non inversible) si et seulement si $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$.

II.2. En déduire que si λ est valeur propre de A , il en est de même de A^T .

On sait également que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\text{rg}(M) = \text{rg}(M^T)$, on a donc :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ est valeur propre de } A &\iff \text{rg}(A - \lambda I_n) < n \\ &\iff \text{rg}(A - \lambda I_n)^T < n \\ &\iff \text{rg}(A^T - \lambda I_n^T) = \text{rg}(A^T - \lambda I_n) < n \\ &\iff \lambda \text{ est valeur propre de } A^T \end{aligned}$$

λ est valeur propre de A si et seulement si λ est valeur propre de A^T .

A noter qu'on ne demandait qu'une implication, mais comme $(A^T)^T = A$, l'équivalence est directe.

II.3. Montrer que si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $x \in E_\lambda$, alors pour tout polynôme $T = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, on a : $T(A) \times x = T(\lambda) \cdot x$

Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_k : \ll A^k \times x = \lambda^k \cdot x \gg$

— La formule est vraie pour $k = 0$, car $A^0 \times x = I_n \times x = x$ et $\lambda^0 \cdot x = 1 \cdot x = x$.

— Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie.

Alors $A^{k+1} \times x = A \times (A^k \times x) = A \times (\lambda^k \cdot x)$, car $\mathcal{P}_k$ est vraie.

Puis $A^{k+1} \times x = \lambda^k \cdot A \times x = \lambda^k \cdot \lambda \cdot x = \lambda^{k+1} \cdot x$.

Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

La récurrence est démontrée.

Considérons maintenant, $T = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

Alors

$$T(A) \times x = \left(\sum_{k=0}^d a_k A^k \right) \times x = \sum_{k=0}^d a_k (A^k \times x) = \sum_{k=0}^d a_k (\lambda^k \cdot x) = \left(\sum_{k=0}^d a_k \lambda^k \right) \cdot x = T(\lambda) \cdot x$$

Ainsi, si $\lambda \in \text{Sp}(A)$ et $x \in E_\lambda$, alors pour tout polynôme $T \in \mathbb{K}[X]$, on a : $T(A) \times x = T(\lambda) \cdot x$

II.4. En déduire que les valeurs propres de W_n sont parmi les racines de $X^n - X - 1$.

Soit λ une valeur propre de W_n . Donc il existe x non nul tel que $W_n \times x = \lambda \cdot x$.

Considérons le polynôme $T = X^n - X - 1$, on a donc $T(W_n) \times x = T(\lambda) \cdot x$.

Or $T(W_n) = 0$ d'après I.1.(c), donc $T(\lambda) \cdot x = 0$.

Mais $x \neq 0$, donc $T(\lambda) = 0$.

Les valeurs propres de W_n sont parmi les racines de $X^n - X - 1$.

II.5. Soient $\lambda \neq \mu \in \text{Sp}(A)$. Montrer que $E_\lambda \oplus E_\mu$.

Soit $x \in E_\lambda \cap E_\mu$, alors $Ax = \lambda x$ et $Ax = \mu x$.

Donc $(\lambda - \mu) \cdot x = 0$. Or $\lambda - \mu \neq 0$. Donc $x = 0$.

L'inclusion réciproque étant immédiate (puisque ce sont des espaces vectoriels) :

$$E_\lambda \oplus E_\mu$$

II.6. Plus globalement, montrer que si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in \text{Sp}(A)$, s valeurs propres distinctes, alors on a la somme directe : $\oplus_{i=1}^s E_{\lambda_i}$.

Soit $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s \in \text{Sp}(A)$, s valeurs propres distinctes.

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_s) \in E_{\lambda_1} \times E_{\lambda_2} \times \dots \times E_{\lambda_s}$ tels que $\sum_{i=1}^s x_i = 0$.

Si l'on multiplie cette relation par A , on trouve :

$$0 = \sum_{i=1}^s Ax_i = \sum_{i=1}^s \lambda_i x_i$$

Et si l'on continue par A^k (pour tout $k \in \mathbb{N}$) :

$$0 = \sum_{i=1}^s A^k x_i = \sum_{i=1}^s \lambda_i^k x_i$$

Fixons un entier $h \in \mathbb{N}_s$.

