

DEVOIR SURVEILLÉ N°8

Sujet donné le samedi 2 mars 2024, 4h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de la **qualité de la rédaction**, la **précision des raisonnements** et l'énoncé des **formules utilisées**. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.

BON TRAVAIL

PROBLÈME - DÉVELOPPEMENT APPROCHÉ FRACTIONNAIRE

Objectifs du problème :

Le but du problème est de trouver la meilleure approximation rationnelle à degré(s) contrôlé(s) de n'importe quelle fonction à partir de son développement limité.

Notation du problème :

Lorsqu'il n'est pas explicitement précisé, le corps d'étude des polynômes ou des matrices est $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Sans confusion, on note pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $[P]_k$, le coefficient de P associé au monôme X^k , et pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $[M]_{i,j}$, le coefficient en ligne i et colonne j de la matrice M .

$\mu(\alpha, P)$ désigne la valeur de l'ordre de multiplicité de α en tant que racine de P .

On rappelle que : $\tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

I Calculs et algorithme mystère

On considère l'algorithme mystère, qui prend comme argument : $A \in \mathbb{R}[X]$, $B \in \mathbb{R}[X]$ avec $B(0) \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$:

```

1 myst(A, B, n) :
2   Q = 0
3   R = A
4   Pour i de 0 à n faire :
5     c = R(0)/B(0)
6     Q = Q + cX^i
7     R = (R - cB)/X
8   renvoyer (Q, R)

```

On étudiera et exploitera cet algorithme à partir des questions I.3.

I.1. On appelle secante, l'application notée $\sec$ et définie par $\sec : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\cos x}$.

(a) Donner le $DL_8(0)$ de $\sec$.

(b) Où se trouve $\sec(x)$ dans le cercle trigonométrique pour un angle de x radians ?

I.2. On note $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$.

(a) Donner le $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$.

En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que le $DL_3(1)$ de f est $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \frac{1}{e-1} - \frac{1}{(e-1)^2}(x-1) + \frac{3e-e^2}{2(e-1)^3}(x-1)^2 + \frac{e^3-2e^2-2e}{3(e-1)^4}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$

(c) Donner le développement asymptotique f pour $x \rightarrow +\infty$ selon l'échelle $\mathcal{L} : \{(x^\alpha e^{\beta x}), \alpha, \beta\}$ à la précision xe^{-3x} .

I.3. Compréhension de l'algorithme **myst**

(a) On considère $A = X^3 + 2X^2 - X + 1$ et $B = X^2 - 3X + 1$ (pour cette question (a) uniquement). Evaluer $\text{myst}(A, B, 2)$.

(b) Montrer qu'en ligne 7 de l'algorithme, on a bien toujours $R - cB$ qui est divisible par X .

(c) On note, pour le tour de boucle i , Q_i et R_i les valeurs prises respectivement par Q et R .

Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $Q_i B + X^{i+1} R_i$ est constant (ou encore $Q B + X^{i+1} R$ est un invariant de boucle).

(d) A quoi sert l'algorithme **myst** ?

En particulier, quelle est la relation obtenue avec les polynômes donnés par $\text{myst}(A, B, n)$?

I.4. Exploitation de **myst**

(a) Comment exploiter l'algorithme **myst** pour obtenir le $DL_n(0)$ d'une fraction rationnelle ?

Retrouver la troncature d'ordre 4 du $DL_8(0)$ de $\sec$ (i.e. le $DL_4(0)$ de $\sec$)

(b) Soit $P = 1 + 2X + 3X^2 + 3X^3 + 2X^4 + X^5$ et $Q = X^5$. Montrer que $P \wedge Q = 1$.

En exploitant **myst** trouver U et V tels que $UP + VQ = 1$

(c) On considère la fraction rationnelle $F = \frac{1}{(X^2 - 1)^4}$.

Décomposer F en éléments simples en faisant les changements de variables $U_1 = X + 1$ puis $U_2 = X - 1$ et en exploitant **myst**.

II Polynôme à coefficients retournés

On fixe un entier n .

On considère dans $\mathbb{K}[X]$, l'application $\theta : P \mapsto X^{\deg P} P(1/X)$ si $P \neq 0$ et $\theta(0) = 0$ et dans $\mathbb{K}_n[X]$, $\theta_n : P \mapsto X^n P(1/X)$.

- II.1. Donner l'expression de $\theta(P)$ et $\theta_n(P)$ si $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ (avec $d \leq n$ et $a_d \neq 0$ i.e. $d = \deg P$).
- II.2. Applications : donner l'expression de $\theta(P)$ et $\theta_n(P)$ si $n = 5$ et :
 — $P_1 = 1 + 2X + 3X^2 + 4X^3 + 5X^4$
 — $P_2 = -X^2 + X^5$
- II.3. A-t-on, pour tout polynôme $P : \theta \circ \theta(P) = P$?
 A-t-on, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X] : \theta_n \circ \theta_n(P) = P$?
 Si la réponse est affirmative : on démontre le résultat ; si elle est négative : on donne un contre-exemple
- II.4. A-t-on, pour tout polynôme $P, Q : \theta(P + Q) = \theta(P) + \theta(Q)$?
 A-t-on, pour tout polynôme $P, Q \in \mathbb{K}_n[X] : \theta_n(P + Q) = \theta_n(P) + \theta_n(Q)$?
 Si la réponse est affirmative : on démontre le résultat ; si elle est négative : on donne un contre-exemple
- II.5. On considère $P \in \mathbb{K}_n[X]$ avec $\deg P = d$ et $[P]_0 \neq 0$.
 (a) Montrer $P(0) \neq 0$
 (b) Soit α une racine de P . Montrer que $\frac{1}{\alpha}$ est une racine de $\theta_n(P)$.
 (c) Que dire des ordres de multiplicité $\mu(\alpha, P)$ par rapport à $\mu(\frac{1}{\alpha}, \theta_n(P))$?
- II.6. Comment décrire l'algorithme `myst` de la partie précédente à l'aide de θ et des θ_k et de la division euclidienne ?

III Matrices de Hankel et système inversible

On considère une suite $c = (c_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de nombres réels.

On fixe trois entiers p, q, n tel que $p + q = n$. Et on considère dans cette partie une fonction f admettant un développement limité

d'ordre n en 0 : $f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k + o(x^n)$.

Notre but est de trouver une fraction rationnelle $\frac{P(X)}{Q(X)}$ telle que $\deg P = p$, $\deg Q = q$ et $f(x) - \frac{P(x)}{Q(x)} = o(x^{p+q})$.

Pour faire cette étude, nous aurons besoin de matrices particulières.

On appelle matrice de Hankel de c et k , d'ordre n , la matrice notée $H_n^k(c)$ ou souvent simplement H_n^k (si c est clairement sous-entendu) :

$$H_n^k = \begin{pmatrix} c_k & c_{k+1} & \cdots & c_{k+n-1} \\ c_{k+1} & c_{k+2} & \ddots & c_{k+n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{k+n-1} & c_{k+n} & \cdots & c_{k+2n-2} \end{pmatrix}$$

On a donc $[H_n^k]_{i,j} = c_{k+i+j-2}$, pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$. H_n^k est donc carrée, d'ordre n et son premier terme est $[H_n^k]_{1,1} = c_k$

III.1. Montrer que si $F = \frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle telle que $Q(0) \neq 0$, on peut choisir un représentant $\frac{\bar{P}}{\bar{Q}}$ de F avec $\bar{Q}(0) = 1$.

On suppose qu'il existe $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^q b_k X^k$, avec $\underline{Q(0) = b_0 = 1}$ et tel que $\frac{P(x)}{Q(x)} - f(x) = o(x^n)$.

III.2. Montrer qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\sum_{k=0}^p a_k X^k - (\sum_{k=0}^q b_k X^k) \times (\sum_{k=0}^n c_k X^k) = X^{n+1} \times R(X)$.

III.3. En déduire que (avec la convention $b_h = 0$ si $h > q$) :

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, a_k = \sum_{i=0}^k c_i b_{k-i} \quad \forall k \in \llbracket p+1, n \rrbracket, 0 = \sum_{i=k-q}^k c_i b_{k-i} = \sum_{j=0}^q c_{k-j} b_j$$

III.4. Puis montrer qu'on a les relations matricielles :

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_p \\ 0 & c_0 & c_1 & \cdots & c_{p-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & c_0 & c_1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_p \\ b_{p-1} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_p \\ a_{p-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_q^{p-q+1} \times \begin{pmatrix} b_q \\ b_{q-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{p+1} \\ c_{p+2} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

- III.5. Réciproquement, montrer que pour $n = p + q$, si H_q^{p-q+1} est une matrice inversible, alors il existe une fraction rationnelle dont le numérateur P est de degré p , le dénominateur Q est de degré q et telle que $\frac{P}{Q}$ ait la même partie principale que le $DL_n(0)$ de f .
- III.6. Application : donner (si possible) une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ tel que $\deg P = 3$, $\deg Q = 2$ et $\frac{P}{Q} \underset{x \rightarrow 0}{=} \tan x + o(x^5)$.
Le $DL_5(0)$ de $\tan$ est donné dans l'énoncé.

IV Polynômes orthogonaux

On considère toujours une suite $c = (c_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de nombres réels.

On suppose que pour tout $k, n \in \mathbb{N}^*$, la matrice H_n^k définie précédemment est une matrice inversible.

On considère également l'application linéaire Φ_c , plus souvent notée $\Phi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}$, $P \mapsto \sum_{k=0}^{\deg P} [P]_k c_k$.

Cette application est qualifiée de linéaire car elle vérifie : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, P, Q \in \mathbb{R}[X], \Phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda \Phi(P) + \mu \Phi(Q)$ (admis).

On dit qu'une famille $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de polynômes est orthogonale par rapport à (la suite) c si :

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg T_k = k$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour tout $i < k$, $\Phi(X^i \times T_k) = 0$

On dit que (T_k) est une famille de polynômes orthogonaux unitaires, si, en outre, chaque T_k est unitaire.

IV.1. Autour de Φ .

- (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, et tout $P \in \mathbb{R}[X]$, exprimer (sans démonstration) $[P]_k$ en fonction de la dérivées d'ordre k de P .
- (b) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, que vaut $\Phi(X^i)$?

IV.2. Relation entre familles de polynômes orthogonaux. Unicité d'une famille unitaire.

- (a) Montrer que si $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes orthogonaux par rapport à c , alors il existe une famille de polynômes orthogonaux unitaires par rapport à c .
On donnera un moyen simple d'obtenir cette seconde famille à partir de $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$.
- (b) Montrer que si $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes orthogonaux, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\Phi(R \times T_n) = 0$.

On considère (S_k) une famille de polynômes orthogonaux et unitaires tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\deg S_k = k$.

