Devoir surveillé n°6

Sujet donné le samedi 20 janvier 2024, 4h.

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé.

La notation tiendra particulièrement compte de **la qualité de la rédaction, la précision des raisonnements et l'énoncé des formules utilisées. Les réponses aux questions seront numérotées et séparées par un trait horizontal. Les résultats essentiels devront être encadrés ou soulignés.**

BON TRAVAIL

Problème - Inégalités de Gronwall et de Smirnov

Objectifs du problème :
Dans tout le problème, on souhaite étudier la fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$.
Dans la première partie, on étudie à l'aide d'une suite, une approximation du point fixe de la fonction.
Dans le seconde partie, on cherche des approximations des racines de l'équation $\tan(x) = x$.
Ces racines permettent de mieux étudier la fonction sinc définies en troisième partie.
On étudie donc, en troisième partie, cette dernière fonction car elle est proche (après composition) de la dérivée de g. On aboutit sur une série de majorations donnée par Gronwall en 1913.
Mais ce n'est pas suffisant, on reprend en partie IV, la fonction g que l'on étend « naturellement »sur $\mathbb{R}$ en entier en $\tilde{g}$. On conclue par une séries de majorations donnée par Smirnov en 2018.

Très souvent dans le problème (essentiellement en partie III), on exploite l'inégalité de la moyenne :

$$\forall\, a < b \qquad : \qquad \left| \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$$

I Une suite récurrente

On note $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$.

I.1. Etudier les variations de $g_1 = g_{|\mathbb{R}_+^*}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

I.2. Montrer que $g_1'(x)$ admet une limite finie (que l'on donnera) pour $x \to 0^+$.
Que peut-on en déduire concernant la dérivabilité de g en 0 ?

I.3. Montrer que $I = \left]0, \dfrac{\pi^2}{4}\right[$ est stable par g_1.

I.4. Montrer que l'équation $g_1(x) = x$ admet une unique solution sur I. On note ℓ ce nombre, on ne demande pas de l'évaluer.

I.5. Montrer que pour tout $x, y \in I$, $|g_1(x) - g_1(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}|x - y|$.

Soit $a \in I = \left]0; \dfrac{\pi^2}{4}\right[$. On considère la suite (u_n) (bien définie) par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g_1(u_n)$.

I.6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \ell|$.

I.7. En déduire que (u_n) converge vers ℓ.

I.8. Ecrire un programme en python, qui prend pour argument $\epsilon > 0$ et $a \in I$ et qui renvoie une approximation de ℓ à ϵ près en exploitant la suite (u_n), avec un contrôle sur n donné par ϵ et la relation $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$.
On admet que $|a - \ell| \leqslant 2$, quel que soit la valeur de a donnée par l'utilisateur du programme.

II Racines de l'équation $\tan x = x$

On note, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $U_k =]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; \dfrac{\pi}{2} + k\pi[$.
On rappelle que la fonction tan est définie sur $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} U_k$ et que cette réunion est disjointe.
On note (T) l'équation (d'inconnue x) : $\tan x = x$.

II.1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution sur U_k.
On note a_k cette solution.

II.2. Que vaut a_0 ?

II.3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{-k} = -a_k$.

On étudie maintenant $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

II.4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = \arctan a_k + k\pi$. Que vaut $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k$?

II.5. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $b_k = \dfrac{\pi}{2} + k\pi - a_k$.

Montrer que $b_k \in]0, \dfrac{\pi}{2}[$

II.6. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\tan b_k = \dfrac{1}{\tan a_k} = \dfrac{1}{a_k}$.

Quelle est la limite de (b_k), pour $k \to +\infty$?

II.7. Quelle est la limite de $(k\pi b_k)$?

On déduit de cette partie que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = k\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{k\pi} + \dfrac{1}{k}\epsilon\left(\dfrac{1}{k}\right)$ où $\epsilon(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$.

On exploitera la suite (a_k) dans la partie suivante.

Si nécessaire, on pourra faire l'approximation $a_k \approx k\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{k\pi}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $a_{-k} = -a_k$.

III Une première inégalité avec le sinus cardinal

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

III.1. Dérivabilité et représentation de sinc.

(a) Montrer que sinc est continue sur son ensemble de définition.

(b) Montrer que sinc est dérivable sur son ensemble de définition.

(c) Etudier les variations de sinc, les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
On exploitera la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ définie à la partie précédente.

(d) Tracer $y = \operatorname{sinc}(x)$ sur $[-3\pi, 3\pi]$

(e) Montrer que sinc est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
On montrera par la suite, que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ entier.

III.2. Relation intégrale et inégalité de Gronwall

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sinc}(x) = \displaystyle\int_0^1 \cos(xt)\mathrm{d}t$.

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $h \in [-1, 1]$:

$$\frac{\operatorname{sinc}(x+h) - \operatorname{sinc}x}{h} + \int_0^1 t\sin(xt)\mathrm{d}t = \int_0^1 \cos(tx)\frac{\cos(th) - 1}{h}\mathrm{d}t - \int_0^1 \sin(tx)\left(\frac{\sin th}{h} - t\right)\mathrm{d}t$$

(c) Pour les trois sous-questions suivantes, fixons $t \in [0, 1]$ et $h \in [0, 1]$.

i. Soit $f : [0, th] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, th]$ et deux fois dérivable sur $]0, th[$.
Montrer qu'il existe $c \in]0, th[$ tel que $f(th) = f(0) + f'(0) \times th + \dfrac{1}{2}f''(c) \times t^2h^2$.
On pourra considérer $\varphi : u \mapsto f(th) - f(u) - f'(u)(th - u) - \dfrac{M}{2}(th - u)^2$ où M est une constante bien choisie.

ii. En déduire que $\left|\dfrac{\cos(th) - 1}{h}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}t^2h$

iii. De même, en déduire que $\left|\dfrac{\sin(th)}{h} - t\right| \leqslant \dfrac{1}{2}t^2h$.

(d) En admettant que les deux inégalités trouvées précédemment reste vraie pour $h \in [-1, 0]$ (avec comme majorant $t^2|h|$), démontrer que sinc est dérivable en tout x de $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \operatorname{sinc}'(x) = -\int_0^1 t\sin(xt)\mathrm{d}t$$

UNE SIMPLE INTEGRATION PAR PARTIES SUFFIT !!

(e) On admet, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \operatorname{sinc}^{(n)}(x) = \displaystyle\int_0^1 t^n \cos^{(n)}(xt)\mathrm{d}t$.

Montrer que sinc est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\operatorname{sinc}^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{n+1} \qquad \text{(Inégalité de Gronwall (1913))}$$

IV Inégalité de Smirnov

On note (E) l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 mais à coefficients non constants

$$4xy'' + 2y' + y = 0 \qquad (E)$$

IV.1. Résolution de (E) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}_+^*$.
On considère donc I, un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$.

(a) Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \sqrt{x}$. Montrer que $\varphi_{|I}$ établit une bijection de I sur un intervalle J.

(b) Montrer que $g = f \circ \varphi$ solution de (E) sur I si et seulement f solution de (F) : $y'' + y = 0$

(c) En déduire que si g est solution de (E) sur I, alors il existe A et $B \in \mathbb{R}$ tels que $g : x \mapsto A\cos(\sqrt{x}) + B\sin(\sqrt{x})$.

(d) On considère $\overline{g} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto A\cos\sqrt{x} + B\sin\sqrt{x}$. Pour quelles valeurs de A et de B, $\overline{g}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$?
$\overline{g}$ est-elle alors de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$?

IV.2. Résolution de (E) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}_-^*$.
On considère donc I, un intervalle de $\mathbb{R}_-^*$.

(a) Soit $\psi : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \sqrt{-x}$. Montrer que $\psi_{|I}$ établit une bijection de I sur un intervalle J.

(b) On considère trois applications dérivables $f : I \to \mathbb{R}$, $\theta : J \to \mathbb{R}$ tel que $\theta(J) \subset I$ et $\sigma : K \to \mathbb{R}$ tel que $\sigma(K) \subset J$ ainsi $f \circ \theta \circ \sigma$ est bien définie et est dérivable sur K.
Exprimer $(f \circ \theta \circ \sigma)'$ en fonction de f', θ', σ', θ et σ.

(c) Montrer que $g = f \circ \psi$ solution de (E) sur I si et seulement f solution de (F) : $y'' - y = 0$

(d) En déduire que si g est solution de (E) sur I, alors il existe A et $B \in \mathbb{R}$ tels que $g : x \mapsto A\mathrm{ch}(\sqrt{-x}) + B\mathrm{sh}(\sqrt{-x})$.