Considérons le presque polynôme de Lagrange $P_h = \prod_{i \neq h} (X - \lambda_i)$ de degré $s - 1$,

ce polynôme se développe en $P_h = \sum_{k=0}^{s-1} a_k X^k$ On a alors

$$0 = P_h(A) \times 0 = P_h(A) \sum_{i=1}^s x_i = \sum_{i=1}^s P_h(A) \times x_i = \sum_{i=1}^s P_h(\lambda_i) x_i = P_h(\lambda_h) x_h$$

Car $P_h(x_i) = 0$ si $i \neq h$. Puis : $P_h(\lambda_h) = \prod_{i \neq h} (\lambda_i - \lambda_h) \neq 0$, car les valeurs propres sont distinctes.

Donc nécessairement $x_h = 0$. Ainsi, pour tout $h \in \mathbb{N}_s$, $x_h = 0$ et donc

$$\bigoplus_{i=1}^s E_{\lambda_i}$$

II.7. En déduire que $\text{Sp}(A)$ est fini et donc bornée.

Puisque $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} E_\lambda \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et que la somme est directe, on a :

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim E_\lambda = \dim \left(\bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(A)} E_\lambda \right) \leq \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) = n$$

Or pour chaque λ , $\dim E_\lambda \geq 1$, on a donc :

$$n \geq \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim E_\lambda \geq \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} 1 = \text{Card}(\text{Sp}(A))$$

Donc

$$\text{Sp}(A) \text{ est fini et donc bornée par } n.$$

III Matrices primitives et indice de primitivité

Soit A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, avec $A \geq 0$. On dit que A est *primitive* s'il existe $m \geq 1$ tel que $A^m > 0$.

Avec cette définition, il est clair que toute matrice carrée strictement positive est primitive.

Dans toute la suite, *matrice primitive* signifie *matrice carrée positive primitive*.

Si A est primitive, on appelle *indice de primitivité* de A le plus petit entier $m \geq 1$ tel que $A^m > 0$.

III.1. Chemins élémentaires dans une matrice primitive.

Soit A une matrice primitive de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que pour tous $i \neq j$ il existe dans A un chemin élémentaire de i à j et de longueur $\ell \leq n-1$, et que pour tout i il existe dans A un circuit élémentaire passant par i et de longueur $\ell \leq n$.

A est primitive donc il existe m tel que $A^m > 0$.

Ainsi, pour tout $i \neq j \in \mathbb{N}_n$, $[A^m]_{i,j} > 0$ et donc il existe un chemin de i à j (de longueur m).

D'après I.2.(a), ceci est suffisant pour pouvoir affirmer qu'il existe un chemin élémentaire de i à j de longueur $< n$.

Et, de même, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $[A^m]_{i,i} > 0$ et donc il existe un circuit passant par i (de longueur m).

D'après I.2.(b), ceci est suffisant pour pouvoir affirmer qu'il existe un circuit élémentaire passant par i de longueur $\leq n$.

Si A est une matrice primitive, pour $i \neq j$ il existe dans A un chemin élémentaire de i à j et de longueur $\ell \leq n-1$, et que pour tout i il existe dans A un circuit élémentaire passant par i et de longueur $\ell \leq n$.

III.2. Puissances d'une matrice primitive

(a) Donner un exemple simple d'une matrice carrée primitive mais non strictement positive.

Considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Elle n'est pas strictement positive ($[A]_{1,1} = 0$),

Et $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Elle est strictement positive. Donc A est primitive.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ est primitive sans être strictement positive.}$$

(b) Soit $B > 0$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $x \geq 0$ dans $\mathbb{R}^n$ avec $x \neq 0$. Montrer que $Bx > 0$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $[Bx]_i = \sum_{j=1}^n [B]_{i,j} x_j \geq 0$, en tant que somme de nombres positifs.

Et par ailleurs, $x \neq 0$, donc il existe $j_0 \in \mathbb{N}_n$ tel que $x_{j_0} \neq 0$.

Donc $[Bx]_i = \underbrace{[B]_{i,j_0} x_{j_0}}_{>0} + \sum_{j \neq j_0} \underbrace{[B]_{i,j} x_j}_{\geq 0} > 0$.

$$\text{Donc } Bx > 0.$$

- (c) Soit A une matrice primitive et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^m > 0$. Montrer que $\forall p \geq m, A^p > 0$.
On pourra remarquer, en le justifiant, qu'aucune des colonnes $c_1, c_2, \dots, c_n$ de A n'est nulle.