On suppose également que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Phi(S_k^2) \neq 0$.

- (c) Montrer que pour $i < k$, $\Phi(S_i S_k) = 0$.

- (d) Montrer, que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe une famille $(\lambda_0; \lambda_1, \dots, \lambda_{\deg P}) \in \mathbb{R}^{\deg P + 1}$ tel que $P = \sum_{i=0}^{\deg P} \lambda_i S_i$.

On pourra raisonner par récurrence sur $\deg P$.

Montrer alors que pour tout $k \in \llbracket 0, \deg P \rrbracket$, $\lambda_k = \frac{\Phi(S_k P)}{\Phi(S_k^2)}$.

- (e) Dédire des deux questions précédentes que $S_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Phi(S_k X^n)}{\Phi(S_k^2)} S_k$
- (f) Montrer qu'il existe au plus une famille de polynômes orthogonaux unitaire.
- (g) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi(S_n^2) = \Phi(X^n S_n) = \sum_{i=0}^n [S_n]_{iC_i+n}$

IV.3. Existence d'une famille de polynômes orthogonaux unitaire.

La relation nécessaire trouvée en 2.(e) : $S_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Phi(S_k X^n)}{\Phi(S_k^2)} S_k$ permet de définir une famille de polynômes orthogonaux

unitaire par récurrence. Il suffit donc qu'à chaque étape (définition de S_n à partir de $S_0, \dots, S_{n-1}$) on ait $\Phi(S_k^2) \neq 0$ ($k < n$).
On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on a construit $(S_0, S_1, \dots, S_{n-1})$ orthogonale et unitaire et S_n est définie comme précédemment.

- (a) On note $S \downarrow$, la matrice colonne dont le coefficient en ligne i est $[S_n]_{i-1}$.
Evaluer $H_{n+1}^0 \times S \downarrow$ (on rappelle que H_{n+1}^0 est une matrice de Henkel définie en partie III).
- (b) Montrer que $S \downarrow$ est non nul.
- (c) Montrer que si $\Phi(S_n^2) = 0$, alors $S \downarrow$ est nécessairement nul. Conclure.

IV.4. Relation de récurrence pour les polynômes orthogonaux et unitaires.

On considère la famille (S_k) de polynômes orthogonaux (pour Φ) unitaires. On fixe $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Montrer qu'il existe un unique couple $(a, R_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $S_{n+1} = (X + a) \times S_n + R_n$
- (b) Montrer que pour tout $j < n - 1$, $\Phi(S_j R_n) = 0$. En déduire qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $R_n = b S_{n-1}$.

- (c) Montrer, alors que $a = -\frac{\Phi(X S_n^2)}{\Phi(S_n^2)}$ et $b = -\frac{\Phi(X S_n S_{n-1})}{\Phi(S_{n-1}^2)}$.

On définit, réciproquement, par récurrence deux familles de polynômes : $(Q_k)_{k \in \llbracket -1, +\infty \rrbracket}$ et $(P_k)_{k \in \llbracket -1, +\infty \rrbracket}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{-1} = 0 \\ Q_0 = 1 \\ \forall k \in \mathbb{N} : Q_{k+1} = \left(X - \underbrace{\frac{\Phi(XQ_k^2)}{\Phi(X^k Q_k)}}_{:=a_k} \right) \times Q_k + \underbrace{\frac{-\Phi(X^k Q_k)}{\Phi(X^{k-1} Q_{k-1})}}_{:=b_k} Q_{k-1} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{-1} = -1 \\ P_0 = 0 \\ \forall k \in \mathbb{N} : P_{k+1} = (X - a_k) \times P_k + b_k P_{k-1} \end{array} \right.$$

(On rappelle qu'on a vu que pour $(S_n) : \Phi(S_n^2) = \Phi(X^n S_n)$, on peut montrer aussi que $\Phi(X S_n S_{n-1}) = \Phi(X^n S_n)$.)

IV.5. On considère ces deux suites de polynômes, mais dans le cas général (c presque quelconque).

- (a) Montrer qu'on trouve bien $Q_1 = X - \frac{c_1}{c_0}$
- (b) On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = Q_n P_{n-1} - Q_{n-1} P_n$.
Quelle relation simple existe-t-il entre T_{n+1} et T_n ?
- (c) En déduire $P_n \wedge Q_n$.

IV.6. Lien entre $\frac{P}{Q}$ de la partie III et les polynômes orthogonaux.

On rappelle que nous avons vu en partie III : $\forall k \in \llbracket p+1, n \rrbracket, \sum_{j=0}^q c_{k-j} b_j = 0$ et $b_0 = 1$

- (a) Montrer que si $\frac{P}{Q}$ est une approximation de f (associée à (c)) d'ordre $n = p + q$ avec $p = q - 1$, on a nécessairement $Q = \theta_q(S_n)$
- (b) (*) Conclure qu'à partir des polynômes (Q_n) et (P_n) obtenue par la récurrence, on a la relation :

$$\frac{\theta(P_n)}{\theta(Q_n)} = f(x) + o(x^{2n-1})$$

$$\text{où } f = \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{2n-1} c_k x^k + o(x^{2n-1})$$

Correction

PROBLÈME - DÉVELOPPEMENT APPROCHÉ FRACTIONNAIRE

I Calculs et algorithme mystère

On considère l'algorithme mystère, qui prend comme argument : $A \in \mathbb{R}[X]$, $B \in \mathbb{R}[X]$ avec $B(0) \neq 0$ et $n \in \mathbb{N}$:

```

1 myst(A, B, n) :
2   Q = 0
3   R = A
4   Pour i de 0 à n faire :
5     c = R(0)/B(0)
6     Q = Q + cX^i
7     R = (R - cB)/X
8   renvoyer (Q, R)

```

I.1. On appelle secante, l'application notée $\sec$ et définie par $\sec : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{\cos x}$.

(a) Donner le $DL_8(0)$ de $\sec$.

$0 \in \mathcal{D}_{\sec}$. Au voisinage de 0

$$\begin{aligned}
 \sec(x) &=_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - \underbrace{\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 - \frac{1}{40320}x^8 + o(x^8)\right)}_{u \sim x^2/2}} \\
 &=_{x \rightarrow 0} 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + o(u^4) \\
 &=_{x \rightarrow 0} 1 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 - \frac{1}{40320}x^8\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4\right)^3 + \left(\frac{1}{2}x^2\right)^4 + o(x^4) \\
 &=_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{1}{720}x^6 + \frac{-1 + 56 + 70 + 2520 - 1260}{40320}x^8 + o(x^8) \\
 &=_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + o(x^8)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\sec(x) =_{x \rightarrow 0} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \frac{61}{720}x^6 + \frac{277}{8064}x^8 + o(x^8)}$$

(b) Où se trouve $\sec(x)$ dans le cercle trigonométrique pour un angle de x radians ?

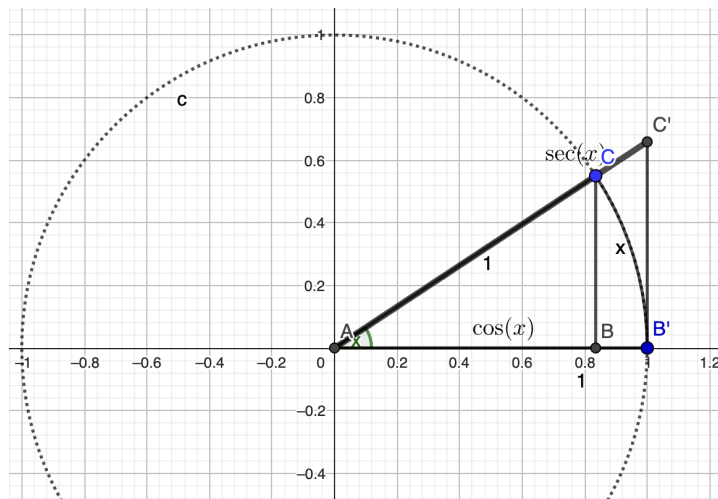
$$\text{On a } \sec(x) = \frac{\sec(x)}{1} = \frac{1}{\cos x}.$$

Donc d'après le théorème de Thalès : $\sec(x)$ est à 1 ce que 1 est à $\cos(x)$; ou encore il faut trouver un triangle naturel avec 1 et $\cos x$ comme deux des trois côtés, puis trouver un autre triangle, semblable au premier, où 1 est la mesure d'un côté associé à celui de $\cos x$, alors dans ce triangle $\sec(x)$ sera la longueur du côté associé à 1 pour le premier triangle.

C'est exactement ce qui se passe pour les triangle ABC et $AB'C'$ de la figure :

- Ils sont semblables
- $AB = \cos x$ et $AC = 1$
- $AB' = 1$

Donc $AC' = \sec(x)$.



On imagine ce qui se passe pour des angles $x \in \left] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$, par périodicité.

I.2. On note $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$.

- (a) Donner le $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto \frac{x}{e^x - 1}$.
En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a $e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$ (on part à l'ordre 4 car il y aura une simplification par x).
Donc, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{1}{1 + \underbrace{\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)}_{=u \sim x}} = 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3\right) + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x\right)^3 + o(x^3) \\ &\underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right)x^2 + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right)x^3 + o(x^3) \\ &\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + 0x^3 + o(x^3)} \end{aligned}$$

f est, par division dérivable sur son ensemble naturel de définition : $\mathbb{R}^*$.
Puis, f admet un $DL_1(0)$, donc elle est continue et dérivable en 0.

$$\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}.}$$

- (b) Montrer que le $DL_3(1)$ de f est $f(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \frac{1}{e-1} - \frac{1}{(e-1)^2}(x-1) + \frac{3e-e^2}{2(e-1)^3}(x-1)^2 + \frac{e^3-2e^2-2e}{3(e-1)^4}(x-1)^3 + o((x-1)^3)$

On pose $t = x - 1 \iff x = 1 + t$. Au voisinage de 1 pour x ou de 0 pour t :