(e) On considère $\overline{g} : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$, $x \mapsto A\mathrm{ch}\sqrt{-x} + B\mathrm{sh}\sqrt{-x}$. Pour quelles valeurs de A et de B, $\overline{g}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-$?
$\overline{g}$ est-elle alors de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_-$?

IV.3. On considère maintenant $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \cos(\sqrt{x}) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \mathrm{ch}(\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

(a) Pourquoi $\tilde{g}$ est-elle solution de (E), de classe $\mathcal{C}^2$, sur $\mathbb{R}$ en entier ?
On admet que $\tilde{g}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\tilde{g}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ en entier.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad 4x\tilde{g}^{(n+1)}(x) + (4n-2)\tilde{g}^{(n)}(x) + \tilde{g}^{(n-1)}(x) = 0$$

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\left|\tilde{g}^{(n)}(x_n)\right| = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \left|\tilde{g}^{(n)}(x)\right|$$

(d) En déduire l'inégalité :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}_+} \left|\tilde{g}^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{n!}{(2n)!} \qquad \text{(Inégalité de Smirnov (2018))}$$

On pourra raisonner par récurrence et distinguer les cas $x_n = 0$ et $x_n > 0$.

Correction

Problème - Inégalités de Gronwall et de Smirnov

I Une suite récurrente

On note $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$.

I.1. Etudier les variations de $g_1 = g_{|\mathbb{R}_+^*}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction g_1 est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (la seule difficulté est la dérivée en 0) par composition.
On a pour tout $x > 0$,

$$g_1'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \sin(\sqrt{x})$$

Pour tout $x > 0$, $\frac{1}{2}\sqrt{x} > 0$, donc

$$g_1'(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow \sin(\sqrt{x}) \leqslant 0 \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N} \text{ tel que } \sqrt{x} \in \left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right] \Longleftrightarrow x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left[\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)^2, \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)^2\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Ainsi } g_1 \text{ est croissante sur les intervalles } \left[\frac{(1+4k)^2}{4}\pi^2, \frac{(3+4k)^2}{4}\pi^2\right] \\ \text{et décroissante sur les intervalles } \left[\frac{(3+4k)^2}{4}\pi^2, \frac{(5+4k)^2}{4}\pi^2\right] \text{ avec } k \in \mathbb{N} \text{ et sur } [0, \frac{\pi^2}{4}].\end{array}}$$

I.2. Montrer que $g_1'(x)$ admet une limite finie (que l'on donnera) pour $x \to 0^+$.
Que peut-on en déduire concernant la dérivabilité de g en 0 ?

On est en présence d'une forme indéterminée $\frac{\sin t}{t}$ pour $t \to 0$, bien connue : elle vaut 1.
Donc le changement de variable $t = \sqrt{x}$, permet de calculer :

$$\boxed{g_1(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}} \sin \sqrt{x} = \frac{-1}{2t} \sin t \to \frac{-1}{2}}$$

Le théorème de limite de la dérivée permet d'affirmer (sans avoir à calculer la limite du taux de variations) que

$$\boxed{g \text{ est dérivable également en 0 et que } g'(0) = \frac{-1}{2}.}$$

I.3. Montrer que $I = \left]0, \frac{\pi^2}{4}\right[$ est stable par g_1.

D'après l'étude précédente, la fonction g_1 est décroissante sur I, donc $g_1(I) = \left]g_1\left(\frac{\pi^2}{4}\right), g_1(0)\right[=]0, 1[$

car $g_1(0) = \cos(\sqrt{0}) = 1$ et $g_1\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Puis comme $1 \leqslant \frac{\pi^2}{4}$, car $4 \leqslant \pi^2$ car $2 \leqslant \pi$, on a donc

$$\boxed{g_1(I) \subset I}$$

I.4. Montrer que l'équation $g_1(x) = x$ admet une unique solution sur I. On note ℓ ce nombre, on ne demande pas de l'évaluer.

Soit $h : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto g_1(x) - x$.
On a l'équivalence : $g_1(\ell) = \ell \Longleftrightarrow h(\ell) = 0$.
Puis, h est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$, $h'(x) = g_1'(x) - 1 < 0$ car $g_1'(x) < 0$.
Donc h est strictement décroissante sur I, continue (par soustraction).
Ainsi h établit une bijection de I sur $h(I) = \left]\lim_{\frac{\pi^2}{4}} h, \lim_0 h\right[= \left]-\frac{\pi^2}{4}, 1\right[$.
Puis $0 \in h(I)$, donc 0 admet unique antécédent par h dans I.

$$\boxed{\text{Donc } g_1 \text{ admet un unique point fixe sur l'intervalle } I.}$$

I.5. Montrer que pour tout $x, y \in I$, $|g_1(x) - g_1(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$.

Nous avons vu que g_1 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sur I. Et pour tout $x \in I$,

$$g_1'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x}} \sin\sqrt{x} \qquad g_1''(x) = \frac{-1}{4x}\cos\sqrt{x} + \frac{1}{4x\sqrt{x}}\sin\sqrt{x} = \frac{1}{4x\sqrt{x}}\left(\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right)$$

Notons $\theta(t) = \sin t - t\cos t$, $\theta'(t) = \cos t - \cos t + t\sin t = t\sin t > 0$ sur $J =]0, \frac{\pi}{2}[$.

Donc θ est croissante sur J. Or $\theta(0) = 0$, donc $\theta(t) > 0$, pour tout $t \in J$.

Et donc en considérant $\theta(\sqrt{t})$, on a bien $\frac{1}{4x\sqrt{x}}\left(\sin\sqrt{x} - \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right) > 0$ sur I.

Par conséquent, g_1' est strictement croissante sur I.
Donc, pour tout $x \in I$:

$$\frac{-1}{2} = g_1'(0) \leqslant g_1'(x) \leqslant g_1'\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = -\frac{1}{\pi}$$

On a alors $\sup_{x\in J} |g_1'(x)| = \frac{1}{2}$. On peut alors appliquer l'inégalité des accroissements finis sur J :

$$\boxed{\text{Pour tout } x, y \in I,\ |g_1(x) - g_1(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|.}$$

Soit $a \in I = \left]0; \frac{\pi^2}{4}\right[$. On considère la suite (u_n) (bien définie) par $u_0 = a$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = g_1(u_n)$.

I.6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$.

On applique la relation trouvée précédemment en $x \leftarrow u_n$ et $y \leftarrow \ell$.

$$\boxed{|u_{n+1} - \ell| = |g_1(u_n) - g_1(\ell)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|}$$

I.7. En déduire que (u_n) converge vers ℓ.

On montre alors par récurrence : $\mathcal{P}_n$: « $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^n}|a - \ell|$ ».

- Comme $u_0 = a$ et $\frac{1}{2^0} = 1$, $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.
  Alors
  $$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2 \times 2^n}|a - \ell| = \frac{1}{2^{n+1}}|a - \ell|$$
  Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Puis, comme $\lim \frac{1}{2^n}|a - \ell| = 0$, par le théorème d'encadrement, on peut affirmer $(|u_n - \ell|) \to 0$.

$$\boxed{\text{Autrement écrit : } (u_n) \text{ converge vers } \ell.}$$

I.8. Ecrire un programme en python, qui prend pour argument $\epsilon > 0$ et $a \in I$ et qui renvoie une approximation de ℓ à ϵ près en exploitant la suite (u_n), avec un contrôle sur n donné par ϵ et la relation $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.
On admet que $|a - \ell| \leqslant 2$, quel que soit la valeur de a donnée par l'utilisateur du programme.

Comme $\ell \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et que $a \in \left[0; \frac{5}{2}\right]$, on peut donc penser que $|a - \ell| \leqslant 2$, quel que soit a choisit initialement.
Cela donne le programme suivant :

```python
import numpy as np
def point_fixe(epsilon):
    """Approximation du point fixe de cos(sqrt(x)) a epsilon pres a partir de la valeur a"""
    approx=2
    u=a
    while approx>epsilon :
        approx=approx/2
        u=np.cos(np.sqrt(u))
     return(u)
```

$\boxed{\textbf{II Racines de l'équation } \tan x = x}$

On note, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $U_k =]-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi[$.
On rappelle que la fonction tan est définie sur $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} U_k$ et que cette réunion est disjointe.
On note (T) l'équation (d'inconnue x) : $\tan x = x$.