Soit $p \geq m$, on a le produit par blocs :

$$A^p = A^m \times A^{p-m} = A^m \times (C_1(A^p) | C_2(A^p) | \dots | C_n(A^p)) = (A^m C_1(A^{p-m}) | A^m C_2(A^{p-m}) | \dots | A^m C_n(A^{p-m}))$$

Or A^{p-m} est une matrice positive, comme A (résultat admis dans l'énoncé), donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n, C_i(A^{p-m}) \geq 0$.

En exploitant la question précédente, puisque $A^m > 0$, on a donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n, A^m C_i(A^{p-m}) > 0$.

Par conséquent : $A^p > 0$.

Si A est primitive avec $A^m > 0$, alors $\forall p \geq m, A^p > 0$.

- (d) Prouver que si A est primitive, alors A^k est primitive pour tout $k \geq 1$.

Soit A une matrice primitive. Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que $A^m > 0$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors A^k est positive et $(A^k)^m = A^{km} > 0$ car $km \geq m$.

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*, A^k$ est primitive.

III.3. On rappelle que la matrice de Weilandt a été définie dans les préliminaires

- (a) Préciser le plus court circuit passant par l'indice 1 dans la matrice W_n .

Reprenons la matrice de Weilandt, notée W_n .

$[W_n]_{1,k} = 0$ sauf si $k = 2$. Donc dans tout chemin de W_n , l'entier qui suit 1 est nécessairement 2.

De même, pour tout $h < n, [W_n]_{h,k} = 0$ sauf si $k = h + 1$

et donc dans tout chemin de W_n , l'entier qui suit h est nécessairement $h + 1$.

Donc pour tout circuit passant par 1, on trouve la boucle :

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow n-1 \rightarrow n$$

Puis, comme $[W_n]_{n,1} = 1$, on peut finir le circuit par $n \rightarrow 1$.

C'est le plus court circuit qui passe par 1, nécessairement.

Le plus court circuit dans W_n passant par 1 est $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \dots \rightarrow n-1 \rightarrow n \rightarrow 1$, de longueur n .

- (b) En déduire que la matrice positive $W_n^{n^2-2n+1}$ n'est pas strictement positive.
On pourra exploiter le résultat démontré en I.1.(d).

On a vu que $W_n^{n^2-2n+1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} W_n^k$. On regarde le coefficient en ligne 1 et colonne 1 :

$$[W_n^{n^2-2n+1}]_{1,1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} [W_n^k]_{1,1}$$

Or on a vu qu'il n'y a aucun chemin de 1 à 1 (=circuit passant par 1) de longueur $k \leq n-1$,
donc pour $k \in \mathbb{N}_{n-1}, [W_n^k]_{1,1} = 0$.

Et donc $W_n^{n^2-2n+1}$ n'est pas strictement positive.

- (c) Montrer que pour tous i, j de $\mathbb{N}_n$, avec $i \neq j$, il existe dans W_n au moins un chemin d'origine i , d'extrémité j , et de longueur inférieure ou égale à $n-1$.

On a vu qu'il existe dans W_n , le circuit de longueur $n+1$: $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1$.

Soit $i, j \in \mathbb{N}_n$ avec $i < j$.

Si $i < j$, on trouve exactement dans ce circuit le chemin $i \rightarrow i+1 \rightarrow \dots \rightarrow j$ de longueur $j-i \leq n-1$.

Si $i > j$, on considère alors le circuit $i \rightarrow i+1 \rightarrow \dots \rightarrow n \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow j$ de longueur $n-i+j \leq n-1$ puisque $i \geq j+1$.

Pour tous i, j de $\mathbb{N}_n$, avec $i \neq j$, il existe dans W_n un chemin d'origine i , d'extrémité j , et de longueur $\leq n-1$.

- (d) En déduire que la matrice $W_n^{n^2-2n+2}$ est strictement positive et conclure sur l'indice de primitivité de W_n .

Soit $i, j \in \mathbb{N}_n$. Il existe un chemin de i à j de longueur $k_0 \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ et donc $[W_n^{k_0}]_{i,j} > 0$. On exploite la relation $(\star)$:

$$[W_n^{n^2-2n+2}]_{i,j} = \begin{cases} \underbrace{\binom{n-2}{k_0-2} [W_n^{k_0}]_{i,j}}_{>0} + \underbrace{\left[I_n + W_n + \sum_{k \neq k_0} \binom{n-2}{k-2} W_n^k \right]_{i,j}}_{\geq 0} & > 0 \quad \text{si } k_0 > 1 \\ \underbrace{[W_n]_{i,j}}_{>0} + \underbrace{\left[I_n + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n-2}{k-2} W_n^k \right]_{i,j}}_{\geq 0} & > 0 \quad \text{si } k_0 = 1 \end{cases}$$

Et évidemment, si $i = j$, on a également $[W_n^{n^2-2n+2}]_{i,i} > 0$ à cause de $[I_n]_{i,i} = 1$.