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow 1}{=} \frac{1+t}{e^{1+t}-1} = \frac{1+t}{-1+e \times e^t} = \frac{1+t}{-1+e(1+t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3+o(t^3))} \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1+t}{(-1+e)(1+\frac{e}{e-1}t+\frac{e}{2(e-1)}t^2+\frac{e}{6(e-1)}t^3+o(t^3))} \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1}{-1+e}(1+t) \left(1 + \frac{e}{e-1}t + \frac{e}{2(e-1)}t^2 + \frac{e}{6(e-1)}t^3 + o(t^3)\right)^{-1} \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1}{e-1}(1+t) \left(1 - \left[\frac{e}{e-1}t + \frac{e}{2(e-1)}t^2 + \frac{e}{6(e-1)}t^3\right] + \left[\frac{e}{e-1}t + \frac{e}{2(e-1)}t^2\right]^2 - \left[\frac{e}{e-1}t\right]^3 + o(t^3)\right) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1}{e-1}(1+t) \left(1 - \frac{e}{e-1}t + \left[-\frac{e}{2(e-1)} + \frac{e^2}{(e-1)^2}\right]t^2 + \left[-\frac{e}{6(e-1)} + \frac{e^2}{(e-1)^2} - \frac{e^3}{(e-1)^3}\right]t^3 + o(t^3)\right) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1}{e-1}(1+t) \left(1 - \frac{e}{e-1}t + \frac{e^2+e}{2(e-1)^2}t^2 - \frac{e^3+4e^2+e}{6(e-1)^3}t^3 + o(t^3)\right) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1}{e-1} \left(1 + \left[1 - \frac{e}{e-1}\right]t + \left[\frac{e^2+e}{2(e-1)^2} - \frac{e}{e-1}\right]t^2 + \left[\frac{e^2+e}{2(e-1)^2} - \frac{e^3+4e^2+e}{6(e-1)^3}\right]t^3 + o(t^3)\right) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} \frac{1}{e-1} \left(1 - \frac{1}{e-1}t + \frac{3e-e^2}{2(e-1)^2}t^2 + \frac{e^3-2e^2-2e}{3(e-1)^3}t^3 + o(t^3)\right) \end{aligned}$$

On trouve donc, pour x au voisinage de 1 :

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 1}{=} \frac{1}{e-1} - \frac{1}{(e-1)^2}(x-1) + \frac{3e-e^2}{2(e-1)^3}(x-1)^2 + \frac{e^3-2e^2-2e}{3(e-1)^4}(x-1)^3 + o((x-1)^3)}$$

- (c) Donner le développement asymptotique f pour $x \rightarrow +\infty$ selon l'échelle $\mathcal{L} : \{(x^\alpha e^{\beta x}), \alpha, \beta\}$ à la précision xe^{-3x} .

L'ordre de l'échelle est donné par les équivalences suivantes :

$$x^\alpha e^{\beta x} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(x^{\alpha'} e^{\beta' x}\right) \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha e^{\beta x}}{x^{\alpha'} e^{\beta' x}} = 0 \iff \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-\alpha'} e^{(\beta-\beta')x} = 0 \iff \begin{cases} \beta < \beta' \\ \text{ou} \\ \beta = \beta' \text{ et } \alpha < \alpha' \end{cases}$$

On fait le développement asymptotique en question. Comme e^x est dominant au voisinage de $+\infty$:

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{x}{(1-e^{-x})e^x} = xe^{-x}[1-e^{-x}]^{-1} = xe^{-x}[1+e^{-x}+e^{-2x}+o(e^{-2x})] \\ &\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} xe^{-x} + xe^{-2x} + xe^{-3x} + o(xe^{-3x})} \end{aligned}$$

I.3. Compréhension de l'algorithme `myst`

- (a) On considère $A = X^3 + 2X^2 - X + 1$ et $B = X^2 - 3X + 1$ (pour cette question (a) uniquement). Evaluer $\mathbf{myst}(A, B, 2)$.

On note i à gauche qui indique le tour de boucle :

i	c	Q	R
-1		0	$X^3 + 2X^2 - X + 1$
0	$1/1 = 1$	$X^0 = 1$	$(X^3 + 2X^2 - X + 1 - X^2 + 3X - 1)/X = X^2 + X + 2$
1	$2/1 = 2$	$1 + 2X$	$(X^2 + X + 2 - 2X^2 + 6X - 2)/X = -X + 7$
2	$7/1 = 7$	$1 + 2X + 7X^2$	$(-X + 7 - 7X^2 + 21X - 7)/X = -7X + 20$

On a donc $\mathbf{myst}(A, B, 2) = (1 + 2X + 7X^2, -7X + 20)$.

- (b) Montrer qu'en ligne 7 de l'algorithme, on a bien toujours $R - cB$ qui est divisible par X .

P est divisible par X est équivalent à 0 est racine de P .

Or $(R - cB)(0) = R(0) - cB(0) = 0$ car $c = \frac{R(0)}{B(0)}$, donc

On a bien toujours $R - cB$ qui est divisible par X .

- (c) On note, pour le tour de boucle i , Q_i et R_i les valeurs prises respectivement par Q et R .
Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $Q_i B + X^{i+1} R_i$ est constant (ou encore $QB + X^{i+1} R$ est un invariant de boucle).

Lors de la boucle $i + 1$, on a :

$$Q_{i+1} = Q_i + cX^{i+1}, \text{ avec } c = \frac{R_i(0)}{B(0)}, \text{ puis } R_{i+1} = (R_i - cB)/X, \text{ donc } XR_{i+1} = R_i - cB.$$

Donc

$$Q_{i+1}B + X^{i+2}R_{i+1} = Q_iB + cX^{i+1}B + X^{i+1}R_i - cX^{i+1}B = Q_iB + X^{i+1}R_i$$

- (d) A quoi sert l'algorithme $\mathbf{myst}$?
En particulier, quelle est la relation obtenue avec les polynômes donnés par $\mathbf{myst}(A, B, n)$?

Initialement, cette suite vaut : $Q_{-1}B + X^0R_{-1} = 0 + 1A = A$, donc elle est tout le temps égal à A .

Et en fin de boucle, on trouve

$$A = QB + X^{n+1}R \text{ avec } (Q, R) = \mathbf{myst}(A, B, n).$$

On notera que Q est de degré au plus n .

En fait, il s'agit de la division euclidienne de A par B dans le sens des puissances croissantes jusqu'à l'ordre X^n . Sur l'exemple précédent, on a

$$1 - X + 2X^2 + X^3 = (1 - 3X + X^2)(1 + 2X + 7X^2) + X^3(20 - 7X)$$

I.4. Exploitation de $\mathbf{myst}$

- (a) Comment exploiter l'algorithme $\mathbf{myst}$ pour obtenir le $DL_n(0)$ d'une fraction rationnelle ?
Retrouver la troncature d'ordre 4 du $DL_8(0)$ de sec (i.e. le $DL_4(0)$ de sec)

On trouve avec l'algorithme précédent : $\frac{A}{B} = Q + X^{n+1}R$ où R est un polynôme, donc borné en 0.

Cela donne donc au voisinage de 0 : $\frac{A(x)}{B(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} Q(x) + o(x^n)$ où Q est un polynôme de degré n , c'est le $DL_n(0)$ de $\frac{A}{B}$.

Donc calculons $\mathbf{myst}(1, 1 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{24}X^4 - \frac{1}{720}X^6 + \frac{1}{40320}X^8, 4)$. On trouve :

i	c	Q	R
-1		0	
0	1	1	$\frac{1}{2}X - \frac{1}{24}X^3 + \frac{1}{720}X^5 - \frac{1}{40320}X^7$
1	0	1	$\frac{1}{2} - \frac{1}{24}X^2 + \frac{1}{720}X^4 - \frac{1}{40320}X^6$
2	$\frac{1}{2}$	$1 + \frac{1}{2}X^2$	$\frac{5}{24}X - \frac{7}{360}X^3 + \frac{3}{4480}X^5 - \frac{1}{80640}X^7$
3	0	$1 + \frac{1}{2}X^2$	$\frac{5}{24} - \frac{7}{360}X^2 + \frac{3}{4480}X^4 - \frac{1}{80640}X^6$
4	$\frac{5}{24}$	$1 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{5}{24}X^4$	R_4

On a alors $1 = (1 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{24}X^4 - \frac{1}{720}X^6 + \frac{1}{40320}X^8)(1 + \frac{1}{2}X^2 + \frac{5}{24}X^4) + X^5 R_4$

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + o(x^4)$$

- (b) Soit $P = 1 + 2X + 3X^2 + 3X^3 + 2X^4 + X^5$ et $Q = X^5$. Montrer que $P \wedge Q = 1$.
En exploitant **myst** trouver U et V tels que $UP + VQ = 1$

Q admet une seule racine (dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$) : 0 qui est d'ordre 5.

Donc si $\Delta = P \wedge Q$, nécessairement, 0 est racine de Δ (ou $X|\Delta$).

Dans ce cas, comme $\Delta|P$, on aurait $P(0) = 0$. Ce qui est absurde.

$$P \wedge Q = 1$$

On cherche donc $1 = PU + X^5 V$. En appliquant l'algorithme **myst** à 1 et P , à l'ordre 4, on trouve la réponse à cette question.

i	c	Q	R
-1		0	1
0	1	1	$-2 - 3X - 3X^2 - 2X^3 - X^4$
1	-2	$1 - 2X$	$1 + 3X + 4X^2 + 3X^3 + 2X^4$
2	1	$1 - 2X + X^2$	$1 + X - X^4$
3	1	$1 - 2X + X^2 + X^3$	$-1 - 3X - 3X^2 - 3X^3 - X^4$
4	-1	$1 - 2X + X^2 + X^3 - X^4$	$-1 + X^3 + X^4$

On trouve donc

$$1 = \overbrace{(1 + 2X + 3X^2 + 3X^3 + 2X^4 + X^5)}^P (1 - 2X + X^2 + X^3 - X^4) + \overbrace{X^5}^Q (-1 + X^3 + X^4)$$

- (c) On considère la fraction rationnelle $F = \frac{1}{(X^2 - 1)^4}$.

Décomposer F en éléments simples en faisant les changements de variables $U_1 = X + 1$ puis $U_2 = X - 1$ et en exploitant **myst**.

Les pôles de F sont 1 et -1, chacun d'ordre 4.

Donc il existe $a_1, b_1, c_1, d_1, a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, d_{-1}$ tels que

$$F(X) = \frac{a_1}{X-1} + \frac{b_1}{(X-1)^2} + \frac{c_1}{(X-1)^3} + \frac{d_1}{(X-1)^4} + \frac{a_{-1}}{X+1} + \frac{b_{-1}}{(X+1)^2} + \frac{c_{-1}}{(X+1)^3} + \frac{d_{-1}}{(X+1)^4}$$

Si on multiplie par $(X-1)^4$ cette relation, on trouve :

$$(X-1)^4 F(X) = \frac{1}{(X+1)^4} = d_1 + c_1(X-1) + b_1(X-1)^2 + a_1(X-1)^3 + (X-1)^4$$

Puis en posant $U_1 = X - 1$ et multipliant par $\S(U_1 + 2)^2$, on trouve

$$1 = (U_1 + 2)^4 \times (d_1 + c_1 U_1 + b_1 U_1^2 + a_1 U_1^3) + U_1^4 R(U_1)$$

Et donc en appliquant **myst** à $A = 1$ et $B = (X+2)^4 = X^4 + 8X^3 + 24X^2 + 32X + 16$, le polynôme Q obtenu nous donne directement tous les nombres a_1, b_1, c_1 et d_1 .