II.1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'équation $\tan(x) = x$ admet une unique solution sur U_k.
On note a_k cette solution.

Notons que $\tan x = x \iff \tan x - x = 0$.
Soit $k \in \mathbb{Z}$. Considérons donc $\varphi_k : U_k \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x - x$.
φ_k est dérivable sur U_k et pour tout $x \in U_k$, $\varphi_k'(x) = 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geqslant 0$.
Et pour tout $x \in U_k \setminus \{k\pi\}$, $\varphi_k'(x) > 0$. Donc φ_k est strictement croissante sur U_k.
De plus φ_k est continue, donc elle établit une bijection de U_k sur $]\lim\limits_{-\frac{\pi}{2}+k\pi} \varphi_k; \lim\limits_{\frac{\pi}{2}+k\pi} \varphi_k[=]-\infty;+\infty[$.
Comme $0 \in \mathbb{R}$, il existe un unique antécédent à 0 dans U_k par φ_k

$$\boxed{\text{De manière équivalente : l'équation } \tan(x) = x \text{ admet une unique solution sur } U_k.}$$

II.2. Que vaut a_0 ?

$\tan 0 = 0$. Il n'y a qu'une solution à (T) dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$: a_0.
On peut donc identifier :

$$\boxed{a_0 = 0}$$

II.3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{-k} = -a_k$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. On a donc $a_k \in U_k =]-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi[$ et $\tan(a_k) = a_k$.
Ainsi, $-a_k \in \left]-\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right); -\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\right[=]-\frac{\pi}{2}-k\pi; \frac{\pi}{2}-k\pi[= U_{-k}$.
et $\tan(-a_k) = -\tan(a_k) = -a_k$ par imparité de tan.
Ainsi $-a_k$ est une solution de (T) dans l'intervalle U_{-k}. Par unicité de cette racine (a_{-k}), nous pouvons identifier :

$$\boxed{a_{-k} = -a_k}$$

On étudie maintenant $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

II.4. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = \arctan a_k + k\pi$. Que vaut $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k$?

La fonction tan est $k\pi$ périodique, donc $\tan(a_k) = \tan(a_k - k\pi)$.
Par ailleurs, comme $a_k \in U_k$, $a_k - k\pi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Enfin, par définition de arctan, on a l'équivalence

$$\arctan u = \theta \qquad \iff \qquad \tan\theta = u \text{ et } \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

Ainsi, pour $u = \tan a_k$, il faut prendre $\theta = a_k - k\pi$. Cela donne $\arctan(\tan a_k) = a_k - k\pi$.
Enfin, comme $\tan a_k = a_k$, on trouve

$$\boxed{\arctan(\tan(a_k)) = \arctan(a_k) = a_k - k\pi \Longrightarrow a_k = \arctan(a_k) + k\pi}$$

Puis comme, pour tout θ, $\arctan\theta \geqslant -\frac{\pi}{2}$, on a $a_k \geqslant k\pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow[k\to+\infty]{} +\infty$.
Donc par le théorème de divergence par minoration :

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} a_k = +\infty}$$

II.5. On note, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $b_k = \frac{\pi}{2} + k\pi - a_k$.
Montrer que $b_k \in]0, \frac{\pi}{2}[$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $a_k \in U_k =]-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi[$, donc $a_k \geqslant 0$, donc $\arctan a_k \in [0, \frac{\pi}{2}[$,
Ainsi, $a_k = \arctan a_k + k\pi \in [k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$, donc $-\frac{\pi}{2} - k\pi \leqslant -a_k \leqslant -k\pi$. Et donc $0 \leqslant \underbrace{\frac{\pi}{2}+k\pi-a_k}_{=b_k} \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{b_k \in]0, \frac{\pi}{2}[}$$

II.6. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\tan b_k = \dfrac{1}{\tan a_k} = \dfrac{1}{a_k}$.
Quelle est la limite de (b_k), pour $k \to +\infty$?

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Par π-périodicité : $\tan b_k = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi - a_k\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - a_k\right) = \text{cotan}(a_k) = \dfrac{1}{\tan a_k}$.
Et comme $\tan a_k = a_k$:

$$\boxed{\tan b_k = \frac{1}{a_k}}$$

Comme $a_k \to +\infty$, on a directement : $\lim(\tan(b_k)) = 0$.
Puisque $b_k \in [0, \dfrac{\pi}{2}[$, $b_k = \arctan(\tan(b_k))$, si l'on compose par arctan, continue en 0, le calcul précédent de la limite :

$$\boxed{\lim(b_k) = \arctan(0) = 0}$$

II.7. Quelle est la limite de $(k\pi b_k)$?

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$k\pi b_k = k\pi \tan(b_k) \times \frac{b_k}{\tan b_k} = \frac{k\pi}{a_k} \times \frac{b_k}{\tan b_k} = \frac{k\pi}{\frac{\pi}{2} + k\pi - b_k} \times \frac{b_k}{\tan b_k}$$

Puis : comme $(b_k) \to 0$ et $\dfrac{\tan u}{u} \underset{u \to 0}{\longrightarrow} 1$, on a donc $\dfrac{b_k}{\tan b_k} \longrightarrow \dfrac{1}{1} = 1$.
Et $\dfrac{k\pi}{\frac{\pi}{2} + k\pi - b_k} = \dfrac{1}{1 - \underbrace{\dfrac{b_k}{k\pi}}_{\to 0} + \underbrace{\dfrac{1}{2k}}_{\to 0}} \longrightarrow 1$, par addition et passage à l'inverse.
Donc par produit :

$$\boxed{\lim_{k \to +\infty} k\pi b_k = 1}$$

Cela signifie que $b_k \sim \dfrac{1}{k\pi}$ et donc $a_k = k\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{k\pi} + c_k$, avec $c_k = o(b_k)$.
C'est la même chose que : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = k\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{k\pi} + \dfrac{1}{k}\epsilon\left(\dfrac{1}{k}\right)$ où $\epsilon(t) \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$.
Si nécessaire, on peut faire l'approximation $a_k \approx k\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{k\pi}$, pour $k \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $a_{-k} = -a_k$.

III Une première inégalité avec le sinus cardinal

On note, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

III.1. Dérivabilité et représentation de sinc.

(a) Montrer que sinc est continue sur son ensemble de définition.

La fonction sinc est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ (division de fonction continue).
On a vu dans le cours que $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$.
Ainsi sinc est également continue en 0.

$$\boxed{\text{sinc est continue sur son ensemble de définition : } \mathbb{R}.}$$

(b) Montrer que sinc est dérivable sur son ensemble de définition.

Pour les mêmes raisons, sinc est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
On va étudier la dérivabilité de sinc en 1 :
— ou bien directement en regardant le taux de variations : $\dfrac{\text{sinc}(x) - \text{sinc}(0)}{x} = \dfrac{\sin x - x}{x^2}$.
Nous sommes en face d'un forme indéterminée que l'on peut lever grâce au théorème de Lhospital :
$f_1 : x \mapsto \sin x - x$ se dérive en $f_1'(x) = \cos x - 1 (\to 0)$ puis en $f_1''(x) = -\sin x (\to 0)$.
$f_2 : x \mapsto x^2$ se dérive en $f_2'(x) = 2x$ puis en $f_2''(x) = 2$.
On a la suite des égalités de limite :

$$0 = \frac{0}{2} = \lim_{x \to 0} \frac{f_1''(x)}{f_2''(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \text{sinc}'(0)$$

— ou bien en exploitant le théorème de la limite de la dérivée.
Pour tout $x \neq 0$, $\mathrm{sinc}'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$. Il faut calculer la limite en 0.
Nous sommes en face d'un forme indéterminée que l'on peut lever grâce au théorème de Lhospital :
$f_3 : x \mapsto x\cos x - \sin x$ se dérive en $f_3'(x) = -x\sin x (\to 0)$ puis en $f_3''(x) = -\sin x - x\cos x (\to 0)$.
$f_4 : x \mapsto x^2$ se dérive en $f_4'(x) = 2x$ puis en $f_4''(x) = 2$.
On a la suite des égalités de limite :

$$0 = \frac{0}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{f_3''(x)}{f_4''(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f_3'(x)}{f_4'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{f_3(x)}{f_4(x)} = \lim_{x\to 0} \mathrm{sinc}'(0)$$

Ainsi sinc est également dérivable en 0 avec $\mathrm{sinc}'(0) = 0$.

$$\boxed{\text{Finalement, sinc est dérivable sur son ensemble de définition : } \mathbb{R}.}$$

(c) Etudier les variations de sinc, les limites aux bornes de l'ensemble de définition.
On exploitera la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ définie à la partie précédente.