La matrice $W_n^{n^2-2n+2}$ est strictement positive.

Donc l'indice de primitivité de W_n est inférieure à $n^2 - 2n + 2$.

Et comme $W_n^{2n-2n+1}$ n'est pas strictement positif. L'indice est donc supérieur à $n^2 - 2n + 2$.

L'indice de primitivité de W_n est égal à $n^2 - 2n + 2$.

III.4. Indice de primitivité maximum.

Le but ici est de prouver que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est primitive, on a toujours $A^{n^2-2n+2} > 0$, c'est-à-dire que l'indice de primitivité de A est inférieur ou égal à $n^2 - 2n + 2$. Ce majorant est en fait un maximum, comme on l'a vu avec la matrice W_n de Weilandt dans la question précédente.

Dans toute cette question, A est une matrice primitive donnée dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On peut donc appliquer à la matrice A les résultats de la question III.1.

En particulier, on note $\ell \in \mathbb{N}_n$ la plus petite longueur d'un circuit élémentaire de A .

(a) Par l'absurde, on suppose $\ell = n$. Montrer qu'alors tous les circuits de A sont de longueur multiple de n .

Si $\ell = n$, alors comme ℓ est élémentaire, tous les points visités sont distinctes, pris dans $\mathbb{N}_n$ et en quantité égale à n .

Par conséquent, tous les entiers de $\mathbb{N}_n$ sont dans le circuit élémentaire minimal.

Soit un circuit $\mathcal{C}$ de A (non nécessairement élémentaire).

Considérons i_k un point du circuit, puis les entiers $i_{k+1}, \dots, i_{k+n-1}$.

On considère ainsi, n éléments. Ils sont nécessairement tous distincts,

sinon on aurait $i_{k_1} = i_{k_2}$ et un circuit $i_{k_1} \rightarrow i_{k_1+1} \rightarrow \dots \rightarrow i_{k_2} = i_{k_1}$ de longueur $< n$.

De même, nécessairement $i_{k+n} = i_k$, sinon on pourrait extraire un circuit plus petit.

Donc dans $\mathcal{C}$ se trouve la répétition nécessaire de la même boucle de longueur ℓ .

Puisque $\ell = n$, tous les circuits de A sont de longueur multiple de $\ell = n$.

(b) En déduire que les matrices A^{kn+1} (avec $k \in \mathbb{N}$) sont de diagonale nulle et aboutir à une contradiction.

D'après la question précédente, les seuls circuits sont de longueur kn avec $k \in \mathbb{N}$.

Et donc, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$: $[A^m]_{i,i} \neq 0$ ssi $n|m$.

Comme n ne divise pas $kn + 1$, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$: $[A^{kn+1}]_{i,i} = 0$.

Par conséquent les A^{kn+1} (avec $k \in \mathbb{N}$) sont de diagonale nulle.

Or A est primitive et donc il existe m tel que $A^m > 0$ et pour tout $k \geq m$, $A^k > 0$.

En particulier pour $k = nm + 1 > m$ et donc $A^{nm+1} > 0$. Contradiction.

Notre hypothèse initiale est donc fausse :

ℓ , la plus petite longueur d'un circuit élémentaire de A vérifie $\ell < n$.

D'après ce qui précède, il existe dans A un circuit élémentaire $\mathcal{C}$ de longueur $\ell \leq n-1$.

Pour simplifier la rédaction, et parce que cela n'enlève rien à la généralité du problème, on suppose qu'il s'agit du circuit $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow \ell-1 \rightarrow \ell \rightarrow 1$ (les $n-\ell$ indices restants $\ell+1, \ell+2, \dots, n$ étant donc situés « en dehors » du circuit $\mathcal{C}$).

Nous allons montrer que $A^{n+\ell(n-2)}$ est strictement positive.

Pour cela, on se donne i et j dans $\mathbb{N}_n$. Tout revient à établir qu'il existe dans A un chemin d'origine i , d'extrémité j et de longueur $n + \ell(n-2)$.

- (c) Montrer que dans A , on peut former un chemin d'origine i , de longueur $n - \ell$, et dont l'extrémité est dans $\{1, 2, \dots, \ell\}$.
On pourra traiter le cas $1 \leq i \leq \ell$, puis le cas $\ell + 1 \leq i \leq n$.