La division par la puissance croissante (i.e **myst**) donne :

$$1 = (16 + 32X + 24X^2 + 8X^3 + X^4) \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{8}X + \frac{5}{32}X^2 - \frac{5}{32}X^3 \right) + X^4 R_1(X)$$

Et de manière symétrique (en posant $U_2 = X + 1$, on est amené à calculer :

$$1 = (16 - 32X + 24X^2 - 8X^3 + X^4) \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{8}X + \frac{5}{32}X^2 + \frac{5}{32}X^3 \right) + X^4 R_2(X)$$

Et donc

$$\frac{1}{(X^2 - 1)^4} = \frac{-5}{32(X-1)} + \frac{5}{32(X-1)^2} - \frac{1}{8(X-1)^3} + \frac{1}{16(X-1)^4} + \frac{5}{32(X+1)} + \frac{5}{32(X+1)^2} + \frac{1}{8(X+1)^3} + \frac{1}{16(X+1)^4}$$

II Polynôme à coefficients retournés

On fixe un entier n .

On considère dans $\mathbb{K}[X]$, l'application $\theta : P \mapsto X^{\deg P} P(1/X)$ si $P \neq 0$ et $\theta(0) = 0$ et dans $\mathbb{K}_n[X]$, $\theta_n : P \mapsto X^n P(1/X)$

II.1. Donner l'expression de $\theta(P)$ et $\theta_n(P)$ si $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ (avec $d \leq n$ et $a_d \neq 0$ i.e. $d = \deg P$).

$$\theta(P)(X) = X^d \sum_{k=0}^d a_k \frac{1}{X^k} = \sum_{k=0}^d a_k X^{d-k} = \sum_{h=0}^d a_{d-h} X^h$$

$$\theta_n(P)(X) = X^n \sum_{k=0}^d a_k \frac{1}{X^k} = \sum_{k=0}^d a_k X^{n-k} = \sum_{h=n-d}^n a_{n-h} X^h$$

II.2. Applications : donner l'expression de $\theta(P)$ et $\theta_n(P)$ si $n = 5$ et :

- $P_1 = 1 + 2X + 3X^2 + 4X^3 + 5X^4$
- $P_2 = -X^2 + X^5$

$$\theta(P_1)(X) = 5 + 4X + 3X^2 + 2X^3 + X^4 \quad \theta_5(P_1)(X) = 5X + 4X^2 + 3X^3 + 2X^4 + X^5$$

$$\theta(P_2)(X) = 1 - X^3 \quad \theta_5(P_2)(X) = 1 - X^3$$

II.3. A-t-on, pour tout polynôme $P : \theta \circ \theta(P) = P$?

A-t-on, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X] : \theta_n \circ \theta_n(P) = P$?

Si la réponse est affirmative : on démontre le résultat ; si elle est négative : on donne un contre-exemple

Si on reprend le cas avec $n = 5$ et $P_3 = -X + X^2$, par exemple, on trouve : $\theta \circ \theta(P_3) = \theta(1 - X) = -1 + X \neq P_3$

$$\text{Donc on n'a pas pour tout polynôme } P, \theta \circ \theta(P) = P.$$

En revanche, pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$ (même avec $a_n = 0 \dots$), on trouve :

$$\theta_n(\theta_n(P)) = X^n \sum_{h=0}^n a_{n-h} \frac{1}{X^h} = \sum_{h=0}^n a_{n-h} X^{n-h} = \sum_{k=0}^n a_k X^k = P$$

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], \quad \theta_n \circ \theta_n(P) = P$$

II.4. A-t-on, pour tout polynôme $P, Q : \theta(P + Q) = \theta(P) + \theta(Q)$?

A-t-on, pour tout polynôme $P, Q \in \mathbb{K}_n[X] : \theta_n(P + Q) = \theta_n(P) + \theta_n(Q)$?

Si la réponse est affirmative : on démontre le résultat ; si elle est négative : on donne un contre-exemple

Prenons un contre-exemple : $P = X$, donc $\theta(P) = 1$ et $Q = X^2 - 1$, donc $\theta(Q) = 1 - X^2$.

Et pourtant $\theta(P + Q) = \theta(X^2 + X - 1) = 1 + X - X^2 \neq 2 - X^2 = \theta(P) + \theta(Q)$.

En revanche, pour tout $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^n b_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$ (même avec $a_n = 0$, $b_n = 0 \dots$), on trouve :

$$\theta_n(P + Q) = \sum_{h=0}^n (a_{n-h} + b_{n-h}) X^h = \sum_{h=0}^n a_{n-h} X^h + \sum_{h=0}^n b_{n-h} X^h = \theta_n(P) + \theta_n(Q)$$

$$\theta \text{ n'est pas linéaire. } \theta_n \text{ est linéaire.}$$

II.5. On considère $P \in \mathbb{K}_n[X]$ avec $\deg P = d$ et $[P]_0 \neq 0$.

(a) Montrer $P(0) \neq 0$

$P(0) = [P]_0$. Donc par hypothèse :

$$P(0) \neq 0$$

- (b) Soit α une racine de P . Montrer que $\frac{1}{\alpha}$ est une racine de $\theta_n(P)$.

Nécessairement, $\alpha \neq 0$, d'après la question précédente.

On a ensuite

$$[\theta_n(P)] \left(\frac{1}{\alpha} \right) = \left(\frac{1}{\alpha} \right)^n \times P \left(\frac{1}{1/\alpha} \right) = \left(\frac{1}{\alpha} \right)^n \times P(\alpha) = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{\alpha} \text{ est une racine de } \theta_n(P).}$$

- (c) Que dire des ordres de multiplicité $\mu(\alpha, P)$ par rapport à $\mu(\frac{1}{\alpha}, \theta_n(P))$?

Soit α une racine de P . On note $m = \mu(\alpha, P) (\leq n)$ son ordre de multiplicité.

Donc il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^m Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$ et $\deg Q = \deg P - m$.

On a alors

$$\theta_n(P) = X^n \times P \left(\frac{1}{X} \right) = X^n \left(\frac{1}{X} - \alpha \right)^m Q \left(\frac{1}{X} \right) = (1 - \alpha X)^m \times X^{n-m} Q \left(\frac{1}{X} \right)$$

Comme $\deg Q \leq \deg P - m \leq n - m$, donc $X^{n-m} Q \left(\frac{1}{X} \right) = \theta_{n-m}(Q)$ est un polynôme de $\mathbb{K}_{n-m}[X]$.

Ainsi, il existe $\tilde{Q} \in \mathbb{K}_{n-m}[X]$ tel que $\theta_n(P) = \alpha^m \times \left(\frac{1}{\alpha} - X \right)^m \times \tilde{Q}$.

Par conséquent $\frac{1}{\alpha}$ est une racine de $\theta_n(P)$ d'un ordre supérieur ou égal à $m = \mu(\alpha, P)$.

Puis, on a donc $\alpha = \frac{1}{\frac{1}{\alpha}}$ racine de $\theta_n \circ \theta_n(P)$ d'un ordre supérieur à $\mu \left(\frac{1}{\alpha}, \theta_n(P) \right)$.

On a donc une double inégalité : $m \leq \mu \left(\frac{1}{\alpha}, \theta_n(P) \right) \leq m$.

$$\boxed{\text{Ainsi } \mu \left(\frac{1}{\alpha}, \theta_n(P) \right) = m = \mu(\alpha, P).}$$

II.6. Comment décrire l'algorithme **myst** de la partie précédente à l'aide de θ et des θ_k et de la division euclidienne ?

Si on a $(Q, R) = \mathbf{myst}(A, B, n)$, on a donc $A = BQ + X^{n+1}R$.

Cette dernière opération est une division euclidienne par croissance des puissances, là où la division euclidienne classique se base sur une progression décroissante des puissances. Il faudrait donc utiliser θ ou θ_k avec un k bien choisit.

Si l'on compose d'abord par $\frac{1}{X}$:

$$A \left(\frac{1}{X} \right) = B \left(\frac{1}{X} \right) Q \left(\frac{1}{X} \right) + \frac{1}{X^{n+1}} R \left(\frac{1}{X} \right)$$

Donc en multipliant par X^m (m non encore stipulé), afin de réduire le coefficient devant R :

$$X^m A \left(\frac{1}{X} \right) = X^m B \left(\frac{1}{X} \right) Q \left(\frac{1}{X} \right) + X^{m-n-1} R \left(\frac{1}{X} \right)$$

Puis, pour que cette relation soit une division euclidienne, il faut qu'on ait que des polynômes donc que $X^{m-n-1} R \left(\frac{1}{X} \right)$ soit polynomial ce qui nécessite que $m - n - 1 \geq \deg R$, lui même ayant un degré strictement plus petit que celui de B .

Notons donc $b = \deg B$ et prenons alors $m = b - 1 + n + 1$, cela donne :

$$X^{b-1+n+1} A \left(\frac{1}{X} \right) = X^b B \left(\frac{1}{X} \right) \times X^n Q \left(\frac{1}{X} \right) + X^{b-1} R \left(\frac{1}{X} \right)$$

$$\theta_{b+n+1}(A) = \theta(B) \times \theta_{n+1}(Q) + \theta_{b-1}(R) \quad \text{avec } \deg \theta_{b-1}(R) < \deg \theta(B)$$

Cette dernière égalité est donc LA division euclidienne de $\theta^{b+n+1}(A)$ par $\theta(B)$.

Pour terminer, on exploite le fait que $\theta_k \circ \theta_k = \text{id}_{\mathbb{K}_k[X]}$.

Ainsi si $(Q, R) = \mathbf{myst}(A, B, n)$, alors

$$\boxed{\text{Si } \theta_{\deg B+n+1}(A) = \theta(B) \times \overline{Q} + \overline{R} \text{ (division euclidienne de } \theta_{\deg B+n+1}(A) \text{ par } \theta(B)), \text{ on a } Q = \theta_{n+1}(\overline{Q}) \text{ et } R = \theta_{b-1}(\overline{R}).}$$

III Matrices de Hankel et système inversible

On considère une suite $c = (c_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de nombres réels.

On fixe trois entiers p, q, n tel que $p + q = n$. Et on considère dans cette partie une fonction f admettant un développement limité

d'ordre n en 0 : $f(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k + o(x^n)$.

Notre but est de trouver une fraction rationnelle $\frac{P(X)}{Q(X)}$ telle que $\deg P = p$, $\deg Q = q$ et $f(x) - \frac{P(x)}{Q(x)} \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^{p+q})$.

Pour faire cette étude, nous aurons besoin de matrices particulières.