On a calculé la dérivée de sinc : $\forall\, x \neq 0$, $\mathrm{sinc}'(x) = \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.
Pour $x \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, $\cos(x) = 0$ et $\sin(x) = \pm 1$, donc $x\cos x - \sin x = \pm 1 \neq 0$.
Ainsi les nombres de la forme $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, ne sont pas des racines de sinc'.
Considérons donc $x \not\equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$, on peut alors factoriser par $\cos x \neq 0$:

$$\mathrm{sinc}'(x) = 0 \Longleftrightarrow \cos x \times (x - \tan x) = 0 \Longleftrightarrow x \in \{a_k, k \in \mathbb{Z}\}$$

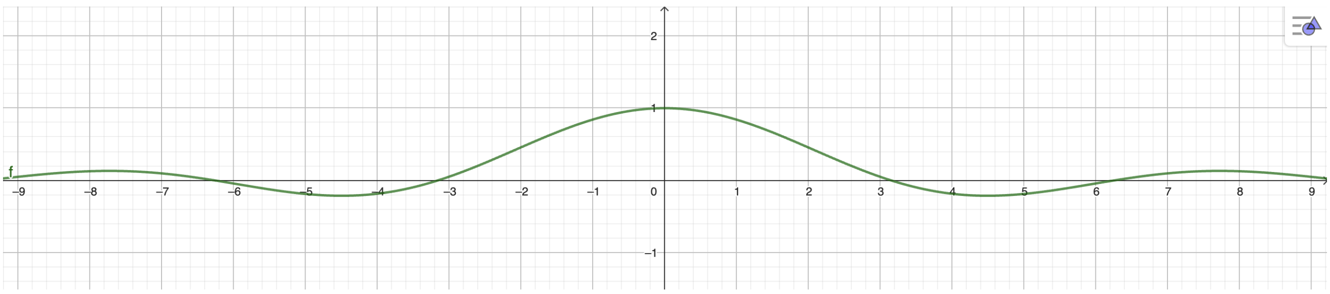
où a suite $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ a été définie à la partie précédente.
Ensuite, considérons $k \in \mathbb{N}$. Au voisinage de a_k, par croissance de $x \mapsto \tan x - x$,
on a pour $x \in]\dfrac{-\pi}{2} + k\pi, a_k[$, $\tan x - x \leqslant \tan a_k - a_k = 0$.
et pour $x \in]a_k, \dfrac{\pi}{2} + k\pi, [$, $\tan x - x \geqslant \tan a_k - a_k = 0$.
Puis, puisque $a_k \in U_k$, $\cos(a_k) \geqslant 0$ si k est pair et $\cos(a_k) \leqslant 0$ si k est impair.
Enfin, notons que le dénominateur x^2 est toujours positif.
On peut résumer : sur U_k,

- si $k = 2h$ est pair, $\mathrm{sinc}'(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow x - \tan x \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \in]\dfrac{-\pi}{2} + k\pi, a_k[=]\dfrac{-\pi}{2} + 2h\pi, a_{2h}[=]\dfrac{\pi}{2} + (2h-1)\pi, a_{2h}[$.
- si $k = 2h-1$ est impair, $\mathrm{sinc}'(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow x - \tan x \leqslant 0 \Longleftrightarrow x \in]a_k, \dfrac{\pi}{2} + k\pi[=]a_{2h-1}, \dfrac{\pi}{2} + (2h-1)\pi[$.

$$\boxed{\text{Donc sinc est croissante sur les intervalles de la forme } [a_{2h-1}, a_{2h}] \text{ et décroissante sur les intervalles de la forme } [a_{2h}, a_{2h+1}].}$$

(d) Tracer $y = \mathrm{sinc}(x)$ sur $[-3\pi, 3\pi]$

On notera que les racines de sinc sont les nombres de $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}^*\}$.



(e) Montrer que sinc est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
On montrera par la suite, que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ entier.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, sinc est la division de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$.
Donc $\mathrm{sinc}_{|\mathbb{R}_+^*}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Sur $\mathbb{R}_-^*$, sinc est la division de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_-^*$.
Donc $\mathrm{sinc}_{|\mathbb{R}_-^*}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et sur } \mathbb{R}_-^*.}$$

III.2. Relation intégrale et inégalité de Gronwall

(a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sinc}(x) = \displaystyle\int_0^1 \cos(xt)\mathrm{d}t$.

Une primitive de $t \mapsto \cos(xt)$ est $t \mapsto \dfrac{1}{x}\sin(xt)$ (il suffit de dériver), donc :

$$\boxed{\int_0^1 \cos(xt)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{x}\sin xt\right]_0^1 = \frac{\sin x}{x} - 0 = \operatorname{sinc}(x)}$$

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $h \in [-1,1]$:

$$\frac{\operatorname{sinc}(x+h) - \operatorname{sinc}x}{h} + \int_0^1 t\sin(xt)\mathrm{d}t = \int_0^1 \cos(tx)\frac{\cos(th)-1}{h}\mathrm{d}t - \int_0^1 \sin(tx)\left(\frac{\sin th}{h} - t\right)\mathrm{d}t$$

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h \in [-1,1]$,

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sinc}(x+h) - \operatorname{sinc}x}{h} + \int_0^1 t\sin(xt)\mathrm{d}t &= \int_0^1 \left(\frac{1}{h}(\cos((x+h)t) - \cos(xt)) + t\sin(xt)\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{h}\int_0^1 \Big(\cos(xt+ht) - \cos(xt) + th\sin(xt)\Big)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{h}\int_0^1 \Big(\cos(xt)\cos(th) - \sin(xt)\sin(th) - \cos(xt) + th\sin(xt)\Big)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\cos(xt)\frac{\cos(th)-1}{h} - \sin(xt)\left(t - \frac{\sin(th)}{h}\right)\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\operatorname{sinc}(x+h) - \operatorname{sinc}x}{h} + \int_0^1 t\sin(xt)\mathrm{d}t = \int_0^1 \cos(tx)\frac{\cos(th)-1}{h}\mathrm{d}t - \int_0^1 \sin(tx)\left(\frac{\sin th}{h} - t\right)\mathrm{d}t}$$

(c) Pour les trois sous-questions suivantes, fixons $t \in [0,1]$ et $h \in [0,1]$.

i. Soit $f : [0, th] \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, th]$ et deux fois dérivable sur $]0, th[$ Montrer qu'il existe $c \in]0, th[$ tel que $f(th) = f(0) + f'(0) \times th + \dfrac{1}{2}f''(c) \times t^2h^2$.

On pourra considérer $\varphi : u \mapsto f(th) - f(u) - f'(u)(th-u) - \dfrac{M}{2}(th-u)^2$ *où M est une constante bien choisie.*

Définissons $\varphi : [0, th] \to \mathbb{R}$, $u \mapsto f(th) - f(u) - f'(u)(th-u) - \dfrac{M}{2}(th-u)^2$

où M est choisit de telle manière que $\varphi(0) = 0$, i.e. $M = 2\dfrac{f(th) - f(0) - thf'(0)}{t^2h^2}$.

On a alors $\varphi(th) = 0$ et $\varphi(0) = 0.$, φ est continue sur $[0, th]$ et dérivable sur $]0, th[$ (par addition).

On peut appliquer le théorème de Rolle : $\exists\ c \in]0, th[$ tel que $\varphi'(c) = 0$.

Or pour tout $u \in]0, th[$, $\varphi'(u) = -f'(u) - f''(u)(th-u) + f'(u) + M(th-u)$.

Donc $0 = \varphi'(c) = \big(M - f''(c)\big)(th - c)$.

Or $c \neq th$, donc nécessairement, $M = f''(c)$.