- Si $i \in \llbracket 1, \ell \rrbracket$, alors, en prenant le chemin $i \rightarrow i + 1 \rightarrow \ell \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow \ell$, de manière à ce que sa longueur soit exactement $n - \ell$, on termine donc en un point de $\{1, 2, \dots, \ell\}$.
- Si $i > \ell$, alors comme A est primitive, il existe un chemin élémentaire de i à 1.
Si ce chemin est de longueur inférieur à $n - \ell$, c'est gagné (en bouclant dans $\{1, 2, \dots, \ell\}$).
Sinon, considérons les $n - \ell$ premier terme de ce chemin élémentaire : $\mathcal{C} : i_0 = i \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_{n-\ell}$ partant de i ,
les indices $i_1, i_2, \dots, i_{n-\ell}$ ne peuvent tous être dans $\{\ell + 1, \dots, n\} \setminus \{i\}$, de cardinal $n - \ell - 1$.
Donc il existe $r \leq n - \ell$ tel que $i_r \in \{1, 2, \dots, \ell\}$.
On considère alors le chemin $i_0 = i \rightarrow i_1 \rightarrow \dots \rightarrow i_r \rightarrow i_r + 1 \rightarrow i_r + 2 \dots$ (et on reste dans $\{1, 2, \dots, \ell\}$).
Donc il existe également un chemin partant de i , de longueur $n - \ell$ terminant dans $\{1, 2, \dots, \ell\}$.

Dans A , on peut former un chemin d'origine i , de longueur $n - \ell$, et dont l'extrémité est dans $\{1, 2, \dots, \ell\}$.

On notera k , par la suite cette extrémité située dans $\{1, 2, \dots, \ell\}$

- (d) Dire pour quelle raison les ℓ premiers coefficients diagonaux de A^ℓ (et en particulier le k -ième) sont strictement positifs.

Soit $k \in \mathbb{N}_\ell$. Il existe un chemin de k à k de longueur $\ell : k \rightarrow k + 1 \rightarrow \dots \rightarrow \ell \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow k$.

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}_\ell$, $[A^\ell]_{k,k} > 0$.

- (e) Montrer alors qu'il existe un chemin de longueur $n - 1$ dans A^ℓ (c'est-à-dire un chemin de longueur $\ell(n - 1)$ dans A) d'origine $k \in \{1, 2, \dots, \ell\}$ et d'extrémité j .

A est primitive, par hypothèse, donc A^ℓ est également primitive.

Donc, pour tout $k, j \in \mathbb{N}_n$, il existe un chemin dans A^ℓ . Notons s , sa longueur minimal. Nécessairement $s \leq n - 1$.

Ainsi, $[(A^\ell)^s]_{k,j} > 0$, donc $[A^{s\ell}]_{k,j} > 0$.

Soit $m = n - 1 - s \geq 0$, donc $(n - 1)\ell = (m + s)\ell = m\ell + s\ell$.

Puis

$$[A^{(n-1)\ell}]_{k,j} = [A^{m\ell} A^{s\ell}]_{k,j} = \sum_{h=1}^n [A^{m\ell}]_{k,h} [A^{s\ell}]_{h,j} = \underbrace{[(A^\ell)^m]_{k,k}}_{>0} \underbrace{[A^{s\ell}]_{k,j}}_{>0} + \sum_{h \neq k} \underbrace{[A^{m\ell}]_{k,h}}_{\geq 0} \underbrace{[A^{s\ell}]_{h,j}}_{\geq 0} > 0$$

Il existe donc un chemin de k à j de longueur $(n - 1)\ell$.

- (f) En déduire finalement $A^{n+\ell(n-2)} > 0$, puis $A^{n^2-2n+2} > 0$.

On a donc, pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, en passant par $k : [A^{n-\ell}]_{i,k} > 0$ et $[A^{(n-1)\ell}]_{k,j} > 0$, donc

$$[A^{n+(n-2)\ell}]_{i,j} = [A^{(n-\ell)+(n-1)\ell}]_{i,j} = [A^{n-\ell}]_{i,k} [A^{(n-1)\ell}]_{k,j} + \sum_{h \neq k} [A^{n-\ell}]_{i,h} [A^{(n-1)\ell}]_{h,j} > 0$$

Donc

$$A^{n+\ell(n-2)} > 0$$

Enfin, $\ell \leq n - 1$, donc $n + \ell(n - 2) \leq n + (n - 1)(n - 2) = n^2 - 2n + 2$ car $n - 2 > 0$.