On appelle matrice de Hankel de c et k , d'ordre n , la matrice notée $H_n^k(c)$ ou souvent simplement H_n^k (si c est clairement sous-entendu) :

$$H_n^k = \begin{pmatrix} c_k & c_{k+1} & \cdots & c_{k+n-1} \\ c_{k+1} & c_{k+2} & \ddots & c_{k+n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c_{k+n-1} & c_{k+n} & \cdots & c_{k+2n-2} \end{pmatrix}$$

On a donc $[H_n^k]_{i,j} = c_{k+i+j-2}$, pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$. H_n^k est donc carrée, d'ordre n et son premier terme est $[H_n^k]_{1,1} = c_k$

III.1. Montrer que si $F = \frac{P}{Q}$ est une fraction rationnelle telle que $Q(0) \neq 0$, on peut choisir un représentant $\frac{\bar{P}}{\bar{Q}}$ de F avec $\bar{Q}(0) = 1$.

Puisque $Q(0) \neq 0$, on peut factoriser Q par $Q(0) = [Q]_0$, on a donc $Q(X) = \sum_{k=0}^q [Q]_k X^k = [Q]_0 \times \left(1 + \sum_{k=1}^q \frac{[Q]_k}{[Q]_0} X^k\right)$.

Notons alors $\bar{Q} = 1 + \sum_{k=1}^q \frac{[Q]_k}{[Q]_0} X^k$, puis $\bar{P} = \sum_{k=0}^p \frac{[P]_k}{[Q]_0} X^k$.

On a donc

$$\frac{\bar{P}}{\bar{Q}} = \frac{[Q]_0 \times \bar{P}}{[Q]_0 \times \bar{Q}} = \frac{P}{Q} = F$$

On a donc trouvé un représentant de F dont le dénominateur vaut 1 en 0.

On suppose qu'il existe $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^q b_k X^k$, avec $Q(0) = b_0 = 1$ et tel que $\frac{P(X)}{Q(X)} - f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(x^n)$.

III.2. Montrer qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\sum_{k=0}^p a_k X^k - \left(\sum_{k=0}^q b_k X^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^n c_k X^k\right) = X^{n+1} \times R(X)$.

Notons $S(X) = \sum_{k=0}^n c_k X^k$. Assurément, $T := P - Q \times S$ est un polynôme car $\mathbb{K}[X]$ est un anneau.

Notons k_0 , la valuation de T . Ainsi son terme de plus bas degré est $d_{k_0} X^{k_0}$ (i.e. $d_{k_0} \neq 0$ et $\forall k < k_0, [T]_k = 0$). Et donc $X^{k_0} | T$

On a l'égalité des fractions rationnelles : $\frac{P(X)}{Q(X)} - S(X) = \frac{T(X)}{Q(X)}$.

Puis, comme $S(x)$ est la partie principale du $DL_n(0)$ de f , on a $f(x) = S(x) + o(x^n)$, donc :

$$\frac{T(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)} - f(x) + o(x^n) = o(x^n)$$

Or $T(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} d_{k_0} x^{k_0}$ et $Q(x) \rightarrow 1$, dont $Q(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1$ et $\frac{T(x)}{Q(x)} \sim d_{k_0} x^{k_0}$.

Comme ce dernier est négligeable devant x^n , nécessairement : $k_0 > n$, donc $k_0 \geq n+1$, et ainsi : $X^{n+1} | X^{k_0} | T$, par transitivité.

Il existe donc un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\sum_{k=0}^p a_k X^k - \left(\sum_{k=0}^q b_k X^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^n c_k X^k\right) = X^{n+1} \times R(X)$.

III.3. En déduire que (avec la convention $b_h = 0$ si $h > q$) :

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, a_k = \sum_{i=0}^k c_i b_{k-i} \quad \forall k \in \llbracket p+1, n \rrbracket, 0 = \sum_{i=k-q}^k c_i b_{k-i} = \sum_{j=0}^q c_{k-j} b_j$$

Effectuons le produit (de Cauchy) entre les polynômes Q et S (avec la convention : $b_h = 0$ si $h > q$ et $c_h = 0$ si $h > n$) :

$$\sum_{k=0}^q b_k X^k \times \sum_{k=0}^n c_k X^k = \sum_{k=0}^{n+q} \left(\sum_{i=0}^k b_i c_{k-i} \right) X^k$$

Ainsi, pour tout $k \leq n$, le coefficient de ce produit associé au monôme X^k est $\sum_{i=0}^k b_i c_{k-i} = \sum_{j=0}^q c_j b_{k-j}$.

Et ainsi, d'après la relation précédente, comme $[X^{n+1} R(X)]_k = 0$, dès que $k \leq n$, on trouve :

$$\forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, a_k = \sum_{i=0}^k c_i b_{k-i} \quad \forall k \in \llbracket p+1, n \rrbracket, 0 = \sum_{i=k-q}^k c_i b_{k-i} = \sum_{j=0}^q c_{k-j} b_j$$

Dans cette dernière somme, i varie entre 0 et k a priori, mais comme b_{k-i} est nul pour $k-i > q$, i.e. $i < k-q$, on peut commencer la somme pour $i = k-q$.

III.4. Puis montrer qu'on a les relations matricielles :

$$\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_p \\ 0 & c_0 & c_1 & \dots & c_{p-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & c_0 & c_1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_p \\ b_{p-1} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_p \\ a_{p-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_q^{p-q+1} \times \begin{pmatrix} b_q \\ b_{q-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{p+1} \\ c_{p+2} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Effectuons le calcul matriciel : $\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_p \\ 0 & c_0 & c_1 & \dots & c_{p-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & c_0 & c_1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_p \\ b_{p-1} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix}.$

Il s'agit d'une matrice carrée d'ordre $p+1$ multiplié à droite par une matrice colonne de $p+1$ éléments.

Le résultat donne donc une matrice colonne de $p+1$ éléments également.

Son coefficient situé en ligne i est : $\sum_{j=1}^{p+1} [M]_{i,j} [B]_j.$

Or en ligne i , les coefficients de M sont nuls jusqu'à la colonne $i-1$, puis ils valent c_0 (en i), c_1 (en $i+1$) ... c_{j-i} (en j); alors que le coefficient $[B]_j$ vaut b_{p-j+1} .

On trouve donc comme coefficient

$$\sum_{j=1}^{p+1} [M]_{i,j} [B]_j = \sum_{j=i}^{p+1} [M]_{i,j} [B]_j = \sum_{j=i}^{p+1} c_{j-i} b_{p-j+1} \underbrace{=}_{h=j-i} \sum_{h=0}^{p+1-i} c_h b_{p+1-i-h} = a_{p+1-i}$$

On trouve ainsi le résultat du premier calcul matriciel. (Remarque : il est possible que $p > q$ et donc $b_p = 0 \dots$)

Effectuons le second calcul matriciel : $H_q^{p-q+1} \times \begin{pmatrix} b_q \\ b_{q-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix}.$

Il s'agit d'une matrice carrée d'ordre q multiplié à droite par une matrice colonne de q éléments.

Le résultat donne donc une matrice colonne de q éléments également.

Son coefficient situé en ligne i est : $\sum_{j=1}^q [H_q^{p-q+1}]_{i,j} [B']_j.$

Or en ligne i et colonne j , le coefficient de H_q^{p-q+1} est $c_{p-q+1+i+j-2} = c_{p-q+i+j-1}$; alors que le coefficient $[B']_j$ vaut b_{q-j+1} .

On trouve donc comme coefficient

$$\sum_{j=1}^q [H_q^{p-q+1}]_{i,j} [B']_j = \sum_{j=1}^q c_{p-q+i+j-1} b_{q-j+1} \underbrace{=}_{h=q-j+1} \sum_{h=1}^q c_{p+i-h} b_h$$

En ajoutant à cette somme, le nombre $c_{p+i} b_0 (= c_{p+i}$ car $b_0 = 1$), on obtient une somme nulle.

En effet, ici, puisque $i \in \llbracket 1, q \rrbracket$, on a $p+i \in \llbracket p+1, n \rrbracket$.

Et donc $\sum_{j=1}^q [H_q^{p-q+1}]_{i,j} [B']_j = -c_{p+i}.$

On trouve ainsi le résultat du second calcul matriciel.

$$\left(\begin{pmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_p \\ 0 & c_0 & c_1 & \dots & c_{p-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & c_0 & c_1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & c_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_p \\ b_{p-1} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_p \\ a_{p-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_q^{p-q+1} \times \begin{pmatrix} b_q \\ b_{q-1} \\ \vdots \\ b_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{p+1} \\ c_{p+2} \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \right)$$

III.5. Réciproquement, montrer que pour $n = p+q$, si H_q^{p-q+1} est une matrice inversible, alors il existe une fraction rationnelle dont le numérateur P est de degré p , le dénominateur Q est de degré q et telle que $\frac{P}{Q}$ ait la même partie principale que le $DL_n(0)$ de f .

On considère donc p, q et $n = p + q$, fixés. On suppose que H_q^{p-q+1} est inversible.
 Donc le système $H_q^{p-q+1} \times B' = C'$, admet une unique solution
 et donc on obtient les nombres $b_0 = 1$ et $b_1, b_2, \dots, b_q$ solution du système.

Cela conduit alors à un polynôme $Q = 1 + \sum_{k=1}^q b_k X^k$.

On calcule alors directement $a_p, a_{p-1} \dots a_0$, avec le premier des deux systèmes matriciels
 (les deux matrices de gauche sont connues, il peut y avoir à compléter celle de B avec des coefficients nuls si $p > q$).

On trouve alors un polynôme $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$ qui va bien.

Avec les nombres (a_k) et (b_k) ainsi trouvés, on a (par équivalence calculatoire et avec $S = \sum_{k=0}^n c_k X^k$) :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, [P - QS]_k = 0$$

Donc $\frac{P(x)}{Q(x)} - S(x) = o(x^n)$ (car $Q(0) \neq 0$) et par transitivité :

$$\boxed{\frac{P}{Q} \text{ a même partie principale que } f \text{ au voisinage de } 0, \text{ à un ordre } n.}$$

III.6. Application : donner (si possible) une fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ tel que $\deg P = 3$, $\deg Q = 2$ et $\frac{P}{Q} \underset{x \rightarrow 0}{=} \tan x + o(x^5)$.
 Le $DL_5(0)$ de $\tan$ est donné dans l'énoncé.

Pour ce cas particulier, on a $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$.

On a donc $c_0 = 0 = c_2 = c_4$, $c_1 = 1$, $c_3 = \frac{1}{3}$ et $c_5 = \frac{2}{5}$.