En remplaçant M par cette nouvelle valeur, et comme $\varphi(0) = 0$, on trouve :

$$\boxed{\exists\ c \in]0, th[, 0 = f(th) - f(0) - f'(0) \times th - \frac{f''(c)}{2} \times (th)^2 \Rightarrow f(th) = f(0) + th \times f'(0) + t^2h^2 \times \frac{f''(c)}{2}}$$

---

ii. En déduire que $\left|\dfrac{\cos(th)-1}{h}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}t^2h$

On applique le résultat de la question précédente pour $f_1 = \cos$, continue sur $[0, th]$ et dérivable sur $]0, th[$,

$$\exists\ c \in]0, th[, \qquad \cos(th) = \cos(0) + th\cos'(0) + \frac{1}{2}t^2h^2\cos''(c)$$

Et comme $\cos 0 = 1$, $\cos'(0) = -\sin(0) = 0$, $\cos''(c) = -\cos(c)$, on a donc :

$$\exists\ c \in]0, th[, \qquad \cos(th) - 1 = \frac{1}{2}t^2h^2\cos''(c) \Rightarrow \frac{\cos(th)-1}{h} = \frac{-\cos(c)}{2}t^2h$$

Enfin, comme $|\cos c| \leqslant 1$, on trouve

$$\boxed{\left|\frac{\cos(th)-1}{h}\right| \leqslant \frac{1}{2}t^2h}$$

---

iii. De même, en déduire que $\left|\dfrac{\sin(th)}{h} - t\right| \leqslant \dfrac{1}{2}t^2 h$.

On applique le résultat précédent pour la fonction $f_2 : u \mapsto \sin u - u$, continue sur $[0, th]$ et dérivable sur $]0, th[$,

$$\exists\ c \in]0, th[, \qquad \sin(th) - th = (\sin(0) - 0) + th(\sin'(0) - 1) + \frac{1}{2}t^2h^2(\sin''(c) - 0)$$

Et comme $\sin 0 = 0$, $\sin'(0) = \cos(0) = 1$, $\sin''(c) = -\sin(c)$, on a donc :

$$\exists\ c \in]0, th[, \qquad \sin(th) - th = \frac{1}{2}t^2h^2\sin''(c) \Rightarrow \frac{\sin(th)}{h} - t = \frac{-\sin(c)}{2}t^2h$$

Enfin, comme $|\sin c| \leqslant 1$, on trouve

$$\boxed{\left|\frac{\sin(th)}{h} - t\right| \leqslant \frac{1}{2}t^2h}$$

(d) En admettant que les deux inégalités trouvées précédemment reste vraie pour $h \in [-1, 0]$ (avec comme majorant $t^2|h|$), démontrer que sinc est dérivable en tout x de $\mathbb{R}$ et

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{sinc}'(x) = -\int_0^1 t\sin(xt)\mathrm{d}t$$

En reprenant l'égalité de 2.(b), on a

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\mathrm{sinc}(x+h) - \mathrm{sinc}(x)}{h} + \int_0^1 t\sin(xt)\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^1 \cos(tx)\frac{\cos(th) - 1}{h}\mathrm{d}t - \int_0^1 \sin(tx)\left(\frac{\sin th}{h} - t\right)\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \left|\int_0^1 \cos(tx)\frac{\cos(th) - 1}{h}\mathrm{d}t\right| + \left|\int_0^1 \sin(tx)\frac{\sin th}{h} - 1\mathrm{d}t\right| && \text{Inégalité triangulaire} \\
&\leqslant \int_0^1 |\cos(tx)|\left|\frac{\cos(th) - 1}{h}\right|\mathrm{d}t + \int_0^1 |\sin(tx)|\left|\frac{\sin th}{h} - 1\right|\mathrm{d}t && \text{Inégalité d'intégration} \\
&\leqslant \int_0^1 1 \times \frac{1}{2}t^2|h|\mathrm{d}t + \int_0^1 1 \times \frac{1}{2}t^2|h|\mathrm{d}t = |h|\int_0^1 t^2\mathrm{d}t = \frac{|h|}{3}
\end{aligned}$$

La majorant admet une limite nulle pour $h \to 0$, donc le terme de gauche tend également vers 0,
ce qui signifie que $h \mapsto \dfrac{\mathrm{sinc}(x+h) - \mathrm{sinc}(x)}{h}$ admet une limite (pour $h \to 0$) qui vaut $-\displaystyle\int_0^1 t\sin(xt)\mathrm{d}t$.

$$\boxed{\text{sinc est dérivable en tout } x \text{ de } \mathbb{R} \text{ et } \forall\ x \in \mathbb{R},\ \mathrm{sinc}'(x) = -\int_0^1 t\sin(xt)\mathrm{d}t.}$$

(e) On admet, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \mathrm{sinc}^{(n)}(x) = \displaystyle\int_0^1 t^n\cos^{(n)}(xt)\mathrm{d}t$.
Montrer que sinc est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puis que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\mathrm{sinc}^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{n+1} \qquad \text{(Inégalité de Gronwall (1913))}$$

Remarque
En fait, à la question précédente, on a démontré

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^1 \cos(xt)\mathrm{d}t\right) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\cos(xt) \times \mathrm{d}t$$

Démontrer ce genre de résultat, de manière plus efficace, est un des enjeux du cours d'analyse de seconde année (on parle de la dérivation d'une intégrale à paramètre).
Le résultat reste vraie pour la dérivée n-ième par rapport à x qui vaut $t^n\cos^{(n)}(xt)$, d'où le résultat admis ici...

Pour démontrer que sinc est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, il reste à étudier le problème en 0.
Pour cela, il suffit de vérifier que $f^{(n)}$ admet une limtie en 0, à droite et à gauche.
On peut exploiter la relation intégrale. Il y a deux possibilités (multipliées par 2, selon le signe) :
ou bien $\cos^{(n)} = \pm\cos$ (cas n pair) ou bien $\cos^{(n)} = \pm\sin$ (cas n impair).
Etudions les deux cas $\displaystyle\int_0^1 t^n\cos(xt)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^1 t^n\sin(xt)\mathrm{d}t$, pour x proche de 0.

- On vient de voir $|\cos xt - 1| \leqslant \dfrac{1}{2}x^2t^2$, donc

$$\left|\int_0^1 t^n\cos(xt)\mathrm{d}t - \frac{1}{n+1}\right| = \left|\int_0^1 t^n\cos(xt)\mathrm{d}t - \int_0^1 t^n\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 t^n|\cos(xt) - 1|\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}x^2\int_0^1 t^{n+2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2(n+3)}x^2$$

Ainsi pour $x \to 0$, $\displaystyle\int_0^1 t^n \cos(xt)\mathrm{d}t$ converge vers $\dfrac{1}{n+1}$.

- On sait également que $|\sin xt| \leqslant xt$, donc

$$\left|\int_0^1 t^n \sin(xt)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 t^n |\sin(xt)|\mathrm{d}t \leqslant x\int_0^1 t^{n+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{n+2}x$$

Ainsi pour $x \to 0$, $\displaystyle\int_0^1 t^n \sin(xt)\mathrm{d}t$ converge vers 0.

On étudier tous les cas :

$$\boxed{\text{sinc}^{(n)} \text{ admet une limite en 0 égale à 0 si } n \text{ est impair, égale à } \frac{1}{n+1} \text{ si } n \equiv 0[4] \text{ et égale à } \frac{-1}{n+1} \text{ si } n \equiv 2[4].}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, sinc est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\text{sinc}^{(n)}(x)\right| = \left|\int_0^1 t^n \cos^{(n)}(xt)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 |t^n| \times \left|\cos\left(xt + \frac{\pi}{2}n\right)\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \left|\text{sinc}^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{n+1}}$$

IV Inégalité de Smirnov

On note (E) l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 mais à coefficients non constants

$$4xy'' + 2y' + y = 0 \qquad (E)$$

IV.1. Résolution de (E) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}_+^*$.

On considère donc I, un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$.

(a) Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \sqrt{x}$. Montrer que $\varphi_{|I}$ établit une bijection de I sur un intervalle J.

φ est une fonction continue et strictement croissante donc elle établit une bijection de I sur $\varphi(I)$.

(b) Montrer que $g = f \circ \varphi$ solution de (E) sur I si et seulement f solution de (F) : $y'' + y = 0$

Supposons que f est solution de (F).

Comme φ est dérivable deux fois sur I, comme f, il en est de même de g (par composition).

Puis on a pour tout x de I,

$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}f'(\sqrt{x})$ et $g''(x) = \dfrac{-1}{4x\sqrt{x}}f'(\sqrt{x}) + \dfrac{1}{4x}f''(\sqrt{x})$.

Et donc si on injecte $y \leftarrow g$ dans (E) :

$$4xg''(x) + 2g'(x) + g(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}}f'(\sqrt{x}) + f''(\sqrt{x}) + \frac{1}{\sqrt{x}}f'(\sqrt{x}) + f(\sqrt{x}) = (f'' + f)(\sqrt{x}) = 0$$

car f est solution de (F).

Réciproquement, supposons que g est solution de (E).

alors pour tout $x \in \{t \mid t^2 \in I\}$, $g(x^2) = f(x)$, donc f est dérivable deux fois comme g et $x \mapsto x^2$.