Et d'après la relation en III.2.(c) :

$$A^{n^2-2n+2} > 0$$

- (g) Donner une méthode (par calcul matriciel) pour savoir si il existe un chemin entre tout i, j d'une matrice A positive.

Soit A une matrice positive.

On a vu que A est primitive si et seulement si, pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, il existe un chemin de i à j dans A .

Par ailleurs : A est primitive si et seulement si il existe $m > 0$ tel que $A^m > 0$.

On vient de voir que $m \leq n^2 - 2n + 2$.

Et comme $A^p > 0 \Rightarrow A^{p+k} > 0$ avec $k \geq 0$, on en déduit que :

si A est positive, alors A est primitive si et seulement si $A^{n^2-2n+2} > 0$.

La méthode consiste donc à calculer A^{n^2-2n+2} et regarder si tous les coefficients sont strictement positifs.

IV Étude des puissances d'une matrice primitive

Cette partie utilise uniquement la définition des matrices primitives : elle est pratiquement indépendante de la partie **III**.
Pour toute matrice primitive A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on admet le résultat suivant :

Le rayon spectral $\rho(A)$ de A (dont on sait qu'il est strictement positif) est une valeur propre dominante de A et le sous-espace propre associé est une droite vectorielle qui possède un vecteur directeur $x > 0$.

Dans toute cette partie, on se donne une matrice primitive A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour simplifier les notations, on note r (plutôt que $\rho(A)$) le rayon spectral de A . On rappelle que $r > 0$.

Il est clair que A^T est primitive, et que A et A^T ont le même rayon spectral r .

On peut donc noter $\tilde{x}$ (respectivement $\tilde{y}$) un vecteur directeur strictement positif de la droite $D = \text{Ker}(A - rI_n)$ (respectivement de la droite $\Delta = \text{Ker}(A^T - rI_n)$). On note $H = \text{Im}(A - rI_n)$.

Quitte à multiplier $\tilde{y}$ par un coefficient strictement positif adéquat, on suppose $\tilde{y}^T \times \tilde{x} = 1$.

On note $L = \tilde{x}\tilde{y}^T$ (c'est un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

IV.1. Puissances de la matrice $B = A - rL$

(a) Pourquoi parle-t-on de la droite (vectorielle) Δ et de l'hyperplan H ?

Le théorème admis dit que E_r est un espace de dimension 1. Donc $D = E_r$ est une droite vectorielle.

Le théorème du rang appliqué à $A - rI_n$ énonce : $n = \dim \text{Ker}(A - rI_n) + \dim \text{Im}(A - rI_n) = 1 + \dim H$.

Donc $\dim H = n - 1$ et donc H est bien un hyperplan.

Le théorème admis s'applique également à A^T qui a le même spectre que A .

Donc $\dim \Delta = \dim \text{Ker}(A^T - rI_n) = 1$.

Δ est bien une droite vectorielle, alors que H est bien un hyperplan.

(b) Montrer que $\forall x \in H$ et $y \in \Delta$, $y^T \times x = 0$.

On dit que l'hyperplan H est orthogonal à la droite Δ

Soit $x \in H$ et $y \in \Delta$.

On a donc il existe $a \in \mathbb{R}^n$ tel que $(A - rI_n)a = x$, donc $Aa - ra = x$.

Alors que $(A^T - rI_n)y = 0$, i.e. $A^T y - ry = 0$ donc $A^T y = ry$. En transposant : $y^T A = ry^T$.

$$y^T \times x = y^T \times (A - rI_n)a = y^T Aa - ry^T a = ry^T a - y^T a = 0$$

Donc l'hyperplan H est orthogonal à la droite Δ .

(c) Montrer alors que $\mathbb{R}^n = H \oplus \Delta$.

Soit $x \in H \cap \Delta$, alors d'après la question précédente : $x^T \times x = 0$.

Or $x \in \mathbb{R}^n$ et donc $x^T \times x = \sum_{i=1}^n x_i^2$.

Cette somme de nombres positifs est nulle si et seulement si chaque $x_i = 0$.

Donc $x = 0_n$ et donc $H \oplus \Delta$.

Puis, pour des raisons de dimension : $\dim(\Delta) = 1$, $\dim H = n - 1$, on a $\dim \Delta + \dim H = n = \dim \mathbb{R}^n$.