Cela donne les calculs matriciels ($p = 3$ et $q = 2$) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ b_2 \\ b_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0 \\ -\frac{2}{15} \end{pmatrix}$$

Le second système donne comme solution : $b_1 = 0$ et $b_2 = -\frac{2}{5}$. Puis, comme $b_1 = 1$, on a

$$a_3 = -\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{-1}{15}, a_2 = 0, a_1 = 1 \text{ et } a_0 = 0, \text{ donc on trouve}$$

$$\boxed{\tan x \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{x - \frac{1}{15}x^3}{1 - \frac{2}{5}x^2} + o(x^5)}$$

Notons que nous ne trouvons pas les DL de $\sin$ et $\cos$... Celui-ci est meilleur à l'ordre 5 (mais pas à l'ordre 7...).

IV Polynômes orthogonaux

On considère toujours une suite $c = (c_m)_{m \in \mathbb{N}}$ de nombres réels.

On suppose que pour tout $k, n \in \mathbb{N}^*$, H_n^k est une matrice inversible.

On considère également l'application linéaire Φ_c , plus souvent notée $\Phi : \Phi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}, P \mapsto \sum_{k=0}^{\deg P} [P]_k c_k$.

Cette application est qualifiée de linéaire car elle vérifie : $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, P, Q \in \mathbb{R}[X], \Phi(\lambda P + \mu Q) = \lambda \Phi(P) + \mu \Phi(Q)$ (admis).

On dit qu'une famille $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de polynômes est orthogonaux par rapport à (la suite) c si :

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\deg T_k = k$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, et pour tout $i < k$, $\Phi(X^i \times T_k) = 0$

On dit que (T_k) est une famille de polynômes orthogonaux unitaires, si, en outre, chaque T_k est unitaire.

IV.1. Autour de Φ .

- (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, et tout $P \in \mathbb{R}[X]$, exprimer (sans démonstration) $[P]_k$ en fonction de la dérivées d'ordre k de P .

C'est une question de cours, on n'attend pas la démonstration (qui est un calcul) :

$$\boxed{[P]_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}}$$

- (b) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, que vaut $\Phi(X^i)$?

Puisque $[X^i]_k = \delta_{i,k}$ (i.e 0 sauf si $i = k$, et alors cela vaut 1).

$$\boxed{\Phi(X^i) = c_i}$$

IV.2. Relation entre familles de polynômes orthogonaux. Unicité d'une famille unitaire.

- (a) Montrer que si $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes orthogonaux par rapport à c , alors il existe une famille de polynômes orthogonaux unitaires par rapport à c .

On donnera un moyen simple d'obtenir cette seconde famille à partir de $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Le terme dominant de T_k est $[T_k]_k X^k$ avec, nécessairement $[T_k]_k \neq 0$.

Posons, pour tout $h \in \mathbb{N}$, $S_h = \frac{1}{[T_h]_h} T_h$. Alors :

- Pour tout $h \in \mathbb{N}$, $\deg(S_h) = \deg(T_h) = h$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $i \leq k$, par linéarité de Φ : $\Phi(X^i \times S_k) = \frac{1}{[T_k]_k} \Phi(X^i T_k) = 0$.
- $[S_h]_h = \left[\frac{1}{[T_h]_h} T_h \right] = \frac{1}{[T_h]_h} [T_h]_h = 1$

Ainsi construite, la famille $(S_h)_h$ est une famille de polynômes orthogonaux par rapport à c et unitaires.

- (b) Montrer que si $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille de polynômes orthogonaux, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\Phi(R \times T_n) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors on peut écrire $R = \sum_{k=0}^{n-1} [R]_k X^k$ (ces nombres pouvant être nul).

Puis, par linéarité de Φ :

$$\Phi(R \times T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} [R]_k \Phi(X^k \times T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} [R]_k \times 0 = 0$$

On a généralisé : $\Phi\left(\sum_{i=1}^s \lambda_i P_i\right) = \sum_{i=1}^s \lambda_i \Phi(P_i)$,

Cela se démontre par récurrence. Le cas $s = 1$ ou $s = 2$ est donné.

Et l'hérédité se montre :

$$\Phi\left(\sum_{i=1}^{s+1} \lambda_i P_i\right) = \Phi\left(\sum_{i=1}^s \lambda_i P_i + \lambda_{s+1} P_{s+1}\right) = \Phi\left(\sum_{i=1}^s \lambda_i P_i\right) + \lambda_{s+1} \Phi(P_{s+1}) \underset{\text{récu.}}{=} \sum_{i=1}^s \lambda_i \Phi(P_i) + \lambda_{s+1} \Phi(P_{s+1})$$

On a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, k < n : \Phi(R \times T_n) = 0}$$

On considère (S_k) une famille de polynômes orthogonaux et unitaires tel que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\deg S_k = k$.

On suppose également que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Phi(S_k^2) \neq 0$

- (c) Montrer que pour $i < k$, $\Phi(S_i S_k) = 0$.

Comme la famille (S_k) est orthogonal,

d'après (b), pour tout $R \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$, $\Phi(R S_k) = 0$, donc avec $R \leftarrow S_i$, on a $\Phi(S_i S_k) = 0$.

Notons que comme $S_i \times S_k = S_k \times S_i$, en fait, on a mieux :

$$\boxed{\text{Pour } i \neq k, \Phi(S_i S_k) = 0.}$$

- (d) Montrer, que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe une famille $(\lambda_0; \lambda_1, \dots, \lambda_{\deg P}) \in \mathbb{R}^{\deg P + 1}$ tel que $P = \sum_{i=0}^{\deg P} \lambda_i S_i$.

On pourra raisonner par récurrence sur $\deg P$.

Montrer alors que pour tout $k \in \llbracket 0, \deg P \rrbracket$, $\lambda_k = \frac{\Phi(S_k P)}{\Phi(S_k^2)}$.

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n : \ll \forall P \in \mathbb{R}_n[X], \exists (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R} \text{ tel que } P = \sum_{i=0}^n \lambda_i S_i \gg$.

- Si $\deg P = 0$, alors P est constant et $P = P \times S_0$, car $P \in \mathbb{R}$ et $S_0 = 1$.
Donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Soit $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.

- Si $\deg P < n + 1$, alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et donc on applique directement $\mathcal{P}_n$ à P .
- Si $\deg P = n + 1$. Alors $P - [P]_{n+1}S_{n+1}$ est l'addition de deux polynômes de degré $n + 1$, donc il est, au plus, de degré $n + 1$.

Mais, par linéarité : $[P - [P]_{n+1}S_{n+1}]_{n+1} = [P]_{n+1} - [P]_{n+1}[S_{n+1}]_{n+1} = 0$, car S_{n+1} est unitaire.

Donc $P - [P]_{n+1}S_{n+1} \in \mathbb{R}_n[X]$. On peut appliquer $\mathcal{P}_n$.

Il existe donc $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}$ tel que $P - [P]_{n+1}S_{n+1} = \sum_{i=0}^n \lambda_i S_i$.

Et finalement : $P = \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i S_i$, avec $\lambda_{n+1} = [P]_{n+1}$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

La récurrence est démontrée. Puis en prenant pour n , la valeur égale à $\deg P$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe une famille $(\lambda_0; \lambda_1, \dots, \lambda_{\deg P}) \in \mathbb{R}^{\deg P+1}$ tel que $P = \sum_{i=0}^{\deg P} \lambda_i S_i$.

On fixe $k \in \mathbb{N}_n$. On a alors, par produit avec S_k , puis linéarité de Φ :

$$\Phi(S_k \times P) = \Phi\left(S_k \times \sum_{i=0}^{\deg P} \lambda_i S_i\right) = \sum_{i=0}^{\deg P} \lambda_i \Phi(S_i S_k)$$

Donc de la somme précédente, il n'y a que le terme pour $i = k$ qui est non nul (d'après la question précédente)

Donc : $\Phi(S_k P) = 0 + \dots + 0 + \lambda_k \Phi(S_k^2) + 0 + \dots + 0$, puis en divisant par $\Phi(S_k^2) \neq 0$:

$$\forall k \in \llbracket 0, \deg P \rrbracket, \lambda_k = \frac{\Phi(S_k P)}{\Phi(S_k^2)}$$

- (e) Dédurre des deux questions précédentes que $S_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Phi(S_k X^n)}{\Phi(S_k^2)} S_k$

$\deg S_n = n$. On applique la formule précédente pour $P \leftarrow S_n - X^n$,

En effet, comme S_n est unitaire de degré n , on a $S_n - X^n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$:

$$S_n - X^n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Phi(S_k \times (S_n - X^n))}{\Phi(S_k^2)} S_k = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Phi(S_k S_n)}{\Phi(S_k^2)} S_k - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\Phi(S_k X^n)}{\Phi(S_k^2)} S_k$$

par linéarité de Φ . Puis comme $\Phi(S_n S_k) = 0$, pour $k < n$.

Alors, en ajoutant X^n au résultat trouvé :

$$S_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Phi(S_k X^n)}{\Phi(S_k^2)} S_k$$

- (f) Montrer qu'il existe au plus une famille de polynômes orthogonaux unitaire.

Supposons qu'il existe (au moins) deux familles de polynômes orthogonaux unitaires distinctes. Notons les (S_n) et (U_n) .

Alors $\{n \in \mathbb{N} \mid S_n \neq U_n\}$ est non vide. C'est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$.

Il admet un plus petit élément : n_0 . Donc $U_{n_0} \neq S_{n_0}$, alors que pour tout $k < n_0$: $U_k = S_k$.

La formule trouvée précédemment est vraie pour toute famille orthogonale unitaire, donc :

$$S_{n_0} = X^n - \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{\Phi(S_k X^n)}{\Phi(S_k^2)} S_k = X^n - \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{\Phi(U_k X^n)}{\Phi(U_k^2)} S_k = U_{n_0}$$

On a une contradiction. Notre hypothèse est absurde et donc :

Il existe au plus une famille de polynômes orthogonaux unitaire.

- (g) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Phi(S_n^2) = \Phi(X^n S_n) = \sum_{i=0}^n [S_n]_i c_{i+n}$

On a déjà vu que $S_n - X^n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc d'après (b) : $\Phi(S_n(S_n - X^n)) = 0$.

Alors par linéarité de Φ : $0 = \Phi(S_n^2) - \Phi(S_n X^n)$. Donc

$$\Phi(S_n^2) = \Phi(S_n X^n) = \Phi\left(\sum_{k=0}^n [S_n]_k X^k \times X^n\right) = \sum_{k=0}^n [S_n]_k \Phi(X^{n+k}) = \sum_{k=0}^n [S_n]_k c_{k+n}$$

d'après la définition de Φ .

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \Phi(S_n^2) = \Phi(X^n S_n) = \sum_{i=0}^n [S_n]_i c_{i+n}.$$

IV.3. Existence d'une famille de polynômes orthogonaux unitaire.