On a alors $f'(x) = 2xg'(x^2)$ et $f''(x) = 2g'(x^2) + 4x^2g''(x^2)$.

Et ainsi

$$f''(x) + f(x) = 2g'(x^2) + 4x^2g''(x^2) + g(x^2) = 0$$

car g est solution de (E), appliquée en $t = x^2$.

Et par conséquent, f est solution de (F).

$$\boxed{g = f \circ \varphi \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \text{ si et seulement } f \text{ solution de } (F) : y'' + y = 0.}$$

(c) En déduire que si g est solution de (E) sur I, alors il existe A et $B \in \mathbb{R}$ tels que $g : x \mapsto A\cos(\sqrt{x}) + B\sin(\sqrt{x})$.

Soit g une solution de (E), alors $f = f \circ \varphi$ est solution de (F).

Or l"équation différentielle (F) est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Son équation caractéristique associée est $x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$, qui admet deux racines complexes conjugués.

Ainsi :

$$\exists\, A, B \in \mathbb{R} \text{ tels que } \forall\, t \in \mathbb{R}_+, f(t) = e^{0t}(A\cos(1t) + B\sin(1t)) = A\cos t + B\sin t$$

Le changement de variable avec $\varphi : x \mapsto \sqrt{x}(= t)$ permet de conclure

$$\boxed{\text{Si } g \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I, \text{ alors il existe } A \text{ et } B \in \mathbb{R} \text{ tels que } g : x \mapsto A\cos(\sqrt{x}) + B\sin(\sqrt{x}).}$$

(d) On considère $\overline{g} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto A\cos\sqrt{x} + B\sin\sqrt{x}$. Pour quelles valeurs de A et de B, $\overline{g}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$? $\overline{g}$ est-elle alors de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$?

L'application $\varphi : x \mapsto \sqrt{x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (problème de dérivée en 0), les fonctions cos et sin sont également de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc g est, par composition, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, sans la moindre contrainte.
Il faut donc raisonner sur la question de la dérivabilité (double) en 0.
On va essayer d'exploiter le théorème du caractère $\mathcal{C}^1$ de la dérivée et du caractère $\mathcal{C}^2$ de la dérivée seconde.
Pour tout $x > 0$,

$$\overline{g}'(x) = \frac{B}{2\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x}) - \frac{A}{2\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})$$

- Or $\dfrac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \infty$. Pour $\overline{g}'$ admette une limite, il est donc nécessaire que $B = 0$.
  Ainsi si $B \neq 0$, il reste possible que $\overline{g}$ soit dérivable en 0 (il faut faire le calcul du taux de variation), mais dans tous les cas $\overline{g}'$ ne peut être continue en 0. Donc $\overline{g}$ ne serait pas de classe $\mathcal{C}^1$.
  Ainsi : nécessairement $B = 0$.
- Par ailleurs, comme $\dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sin u}{u} \underset{(u^2=)x\to 0}{\longrightarrow} 1$, il n'y a pas de contrainte sur A et $\overline{g}$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

$$\boxed{\text{Pour que } \overline{g} \text{ soit de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+, \text{ il faut et il suffit que } B = 0, \text{ donc } \overline{g} : x \mapsto A\cos\sqrt{x}.}$$

Etudions maintenant $\overline{g}'' : x \mapsto -\dfrac{A}{4x}\cos(\sqrt{x}) + \dfrac{A}{4x\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x})$ (le calcul a été en première partie).
Il y a cette fois-ci addition de deux formes indéterminées. Il faut les étudier ensemble. On va poser $u = \sqrt{x}$:

$$\overline{g}''(x) = \frac{A}{4x\sqrt{x}}\left(\sin(\sqrt{x}) - \sqrt{x}\cos(\sqrt{x})\right) = \frac{A}{4}\frac{\sin u - u\cos u}{u^3}$$

On a une forme indéterminée, que l'on va résoudre grâce à la règle de Lhospital.
$\theta_1 : u \mapsto \sin u - u\cos u$,
$\theta_1'(u) = \cos u - \cos u + u\sin u = u\sin u \to 0$.
$\theta_1''(u) = \sin u + u\cos u \to 0$.
$\theta_1'''(u) = \cos u + \cos u - u\sin u \to 2$.
$\theta_2 : u \mapsto u^3$,
$\theta_2'(u) = 3u^2 \to 0$
$\theta_2''(u) = 6u \to 0$
$\theta_2'''(u) = 6 \to 6$
Donc, on peut appliquer (3 fois, en remontant) la règle de Lhospital et donc

$$\boxed{\overline{g}''(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{A}{4} \times \frac{2}{6} = \frac{A}{12}. \text{ Donc } \overline{g} \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

IV.2. Résolution de (E) sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}_-^*$.
On considère donc I, un intervalle de $\mathbb{R}_-^*$.

(a) Soit $\psi : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \sqrt{-x}$. Montrer que $\psi_{|I}$ établit une bijection de I sur un intervalle J.

ψ est une fonction continue et strictement décroissante donc elle établit une bijection de I sur $\psi(I)$ (avec inversion des images des bornes).

(b) On considère trois applications dérivables $f : I \to \mathbb{R}$, $\theta : J \to \mathbb{R}$ tel que $\theta(J) \subset I$ et $\sigma : K \to \mathbb{R}$ tel que $\sigma(K) \subset J$ ainsi $f \circ \theta \circ \sigma$ est bien définie et est dérivable sur K.
Exprimer $(f \circ \theta \circ \sigma)'$ en fonction de f', θ', σ', θ et σ.

On applique « calmement »la formule

$$(f \circ \theta \circ \sigma)' = \left((f\circ\theta)\circ\sigma\right)' = \sigma' \times (f\circ\theta)'\circ\sigma = \sigma' \times \left(\theta' \times f'\circ\theta\right)\circ\sigma$$

$$\boxed{(f\circ\theta\circ\sigma)' = \sigma' \times [\theta'\circ\sigma] \times [f'\circ\theta\circ\sigma]}$$

Les crochets ne sont pas nécessaires...

(c) Montrer que $g = f \circ \psi$ solution de (E) sur I si et seulement f solution de $(F') : y'' - y = 0$

Supposons que f est solution de (F').
Comme ψ est dérivable deux fois sur I, comme f, il en est de même de g (par composition).
Puis on a pour tout x de I, (on applique la formule précédente, avec $\sigma : x \mapsto -x$, $\theta : x \mapsto \sqrt{x}$) :

$g'(x) = (-1) \times \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} f'(\sqrt{-x}) = \dfrac{-1}{2\sqrt{-x}} f'(\sqrt{-x})$ et

$$g''(x) = \frac{-1}{2} \times \left[\underbrace{(-1)}_{=\sigma'} \times \frac{-1}{2}(-x)^{-3/2}\right] f'(\sqrt{-x}) + \left(\frac{-1}{2\sqrt{-x}}\right)^2 f''(\sqrt{-x}) = \frac{1}{4x\sqrt{-x}}f'(\sqrt{-x}) - \frac{1}{4x}f''(\sqrt{-x}).$$

car $(\sqrt{-x})^2 = -x$ (car $-x<0$ et que le carré est positif.
Et donc si on injecte $y \leftarrow g$ dans (E) :

$$4xg''(x)+2g'(x)+g(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}f'(\sqrt{-x}) - f''(\sqrt{-x}) - \frac{1}{\sqrt{-x}}f'(\sqrt{-x}) + f(\sqrt{-x}) = -(f''-f)(\sqrt{x}) = 0$$

car f est solution de (F').
Réciproquement, supposons que g est solution de (E).
alors pour tout $x \in \{t \mid -t^2 \in I\}$, $g(-x^2) = f(\sqrt{-(-x^2)}) = f(x)$, donc f est dérivable deux fois comme g et $x \mapsto -x^2$.
On a alors $f'(x) = -2xg'(-x^2)$ et $f''(x) = -2g'(-x^2) + 4x^2g''(-x^2)$.
Et ainsi

$$f''(x) - f(x) = -2g'(-x^2) + 4x^2g''(-x^2) - g(-x^2) = -2g'(-x^2) - 4(-x^2)g''(-x^2) - g(-x^2) = 0$$

car g est solution de (E), appliquée en $t=-x^2$.
Et par conséquent, f est solution de (F').

$$\boxed{g = f\circ\psi \text{ solution de } (E) \text{ sur } I \text{ si et seulement } f \text{ solution de } (F') : y''-y=0.}$$

(d) En déduire que si g est solution de (E) sur I, alors il existe A et $B \in \mathbb{R}$ tels que $g : x \mapsto A\mathrm{ch}(\sqrt{-x}) + B\mathrm{sh}(\sqrt{-x})$.