$\mathbb{R}^n = H \oplus \Delta$

(d) Prouver que L est la matrice (dans la base canonique) de la projection de $\mathbb{R}^n$ sur la droite Δ , parallèlement à H .

Soit p la projection sur la droite D de direction H .

Soit $x \in D$, alors $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $x = k\tilde{x}$. Et donc

$$L \times x = kL \times \tilde{x} = k\tilde{x} \underbrace{\tilde{y}^T \tilde{x}}_{=1} = k\tilde{x} = x$$

Soit $x \in H$, alors en exploitant la question 1.(b)

$$L \times x = \tilde{x}\tilde{y}^T x = 0$$

Donc $H \subset \text{Ker} L$ et $D \in \text{Im} L$ puisque $x = L \times x$, dans ce cas.

Donc $n - 1 = \dim H \leq \dim \text{Ker} L$ et $1 = \dim D \leq \dim \text{Im} L$.

On a alors $n \leq \dim \text{Ker} L + \dim \text{Im} L = n$. Il y a donc égalité dans les inégalités :

Nécessairement : $n - 1 = \dim \text{Ker} L$ et $1 = \dim \text{Im} L$ et donc $H = \text{Ker} L$ et $D = \text{Im} L$.

De même $D \subset \{x \mid L \times x = x\} \subset \text{Im} L$ et donc on a égalité : $L = D = \{x \mid L \times x = x\}$.

Par conséquent si $x \in \text{Im} L \cap \text{Ker} L$: $x = L \times x = 0$, donc la somme est directe,

et pour des raisons de dimension : $\mathbb{R}^n = \text{Im}L \oplus \text{Ker}L = D \oplus H$.
 Tout se passe dans la base canonique :

L est la projection sur $\text{Im}L$ de direction $\text{Ker}L$.

- (e) Vérifier que L est de rang 1, qu'elle est strictement positive, et que $L^T \tilde{y} = \tilde{y}$.

Les colonnes de L sont toutes de la forme $\tilde{y}_j \cdot \tilde{x}$, donc colinéaires à $\tilde{x}$.

Donc $\text{Im}L = \text{vect}(\tilde{y}_j \tilde{x})_j$.

On n'a ni $\tilde{x} = 0$, ni $\tilde{y}$, sinon $\tilde{y}^T \tilde{x} = 0$, donc au moins une des colonnes est non nulle. Ainsi $\text{Im}L = \text{vect}(\tilde{x}) = D$.

Donc L est de rang 1.

Par hypothèse (lié au théorème admis), $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ sont strictement positifs.

Comme $[L]_{i,j} = x_i y_j > 0$, donc

L est strictement positive.

$$L^T \tilde{y} = (\tilde{x} \tilde{y}^T)^T \tilde{y} = \tilde{y} \tilde{x}^T \tilde{y} = \tilde{y} (\tilde{y}^T \tilde{x}) = \tilde{y} 1 = \tilde{y}$$

$$L^T \tilde{y} = \tilde{y}$$

- (f) Montrer que $AL = LA = rL$. En déduire : $\forall m \in \mathbb{N}^*, (A - rL)^m = A^m - r^m L$.

$\tilde{x} \in D$, donc $\tilde{x} \in \text{Ker}(A - rI_n)$ donc $A \times \tilde{x} = r\tilde{x}$.

On a donc

$$AL = A\tilde{x} \tilde{y}^T = r\tilde{x} \tilde{y}^T = rL$$

$\tilde{y} \in \Delta$ donc $\tilde{y} \in \text{Ker}(A^T - rI_n)$, donc $A^T \tilde{y} = r\tilde{y}$, et donc $\tilde{y}^T (A^T)^T = \tilde{y}^T A = r\tilde{y}^T$.

On a donc

$$LA = \tilde{x} \tilde{y}^T A = r\tilde{x} \tilde{y}^T = rL$$

$$AL = LA = rL$$

Posons pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{Q}_m$: « $LA^m = r^m L$ et $(A - rL)^m = A^m - r^m L$. »

— Pour $m = 1$: $LA^1 = r^1 L$ et $(A - rL)^1 = A - rL = A^1 - r^1 L$, donc $\mathcal{Q}_1$ est vraie.

— Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{Q}_m$ est vraie.