La relation *nécessaire* trouvée en 2.(e) : $S_n = X^n - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Phi(S_k X^n)}{\Phi(S_k^2)} S_k$ permet de définir une famille de polynômes orthogonaux

unitaire par récurrence. Il suffit donc qu'à chaque étape (définition de S_n à partir de $S_0, \dots, S_{n-1}$) on ait $\Phi(S_k^2) \neq 0$ ($k < n$). On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que l'on a construit $(S_0, S_1, \dots, S_{n-1})$ orthogonale et unitaire et S_n est définie comme précédemment.

- (a) On note $S \downarrow$, la matrice colonne (de taille $n+1$) dont le coefficient en ligne i est $[S_n]_{i-1}$.
Evaluer $H_{n+1}^0 \times S \downarrow$ (on rappelle que H_{n+1}^0 est une matrice de Henkel définie en partie III).

Le coefficient en ligne i ($i \in \mathbb{N}_{n+1}$) de $H_{n+1}^0 \times S \downarrow$ est

$$\sum_{j=1}^{n+1} [H_{n+1}^0]_{i,j} [S \downarrow]_j = \sum_{j=1}^{n+1} c_{i+j-2} [S_n]_{j-1}$$

$$\text{Or, par linéarité : } \Phi(X^k S_n) = \sum_{j=0}^n [S_n]_j \Phi(X^{j+k}) = \sum_{j=0}^n [S_n]_j c_{j+k}.$$

Donc :

$$\sum_{j=1}^{n+1} [H_{n+1}^0]_{i,j} [S \downarrow]_j = \sum_{j=1}^{n+1} c_{i+j-1} [S_n]_{j-1} = \sum_{h=0}^n c_{i+h} [S_n]_h = \Phi(X^{i-1} S_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } i-1 < n \Leftrightarrow i \leq n \\ \Phi(X^n S_n) = \Phi(S_n^2) & \text{si } i = n+1 \end{cases}$$

$$H_{n+1}^0 \times S \downarrow = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Phi(S_n^2) \end{pmatrix}$$

- (b) Montrer que $S \downarrow$ est non nul.

Le coefficient en ligne $n+1$ de $S \downarrow$ est $[S_n]_n = 1$, donc

$$S \downarrow \text{ est non nul.}$$

- (c) Montrer que si $\Phi(S_n^2) = 0$, alors $S \downarrow$ est nécessairement nul. Conclure.

Si $\Phi(S_n^2) = 0$, d'après le calcul en (a), on a $H_{n+1}^0 \times S \downarrow = 0$ (matrice nulle).

Or H_{n+1}^0 est inversible par hypothèse d'introduction de cette partie (pour tout $n \in \mathbb{N}$),

Donc en multipliant à gauche par $(H_{n+1}^0)^{-1}$, on trouve $S \downarrow = 0$ (matrice nulle). Absurde.

$$\text{Donc, nécessairement : } \Phi(S_n^2) \neq 0.$$

On a alors $\Phi(S_n^2) \neq 0$ et donc on pourra définir S_{n+1} par la formule de 2.(e).

Puis avec la même méthode : $\Phi(S_{n+1}^2) \neq 0$. On continue ainsi par récurrence...

Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, H_{n+1}^0 est inversible, alors $\Phi(S_n^2) \neq 0$ et il existe une famille orthogonale de polynômes unitaires.

IV.4. Relation de récurrence pour les polynômes orthogonaux et unitaires.

On considère la famille (S_k) de polynômes orthogonaux (pour Φ) unitaires. On fixe $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Montrer qu'il existe un unique couple $(a, R_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que : $S_{n+1} = (X + a) \times S_n + R_n$

Comme $\deg R_n \leq n-1 < \deg S_n$, la relation donnée est nécessairement la division euclidienne de S_{n+1} par S_n .

Celle-ci donne un unique couple (Q, R) . Donc effectuons cette division euclidienne de S_{n+1} par S_n .

Comme $\deg S_n = n$ et $\deg S_{n+1} = n+1$, nécessairement le quotient est de degré 1.

Et par ailleurs, comme S_n et S_{n+1} sont unitaires, il en est de même du quotient. Donc

$$\text{Il existe un unique couple } (a, R_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{n-1}[X] \text{ tel que : } S_{n+1} = (X + a) \times S_n + R_n.$$

- (b) Montrer que pour tout $j < n - 1$, $\Phi(S_j R_n) = 0$. En déduire qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $R_n = bS_{n-1}$.

Soit $j < n - 1$, alors par linéarité de Φ :

$$\Phi(S_j R_n) = \Phi(S_j S_{n+1}) - \Phi(X S_j S_n) - a\Phi(S_j S_n) = 0$$

car $j < n$ donc $\Phi(S_j S_{n+1}) = \Phi(S_j S_n) = 0$.

mais aussi $\deg(X S_j) = j + 1$, donc $X S_j \in \mathbb{R}_{j+1}[X]$ et donc $\Phi(X S_j \times S_n) = 0$ ($j + 1 < n$).

Puis, comme $\deg R_n \leq n - 1$, on sait (2.(d)) que

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Phi(S_k R_n)}{\Phi(S_k^2)} S_k = 0 + \cdots + 0 + \underbrace{\frac{\Phi(S_{n-1} R_n)}{\Phi(S_{n-1}^2)} S_{n-1}}_{:=b \in \mathbb{R}}$$

Il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $R_n = bS_{n-1}$.

-
- (c) Montrer, alors que $a = -\frac{\Phi(X S_n^2)}{\Phi(S_n^2)}$ et $b = -\frac{\Phi(X S_n S_{n-1})}{\Phi(S_{n-1}^2)}$.

On vient de voir que $b = \frac{\Phi(S_{n-1} R_n)}{\Phi(S_{n-1}^2)}$.

Or $R_n = S_{n+1} - X S_n - a S_n$, donc $\Phi(S_{n-1} R_n) = \Phi(S_{n-1} S_{n+1}) - \Phi(X S_{n-1} S_n) - a\Phi(S_{n-1} S_n)$.

Et comme on sait que $\Phi(S_i S_j) = 0$ dès que $i \neq j$, on a nécessairement $b = -\frac{\Phi(X S_{n-1} S_n)}{\Phi(S_{n-1}^2)}$.

Et pour a : $0 = \Phi(S_{n+1} S_n) = \Phi(X S_n^2) + a\Phi(S_n^2) + b\Phi(S_{n-1} S_n) = \Phi(X S_n^2) + a\Phi(S_n^2)$, pour les mêmes raisons.

Donc $a = -\frac{\Phi(X S_n^2)}{\Phi(S_n^2)}$.

$$a = -\frac{\Phi(X S_n^2)}{\Phi(S_n^2)} \text{ et } b = -\frac{\Phi(X S_n S_{n-1})}{\Phi(S_{n-1}^2)}$$

On définit, réciproquement, par récurrence deux familles de polynômes : $(Q_k)_{k \in \mathbb{I}[-1, +\infty]}$ et $(P_k)_{k \in \mathbb{I}[-1, +\infty]}$ par :

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_{-1} = 0 \\ Q_0 = 1 \\ \forall k \in \mathbb{N} : Q_{k+1} = \left(X - \underbrace{\frac{\Phi(X Q_k^2)}{\Phi(X^k Q_k)}}_{:=a_k} \right) \times Q_k + \underbrace{\frac{-\Phi(X^k Q_k)}{\Phi(X^{k-1} Q_{k-1})}}_{:=b_k} Q_{k-1} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} P_{-1} = -1 \\ P_0 = 0 \\ \forall k \in \mathbb{N} : P_{k+1} = (X - a_k) \times P_k + b_k P_{k-1} \end{array} \right.$$

(On rappelle qu'on a vu que pour (S_n) : $\Phi(S_n^2) = \Phi(X^n S_n)$, on peut montrer aussi que $\Phi(X S_n S_{n-1}) = \Phi(X^n S_n)$.)

IV.5. On considère ces deux suites de polynômes, mais dans le cas général (c presque quelconque).

- (a) Montrer qu'on trouve bien $Q_1 = X - \frac{c_1}{c_0}$

Comme $Q_{-1} = 0$ et $Q_0 = 1$, on a avec l'hypothèse de récurrence :

$$Q_1 = X - \frac{\Phi(X \times 1^2)}{\Phi(1^2)} 1 = X - \frac{c_1}{c_0}$$

Q_1 est bien unitaire et $\Phi(Q_1 Q_0) = \Phi(X) - \frac{c_1}{c_0} \Phi(1) = c_1 - \frac{c_1}{c_0} c_0 = 0$.

-
- (b) On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = Q_n P_{n-1} - Q_{n-1} P_n$.
Quelle relation simple existe-t-il entre T_{n+1} et T_n ?

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$T_{n+1} = Q_{n+1} P_n - Q_n P_{n+1} = (X - a_n) Q_n + b_n Q_{n-1} P_n - Q_n (X - a_n) P_n + b_n P_{n-1} = b_n (Q_{n-1} P_n - Q_n P_{n-1}) = -b_n T_n$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} = -b_n T_n$$

(c) En déduire $P_n \wedge Q_n$.

Donc, on a une relation multiplicative (produit de fractions rationnelles télescopiques) :

$$\frac{T_n}{T_0} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{T_{k+1}}{T_k} = \prod_{k=0}^{n-1} (-b_k)$$

Comme $T_0 = Q_0 P_{-1} - Q_{-1} P_0 = 0 + 1$, on trouve $T_n = \prod_{k=0}^{n-1} (-b_k) = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} b_k \in \mathbb{R}$.

Ainsi, d'après le théorème de Bézout, puisqu'il existe $U (= Q_{n+1})$ et $V (= P_{n+1})$ tels que $UP_n + VQ_n \in \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{Q_n \wedge P_n = 1}$$

IV.6. Lien entre $\frac{P}{Q}$ de la partie III et les polynômes orthogonaux.