Soit g une solution de (E), alors $f = f\circ\psi$ est solution de (F').
Or l"équation différentielle (F') est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
Son équation caractéristique associée est $x^2-1 = (x+1)(x+1)$, qui admet deux racines distinctes.
Ainsi :

$$\exists\ A, B \in \mathbb{R} \text{ tels que } \forall\ t \in \mathbb{R}_+, f(t) = A\mathrm{ch}(1t) + B\mathrm{sh}(1t))$$

Le changement de variable avec $\psi : x \mapsto \sqrt{-x}(=t)$ permet de conclure

$$\boxed{\text{Si } g \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I, \text{ alors il existe } A \text{ et } B \in \mathbb{R} \text{ tels que } g : x \mapsto A\mathrm{ch}(\sqrt{-x}) + B\mathrm{sh}(\sqrt{-x}).}$$

(e) On considère $\overline{g} : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$, $x \mapsto A\mathrm{ch}\sqrt{-x} + B\mathrm{sh}\sqrt{-x}$. Pour quelles valeurs de A et de B, $\overline{g}$ est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-$? $\overline{g}$ est-elle alors de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_-$?

L'application $\psi : x \mapsto \sqrt{-x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_-^*$ (problème de dérivée en 0), les fonctions ch et sh sont également de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, donc g est, par composition, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_-^*$, sans la moindre contrainte.
Il faut donc raisonner sur la question de la dérivabilité (double) en 0^-.
On va essayer d'exploiter le théorème du caractère $\mathcal{C}^1$ de la dérivée et du caractère $\mathcal{C}^2$ de la dérivée seconde.
Pour tout $x>0$,

$$\overline{g}'(x) = \frac{-B}{2\sqrt{-x}}\mathrm{ch}(\sqrt{-x}) - \frac{A}{2\sqrt{-x}}\mathrm{sh}(\sqrt{-x})$$

- Or $\dfrac{\cos(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} \infty$. Pour $\overline{g}'$ admette une limite, il est donc nécessaire que $B=0$.
  Ainsi si $B\neq 0$, il reste possible que $\overline{g}$ soit dérivable en 0 (il faut faire le calcul du taux de variation),
  mais dans tous les cas $\overline{g}'$ ne peut être continue en 0. Donc $\overline{g}$ ne serait pas de classe $\mathcal{C}^1$.
  Ainsi : nécessairement $B=0$.
- Par ailleurs, comme $\dfrac{\mathrm{sh}(\sqrt{-x})}{\sqrt{-x}} = \dfrac{\mathrm{sh}u}{u} \underset{(u^2=)x\to 0}{\longrightarrow} 1$, il n'y a pas de contrainte sur A et $\overline{g}$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-$.

$$\boxed{\text{Pour que } \overline{g} \text{ soit de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_-, \text{ il faut et il suffit que } B=0, \text{ donc } \overline{g} : x\mapsto A\mathrm{ch}\sqrt{x}.}$$

Etudions maintenant $\overline{g}'' : x \mapsto -\dfrac{A}{4x}\mathrm{ch}(\sqrt{-x}) + \dfrac{A}{4x\sqrt{-x}}\mathrm{sh}(\sqrt{-x})$.
Il y a cette fois-ci addition de deux formes indéterminées. Il faut les étudier ensemble. On va poser $u=\sqrt{-x}$:

$$\overline{g}''(x) = \frac{A}{4x\sqrt{-x}}\left(\mathrm{sh}(\sqrt{-x}) - \sqrt{-x}\mathrm{ch}(\sqrt{-x})\right) = \frac{A}{4}\frac{\mathrm{sh}u - u\mathrm{ch}u}{-u^3}$$

On a une forme indéterminée, que l'on va résoudre grâce à la règle de Lhospital.
$\theta_1 : u \mapsto \mathrm{sh}u - u\mathrm{ch}u$,
$\theta_1'(u) = \mathrm{ch}u - \mathrm{ch}u - u\mathrm{sh}u = -u\mathrm{sh}u \to 0$.
$\theta_1''(u) = -\mathrm{sh}u - u\mathrm{ch}u \to 0$.
$\theta_1'''(u) = -2\mathrm{ch}u - u\mathrm{sh}u \to -2$.
$\theta_2 : u \mapsto -u^3$,
$\theta_2'(u) = -3u^2 \to 0$
$\theta_2''(u) = -6u \to 0$
$\theta_2'''(u) = -6 \to -6$
Donc, on peut appliquer (3 fois, en remontant) la règle de Lhospital et donc

$$\boxed{\overline{g}''(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{A}{4}\times\frac{-2}{-6} = \frac{-A}{12}. \text{ Donc } \overline{g} \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}_-.}$$

IV.3. On considère maintenant $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} \cos(\sqrt{x}) & \text{si } x \geqslant 0 \\ \operatorname{ch}(\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

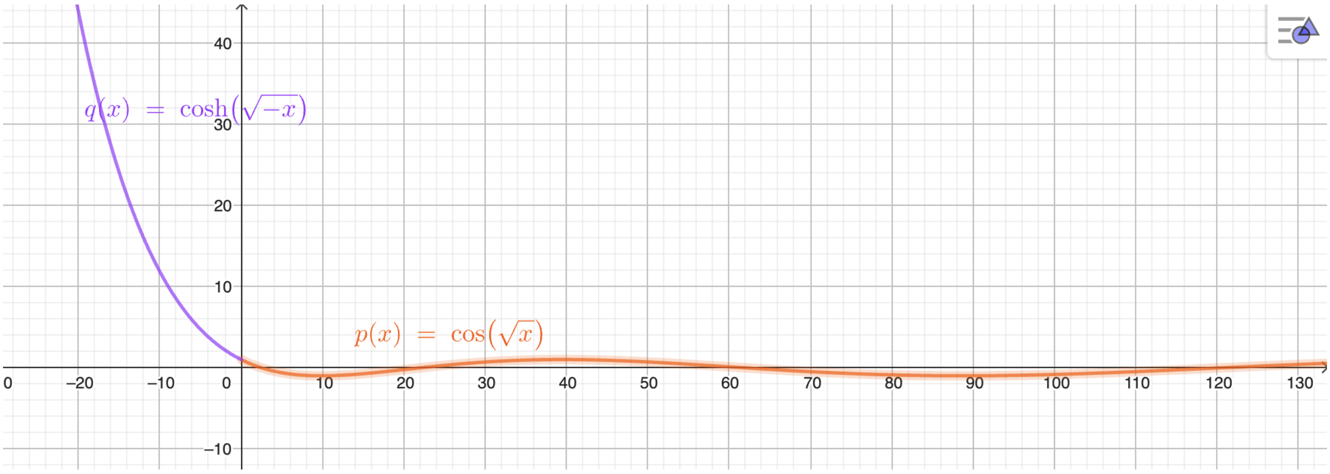
(a) Pourquoi $\tilde{g}$ est-elle solution de (E), de classe $\mathcal{C}^2$, sur $\mathbb{R}$ en entier ?

D'après les parties précédentes ($A = 1$),

$\tilde{g}_{|\mathbb{R}_+}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ avec $\tilde{g}'_{|\mathbb{R}_+}(0) = -\dfrac{1}{2}$ et $\tilde{g}''_{|\mathbb{R}_+}(0) = -\dfrac{-1}{12}$ $\quad$ $\tilde{g}_{|\mathbb{R}_-}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ avec $\tilde{g}'_{|\mathbb{R}_-}(0) = -\dfrac{1}{2}$ et $\tilde{g}''_{|\mathbb{R}_+}(0) = -\dfrac{-1}{12}$

Le théorème de prolongement du caractère $\mathcal{C}^1$ et $\mathcal{C}^2$, permet d'affirmer que

$$\boxed{\tilde{g} \text{ est solution de } (E) \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et est de classe } \mathcal{C}^2.}$$



On admet que $\tilde{g}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\tilde{g}$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ en entier.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad 4x\tilde{g}^{(n+1)}(x) + (4n-2)g^{(n)}(x) + \tilde{g}^{(n-1)}(x) = 0$$

On sait que, sur $\mathbb{R}$, $\tilde{g}$ vérifie l'équation différentielle (E) : $4xy'' + 2y' + y = 0$.
Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $4x\tilde{g}''(x) + 2\tilde{g}'(x) + \tilde{g}(x) = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On peut dériver $(n-1)$ fois cette relation. D'abord il s'agit d'une somme, donc par linéarité, cela donne :

$$0 = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\big(4x\tilde{g}''(x) + 2\tilde{g}'(x) + \tilde{g}(x)\big) = 4\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\big(x\tilde{g}''(x)\big) + 2\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\tilde{g}'(x) + \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\tilde{g}(x)$$

Pour les deux derniers termes, le calcul est simple : $\dfrac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\tilde{g}(x) = \tilde{g}^{(n-1)}(x)$ et $\dfrac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\tilde{g}'(x) = \tilde{g}^{(n)}(x)$.