Alors d'après $\mathcal{Q}_m$: $LA^{m+1} = LA^m \times A = r^m L \times A$ puis $LA^{m+1} = r^m LA = r^{m+1} L$ d'après le calcul précédent. Puis :

$$\begin{aligned} (A - rL)^{m+1} &= (A - rL)(A - rL)^m = \underbrace{(A - rL)(A^m - r^m L)}_{\mathcal{Q}_m} = A^{m+1} - rLA^m - r^m AL + r^{m+1} L^2 \\ &= A^{m+1} - \underbrace{rLA^m}_{\mathcal{Q}_m} - \underbrace{r^m AL}_{L \text{ projecteur}} + r^{m+1} L = A^{m+1} - r^{m+1} L \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{Q}_{m+1}$ est vraie.

La récurrence étant démontrée, on a en particulier :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, (A - rL)^m = A^m - r^m L$$

IV.2. Etude du spectre de $B = A - rL$.

Dans cette question, on pose $B = A - rL$. On va montrer que $\rho(B) < r$ et en déduire un résultat intéressant sur la suite des puissances successives de A .

Soit λ une valeur propre non nulle de B et soit z un vecteur propre associé (donc non nul).

- (a) Montrer que $Lz = 0$, puis $Az = \lambda z$. En déduire $\rho(B) \leq r$.

$Bz = \lambda z$, donc $Az - rLz = \lambda z$.

Comme $\lambda \neq 0$, $z = \frac{1}{\lambda}(A - rL)z$ et donc $Lz = \frac{1}{\lambda}(LA - rL^2)z = \frac{1}{\lambda}(LA - rL)z = 0$, d'après les questions précédentes.

On a donc $Az - 0 = \lambda z$ et donc $\lambda \in \text{Sp}(A)$, ainsi $|\lambda| \leq r$.

Cette inégalité est également vraie si $\lambda = 0$.

Donc toutes les valeurs absolues des valeurs propres de B sont inférieures à r .

$$Lz = 0, Az = \lambda z. \text{ Puis } \rho(B) \leq r.$$

- (b) Par l'absurde, on suppose $\rho(B) = r$. On peut donc choisir λ de telle sorte que $|\lambda| = r$.
Montrer qu'alors $\lambda = r$ puis $Lz = z$ et aboutir à une contradiction. Conclure.

On a vu à la question précédente, que nécessairement, $Lz = 0$ et donc $Az = \lambda z$.
Mais d'après le théorème admis en début de partie, cela impose $|\lambda| < r$ ou $\lambda = r$.
Donc si $|\lambda| = r$,

$$\boxed{\text{nécessairement : } \lambda = r.}$$

Et donc $Az = rz$, donc $z \in D$, donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $z = k\tilde{x}$.

$$\boxed{Lz = kL\tilde{x} = k\tilde{x} \overbrace{\tilde{y}^T \tilde{x}}^{=1} = k\tilde{x} = z}$$

(Ou : L est la projection sur D).

Ainsi $Bz = (A - rL)z = Az - rLz = rz - rz = 0$. Impossible car $z \neq 0$ (vecteur propre) et $r > 0$.

$$\boxed{\text{Donc } \forall \lambda \in \text{Sp}(B), |\lambda| < r. \text{ Donc } \rho(B) < r.}$$

- (c) Dédurre de ce qui précède que $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{r}A\right)^m = L$.

On admettra que si une matrice M vérifie $\rho(M) < 1$, alors $M^n \rightarrow 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$, i.e : $\forall i, j \in \mathbb{N}_n, [M^n]_{i,j} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On a vu que $B^m = A^m - r^m L$ en fin de question 1.

On a donc $\left(\frac{1}{r}A\right)^m = L + \frac{1}{r^m}B^m$.

Puis, comme on a l'équivalence :

$$B \times x = \lambda \cdots x \iff \frac{1}{r}B \times x = \frac{\lambda}{r} \cdots x$$

alors $\text{Sp}\left(\frac{1}{r}B\right) = \frac{1}{r}\text{Sp}(B) := \left\{\frac{\lambda}{r}, \lambda \in \text{Sp}(B)\right\}$.

Et donc $\rho\left(\frac{1}{r}B\right) = \frac{1}{r}\rho(B) < 1$ d'après la question précédente.

Ainsi la matrice $M = \frac{1}{r}B$ vérifie les hypothèses du résultat admis, donc $M^n \rightarrow 0$.

Ainsi :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \quad \left[\left(\frac{1}{r}A\right)^m\right]_{i,j} = [L]_{i,j} + \left[\left(\frac{1}{r}B\right)^m\right]_{i,j} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} [L]_{i,j}$$

$$\boxed{\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{r}A\right)^m = L}$$