On rappelle que nous avons vu en partie III : $\forall k \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, $\sum_{j=0}^q c_{k-j} b_j = \sum_{i=k-q}^k c_i b_{k-i} = 0$ et $b_0 = 1$

(a) Montrer que si $\frac{P}{Q}$ est une approximation de f (associée à (c)) d'ordre $n = p + q$ avec $p = q - 1$, on a nécessairement $Q = \theta_q(S_n)$

En gardant les notations de la partie III, on a donc, le système suivant :

$$\begin{cases} c_{p+1}b_0 + c_p b_1 + \cdots + c_{p-q}b_q = 0 \\ c_{p+2}b_0 + c_{p+1}b_1 + \cdots + c_{p-q+1}b_q = 0 \\ \vdots \\ c_n b_0 + c_{n-1}b_1 + \cdots + c_{n-q}b_q = 0 \end{cases}$$

Notons $T = b_q + b_{q-1}X + \cdots + b_0X^q = \sum_{h=0}^q b_{q-h}X^h$, il est de degré q et unitaire, car $b_0 = 1$ (cf. partie III).

$$\text{Et } \Phi(X^m T) = \sum_{h=0}^q b_{q-h} \Phi(X^{m+h}) = \sum_{h=0}^q b_{q-h} c_{m+h} = \sum_{j=0}^q b_j c_{(m+q)-j}.$$

Or par construction : $\forall k \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, $\sum_{j=0}^q c_{k-j} b_j = 0$, ainsi pour $m \in \mathbb{N}$ tel que $m+q \in \llbracket p+1, n \rrbracket$, $\Phi(X^m T) = 0$.

Ainsi, en imposant $p = q - 1$ et donc $n = p + q = 2q - 1$, on a $\forall m \in \llbracket (q-1) + 1 - q, n - q \rrbracket = \llbracket 0, q-1 \rrbracket$, $\Phi(X^m T) = 0$. Puis, par définition de la suite (Q_n) (avec la même récurrence que (S_n)) et par unicité de la famille des polynômes orthogonaux et unitaires,

on peut prendre Q_n à la place de S_n dans les relations précédentes.

$$\text{On a alors : } T = \sum_{i=0}^q \frac{\Phi(Q_k T)}{\Phi(Q_k^2)} Q_k.$$

Mais, comme $\deg Q_k = k$, $Q_k = \sum_{i=0}^k [Q]_i X^i$ et donc $\Phi(Q_k T) = \sum_{i=0}^k [Q]_i \Phi(X^i T) = 0$ dès que $k < q$.

$$\text{Donc } T = \frac{\Phi(Q_q T)}{\Phi(Q_q^2)} Q_q = \alpha Q_q \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Or les deux polynômes sont unitaires, donc $\alpha = 1$ et $T = Q_q$.

Ainsi

$$\boxed{Q = \theta_q \circ \theta_q(Q) = \theta_q(T) = \theta_q(Q_q) = \theta_q(S_q)}$$

A noter qu'ici, comme $\deg S_q = q$, on a $\theta_q(S_q) = \theta(S_q)$.

(b) (*) Conclure qu'à partir des polynômes (Q_n) et (P_n) obtenue par la récurrence, on a la relation :

$$\frac{\theta(P_n)}{\theta(Q_n)} = f(x) + o(x^{2n-1})$$

$$\text{où } f = \sum_{k=0}^{2n-1} c_k x^k + o(x^{2n-1})$$

On va faire un raisonnement par récurrence, il nous faut donc indexer nos objets (par q la plupart du temps).

On risque d'avoir un conflit entre Q le dénominateur de la fraction et le q terme de la suite définie par récurrence.

Notons donc (Q_n) et (P_n) les éléments des suites définies par récurrence et $\overline{Q_q}$ et $\overline{P_p}$ les dénominateurs et numérateurs des

fractions approchantes en $p+q$ de $f = \sum_{i=0}^n c_i x^i$.

Ainsi à la question précédente, on a vu que pour tout $q \in \mathbb{N}$ et $p = q - 1$,

$$\overline{Q}_q = 1 + \sum_{i=1}^q b_i X^i = \theta_q(Q_q) \text{ et donc } Q_q = b_q + b_{q-1}X + \dots + b_1 X^{q-1} + X^q.$$

On va démontrer qu'on a également $\overline{P}_{q-1} = \theta_{q-1}(P_q)$.

• Commençons par le cas $q = 1$.

Dans ce cas : la fraction est du type $\frac{a_0}{1 + b_1 X} = a_0 - a_0 b_1 X + X^2 R$.

$$\text{On a donc } a_0 = c_0 \text{ et } b_1 = \frac{-c_1}{a_0} = \frac{-c_1}{c_0}.$$

$$\text{Il faut donc bien prendre } \overline{Q}_1 = 1 - \frac{c_1}{c_0} X \text{ (on a vu } Q_1 = X - \frac{c_1}{c_0}.)$$

$$\text{Et il faut prendre } \overline{P}_0 = c_0;$$

$$\text{alors que } P_1 = (X - a_0)P_0 + b_0 P_{-1} = 0 + \frac{-\Phi(X^0 Q_0)}{\Phi(X^{-1} Q_{-1})} P_{-1} = c_0.$$

• Le cas 0 est caduque. . Faisons le calcul pour $q = 2$.

On a de même :

$$\left\{ \begin{array}{ccc} c_0 b_2 & + c_1 b_1 & = -c_2 \\ c_1 b_2 & + c_2 b_1 & = -c_3 \end{array} \right\} \Leftrightarrow_{\text{Cramer}} \left\{ \begin{array}{l} b_1 = \frac{c_1 c_2 - c_0 c_3}{c_0 c_2 - c_1^2} \\ b_2 = \frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_0 c_2 - c_1^2} \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{ccc} c_0 b_1 & + c_1 b_0 & = a_1 \\ c_0 b_0 & & = a_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow_{\text{Cramer}} \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{a_0 = c_0}{c_0 c_2 - c_1^2} \\ a_0 = \frac{2c_0 c_1 c_2 - c_0^2 c_3 - c_1^3}{c_0 c_2 - c_1^2} \end{array} \right.$$

Alors que

$$\begin{aligned} Q_2 &= (X - \frac{\Phi(X(X - \frac{c_1}{c_0}))}{\Phi(X(X - \frac{c_1}{c_0}))} (X - \frac{c_1}{c_0}) - \frac{\Phi(X(X - \frac{c_1}{c_0}))}{\Phi(1)} 1 = (X - \frac{c_3 - 2\frac{c_2 c_1}{c_0} + \frac{c_1^3}{c_0^2}}{c_2 - \frac{c_1^2}{c_0}}) (X - \frac{c_1}{c_0}) - \frac{c_2 - \frac{c_1^2}{c_0}}{c_0} 1 \\ &= (X - \frac{c_3 c_0^2 - 2c_2 c_1 c_0 + c_1^3}{c_0^2 c_2 - c_1^2 c_0}) (X - \frac{c_1}{c_0}) - \frac{c_2 c_0 - c_1^2}{c_0} = X^2 + \frac{c_1 c_2 - c_3 c_0}{c_0 c_2 - c_1^2} X + \frac{c_1 c_3 - c_2^2}{c_0 c_2 - c_1^2} = X^2 + b_1 X + b_2 \end{aligned}$$

Et pour P_2 (même relation de récurrence) :

$$P_2 = (X - \frac{c_3 c_0^2 - 2c_2 c_1 c_0 + c_1^3}{c_0^2 c_2 - c_1^2 c_0}) \times c_0 - \frac{c_2 c_0 - c_1^2}{c_0} \times 0 = c_0 X - \frac{c_3 c_0^2 - 2c_2 c_1 c_0 + c_1^3}{c_0 c_2 - c_1^2} = a_0 X + a_1$$

Montrons, maintenant l'hérédité à deux termes pour $q \geq 2$:

$$\text{l'approximation de } c_0 + c_1 x + \dots + c_{2q-1} x^{2q-1} \text{ au voisinage de 0 est donné par } \frac{\overline{P}_{q-1}(x)}{\overline{Q}_q(x)}.$$

On a déjà vu (question précédente) que $\overline{Q}_q = \theta_q(Q_q)$ est bien le dénominateur recherchée.

Rappelons nous qu'on a vu qu'il fallait commencer par le dénominateur (III.5.).

On a la relation :

$$Q_{q+1} = (X - a_q)Q_q + b_q Q_{q-1} \Rightarrow \overline{Q}_{q+1}(X) = X^{q+1} Q_{q+1} \left(\frac{1}{X} \right) = X^{q+1} \left[\left(\frac{1}{X} - a_q \right) Q_q \left(\frac{1}{X} \right) + b_q Q_{q-1} \left(\frac{1}{X} \right) \right] = (1 - a_q X) \overline{Q}_q + b_q X^2 \overline{Q}_{q-1}$$

On a de la même façon :

$$\overline{P}_q = X^q P_{q+1} \left(\frac{1}{X} \right) = (1 - a_q X) \overline{P}_{q-1} + b_q X^2 \overline{P}_{q-2}$$

Et donc, en notant $\overline{C}_{2q+1} = \sum_{h=0}^{2q+1} c_h X^h = \overline{C}_{2q-1} + c_{2q} X^{2q} + c_{2q+1} X^{2q+1}$, alors,

comme il existe $R_q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\overline{P}_{q-1} = \overline{Q}_q \overline{C}_{2q-1} + X^{2q-1} R_{2q-1}$:

$$\begin{aligned} \overline{P}_q &= \overline{C}_{2q+1} \overline{Q}_{q+1} + X^{2q+1} R_{2q+1} = \overline{C}_{2q+1} [(1 - a_q X) \overline{Q}_q + b_q X^2 \overline{Q}_{q-1}] + X^{2q+1} R_{2q+1} \\ &= (1 - a_q X) \overline{C}_{2q+1} \overline{Q}_q + X^{2q} S + b_q X^2 \overline{C}_{2q-1} \overline{Q}_{q-1} + X^{2q-1} T + X^{2q+1} R_{2q+1} \\ &= (1 - a_q X) \overline{P}_{q-1} + b_q X^2 \overline{P}_{q-2} + X^{2q-3} U \\ &= \theta_q((X - a_q)P_q + b_q P_{q-1}) + X^{2q-3} U = \theta_q(P_{q+1}) + X^{2q-3} U \end{aligned}$$

où U est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$.

On a appliqué ici le résultat de l'énoncé de récurrence et plus même :

la partie pour k entre 0 et $q - 1$. . pour P (récurrence) et pour k entre q et $2q - 1$ d'après ce que l'on sait sur $\overline{Q}_q$.

Et donc en faisant la troncature à X^{p-1} , assuré si $2q - 3 \leq q - 1$ i.e. $q \leq 2$, on a donc

$$\overline{P}_q = \theta_q(P_{q+1}) = \theta(P_{q+1})$$

car $\deg P_{q+1} = q$ (à démontrer simplement, par récurrence).

La récurrence est démontrée.

$$\boxed{\frac{\theta(P_q)(x)}{\theta(Q_q)(x)} = \frac{\overline{P}_{q-1}(x)}{\overline{Q}_q(x)} = f(x) + o(x^{2q-1})}$$

Les suites (P_n) et (Q_n) qui apparaissent ici, ne sont pas sans lien avec le développement sous forme de fractions continues polynomiales.

Ce sujet « résonne » avec le sujet DS6 vu en 2021 (sur les approximants de Padé et les fractions continues).