Pour le premier, il s'agit d'un produit. On applique la formule de Leibniz. Comme $\dfrac{\partial^k}{\partial x^k}(x) = \begin{cases} x & \text{si } k = 0 \\ 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k \geqslant 2 \end{cases}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\big(x\tilde{g}''(x)\big) &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k}{n-1} \frac{\partial^k}{\partial x^k}(x) \frac{\partial^{n-1-k}}{\partial x^{n-1-k}}\big(\tilde{g}''(x)\big) \\ &= \underbrace{1 \times x \times \tilde{g}^{(2+(n-1))}(x)}_{k=0} + \underbrace{(n-1) \times 1 \times \tilde{g}^{(2+(n-1-1))}(x)}_{k=1} + \underbrace{0}_{k\geqslant 2} \\ &= x\tilde{g}^{(n+1)}(x) + (n-1)\tilde{g}^{(n)}(x) \end{aligned}$$

Et donc

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad 4x\tilde{g}^{(n+1)}(x) + [4(n-1)+2]\tilde{g}^{(n)}(x) + \tilde{g}^{(n-1)}(x) = 4x\tilde{g}^{(n+1)}(x) + (4n-2)\tilde{g}^{(n)}(x) + \tilde{g}^{(n-1)}(x) = 0}$$

(c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\left|\tilde{g}^{(n)}(x_n)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|\tilde{g}^{(n)}(x)\right|$$

Remarquons déjà ce qui se passe pour $n = 0$ et $n = 1$:

— Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\tilde{g}^{(0)}(x) = \cos(\sqrt{x})$, donc $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} |\tilde{g}^{(0)}(x)| = 1 = \dfrac{0!}{(2 \times 0)!}$. Donc on peut prendre $x_0 = 0$ (qui existe).

— Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\tilde{g}^{(1}(x) = \dfrac{-1}{2}\mathrm{sinc}(\sqrt{x})$, donc $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} |\tilde{g}^{(1)}(x)| = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1!}{(2\times 1)!}$ d'après III.

Donc on peut prendre $x_1 = 0$ (qui existe).

On nous demande de montrer que $\tilde{g}^{(n)}$ est majorée (existence du sup) et que le majorant est atteint.
Cela ressemble beaucoup aux conclusions du théorème de Weiestrass. Mais pour celui-ci il faut se placer sur un segment.
Commençons donc par démontrer que les valeurs de $\tilde{g}^{(n)}$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ sont sans intérêt.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$: « il existe $x_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $\left|\tilde{g}^{(n)}(x_n)\right| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} \left|\tilde{g}^{(n)}(x)\right|$ ».

— On vient de montrer que $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies.
— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}_{n-1}$ et $\mathcal{P}_n$ sont vraies.
Alors, en exploitant la relation sur les dérivées de $\tilde{g}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$|4x\tilde{g}^{(n+1)}(x)| = |-(4n-2)\tilde{g}^{(n)}(x) - \tilde{g}^{(n-1)}(x)| \leqslant (4n-2)|\tilde{g}^{(n)}(x_n)| + |\tilde{g}^{(n-1)}(x_{n-1})|$$

d'après $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n-1}$. n étant fixé, en divisant par $4x$ et faisant tendre $x \to +\infty$, on a nécessairement

$$\lim_{x\to+\infty} |\tilde{g}^{(n+1)}(x)| = 0$$

Ensuite, si $\tilde{g}^{(n+1)} = 0$, alors il existe bien x_{n+1} tel que $\tilde{g}^{(n+1)}(x_{n+1}) = 0 = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}_+} |\tilde{g}^{(n+1)}(x)|$

sinon, il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $|\tilde{g}^{(n+1)}(a)| > 0$, puis (comme la limite est nulle en $+\infty$)
$A > 0$ tel que $\forall\, x \geqslant A$, $|\tilde{g}^{(n+1)}(x)| \leqslant \dfrac{a}{2}$.
Enfin, $\tilde{g}^{(n+1)}$ est continue sur $[0, A]$, donc elle y est bornée et atteint ses bornes (max) en un certain x_{n+1}.
Donc $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$, $|\tilde{g}^{(n+1)}(x)| \leqslant |\tilde{g}^{(n+1}(x_{n+1})|$.

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ il existe } x_n \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \left|\tilde{g}^{(n)}(x_n)\right| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|\tilde{g}^{(n)}(x)\right|}$$

(d) En déduire l'inégalité :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|\tilde{g}^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{n!}{(2n)!} \qquad \text{(Inégalité de Smirnov (2018))}$$

On pourra raisonner par récurrence et distinguer les cas $x_n = 0$ et $x_n > 0$.

Comme indiquer faisons un raisonnement par récurrence.
— D'après la remarque faite en début de question précédente, le résultat est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$
— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \geqslant 2$. Supposons que le résultat est vraie en $n-2$ et $n-1$.
On sait que pour tout $x \geqslant 0$, $4x\tilde{g}^{(n+1)}(x) + (4n-2)\tilde{g}^{(n)}(x) + \tilde{g}^{(n-1)}(x) = 0$
En particulier, en x_n : $4x_n\tilde{g}^{(n+1)}(x_n) + (4n-2)\tilde{g}^{(n)}(x_n) + \tilde{g}^{(n-1)}(x_n) = 0$.
Si $x_n = 0$, on a alors $|\tilde{g}^{(n)}(x_n)| = \dfrac{1}{4n-2}|\tilde{g}^{(n-1)}(x_n)| \leqslant \dfrac{1}{4n-2}\dfrac{(n-1)!}{(2n-2)!}$ d'après $\mathcal{P}_{n-1}$.
Et donc $|\tilde{g}^{(n)}(x_n)| \leqslant \dfrac{(n-1)! \times n}{(2n-2)! \times 2(2n-1) \times n} = \dfrac{n!}{(2n)!}$.
Si $x_n \neq 0$, notons (en exploitant le relation différentielle) que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^{n-\frac{1}{2}}\tilde{g}^{(n)}(x)\right) = x^{n-\frac{3}{2}}\left(x\tilde{g}^{(n+1)}(x) + \left(n - \frac{1}{2}\right)\tilde{g}^{(n)}(x)\right) = \frac{-1}{4}x^{n-\frac{3}{2}}g^{(n-1)}(x)$$

Intégrons cette relation entre 0 et $X > 0$, quelconque :

$$X^{n-\frac{1}{2}}\tilde{g}^{(n)}(X) - 0 = \int_0^X \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{n-\frac{1}{2}}\tilde{g}^{(n)}(x)\right)\mathrm{d}x = \int_0^X \frac{-1}{4}x^{n-\frac{3}{2}}g^{(n-1)}(x)$$

En notant $M_{n-1} = |\tilde{g}^{(n-1)}(x_{n-1})|$, la borne supérieure de $|\tilde{g}^{(n-1)}|$, on a alors

$$\forall\, X > 0, \qquad X^{n-\frac{1}{2}}|\tilde{g}^{(n)}(X)| \leqslant \frac{1}{4}M_{n-1}\int_0^X x^{n-\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{4}M_{n-1}\frac{X^{n-\frac{1}{2}}}{n-\frac{1}{2}}$$

Donc en $X \leftarrow x_n$, et en simplifiant par $x_n^{n-\frac{1}{2}}$:

$$|\tilde{g}^{(n)}(x_n)| \leqslant \frac{M_{n-1}}{4n-2} \leqslant \frac{(n-1)!}{(2n-2)!}\frac{1}{4n-2} = \frac{n!}{(2n)!}$$

(c'est le même calcul que précédemment).

Dans tous les cas ($x_n = 0$ ou $x_n \neq 0$) l'hérédité est vérifiée.

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}_+} \left|\tilde{g}^{(n)}(x)\right| \leqslant \frac{n!}{(2n)!}}$$
