


# Fonctions de deux variables

 **Résumé -**

*Dans ce chapitre, nous aimerions clarifier à la sauce mathématicienne quelques méthodes exploitées en physique, où les fonctions ont pour arguments plusieurs variables.*

*Nous devons dans un premier temps, élargir la notion de limite : les valeurs absolues sont remplacées par des normes, les intervalles par des boules. Cela nécessite quelques définitions.*

*Puis, nous passons rapidement sur la continuité des fonctions de plusieurs variables pour nous concentrer ensuite sur la dérivation. Au passage, nous essayons d'illustrer tant que possible ce chapitre par des zooms sur les méthodes de physiques. Nous anticipons aussi le théorème des fonctions implicites et surtout les méthodes d'optimisation (sans ou avec contraintes) étudiés en seconde année.*

**Sommaire**

---

<b>1. Problèmes</b>	<b>750</b>
<b>2. Topologie</b>	<b>751</b>
2.1. Le cadre : espace vectoriel normé	751
2.2. Initiation à la topologie sur un espace normé	756
2.3. Topologie relative	757
2.4. Compact	758
2.5. Adhérences et intérieurs	760
<b>3. Continuité</b>	<b>761</b>
3.1. Limite	761
3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites	764
3.3. Exemple d'applications continues	765
3.4. Continuité sur un compact	767
3.5. Représentation graphique	767
<b>4. Calcul différentiel</b>	<b>769</b>
4.1. Développement limité. Différentiabilité	769
4.2. Dérivées partielles	770
4.3. Application de classe $\mathcal{C}^1$	772
4.4. Règle de la chaîne	775
<b>5. Visualisation et optimisation</b>	<b>777</b>
5.1. Tangente à une courbe, à une surface	777
5.2. Interprétation physique du gradient	781
5.3. Optimum libre	781
5.4. Optima liés	783
<b>6. Bilan</b>	<b>785</b>

---

## 1. Problèmes

### ? Problème 161 - Suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \mathbb{R}^p$

Rappel :

$$(u_n) \rightarrow \ell \iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, |u_n - \ell| \leq \epsilon$$

Comment généraliser la définition de la convergence d'une suite, lorsque celle-ci est à valeurs dans un espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$ .

En particulier, que faire de la valeur absolue?

### ? Problème 162 - Si la valeur absolue est remplacée par une norme...

On a vu qu'il existe de nombreuses normes sur un même espace vectoriel. A priori, chaque norme définie pour une même suite, sa propre limite. Ce n'est pas pratique...

A quelle condition la limite de  $(u_n)$  est indépendante de la norme considérée?

Cette condition est-elle alors toujours vérifiée? Ce qui serait bien pratique...

### ? Problème 163 - Continuité et représentation de $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Qu'est ce qu'une fonction continue de plusieurs variables? La question a-t-elle un sens? Comment faut-il dessiner une fonction  $f(x, y)$  sans lever le crayon, alors qu'en fait ce dessin est celui d'une surface?

### ? Problème 164 - Dérivation de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . De $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ?

On sait

- que les fonctions réelles se dérivent en calculant

$$\forall x \in I, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- Lorsque cette limite existe, on la note  $f'(x)$ .
- On a le théorème essentiel suivant :  $f$  est dérivable en  $x_0$  ssi  $f$  admet un D.L. d'ordre 1 en  $x_0$  :  $f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + o(x - x_0)$ . Dans ce cas  $f'(x_0) = A$
- La dérivée de  $f$  (en  $x_0$ ) précise donc le comportement de  $f$  au voisinage de  $x_0$ , une fois que l'on a fait disparaître le terme dominant donnant la valeur de premier ordre (i.e.  $f(x_0)$ ).
- Ainsi, la croissance (ou décroissance) d'une fonction est un critère local donné localement par tout  $f'(x)$ . L'étude du signe de  $f'$  permet alors de **généraliser** les variations de  $f$  à tout l'intervalle d'étude.

Que vaut approximativement  $\sqrt{4,001}$ ?

**? Problème 165 - Dérivation  $\Rightarrow$  continuité**

Est-ce que toute fonction dérivable  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est nécessairement continue?

Sinon, comment trouver un contre-exemple?

**? Problème 166 - « Tout problème mathématique est le calcul d'un maximum »**

comme le disait Euler. Comment faire alors pour trouver le maximum d'une fonction  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ ?

Et si, on ajoute en outre des contraintes sur les vecteurs  $\vec{u}$  de  $\mathbb{R}^p$ ?

## 2. Topologie

### 2.1. Le cadre : espace vectoriel normé

**↗ Heuristique - Pourquoi la topologie?**

Selon Wikipédia, l'étymologie du mot « topologie » (en grec  $\tau\omicron\pi\omicron\lambda\omicron\gamma\iota\alpha$ ) procède de l'association de deux noms grecs  $\tau\omicron\pi\omicron\sigma$  (topos, masculin) et  $\lambda\omicron\gamma\iota\alpha$  (logia, féminin) qui signifient respectivement « le lieu » et « l'étude ». Littéralement, topologie signifie l'« étude d'un lieu » ou « étude topique ».

Elle s'intéresse donc à définir ce qu'est un lieu (appelé aussi « espace ») et quelles peuvent en être les propriétés. Une ancienne dénomination fut analysis situs, c'est-à-dire « l'étude du lieu ».

La topologie est une branche des mathématiques concernant l'étude des déformations spatiales par des transformations continues (sans arrachages ni recollement des structures). La topologie s'intéresse plus précisément aux espaces topologiques et aux applications qui les lient, dites « continues ».

En analyse, grâce aux informations qu'elle fournit sur l'espace considéré, elle permet d'obtenir un certain nombre de résultats (existence ou unicité de solutions d'équations différentielles, notamment).

### Espace vectoriel normé

On se place dans des espaces vectoriels : on a besoin de pouvoir additionner les éléments (vecteurs) et les multiplier par des nombres.

On rappelle :

**Définition - Norme**

Soit  $E$ , un  $\mathbb{K}$ e.v. (où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

$N : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  est un norme si :

1.  $\forall x \in E, N(x) \geq 0$
2.  $\forall x \in E, N(x) = 0 \iff x = 0$
3.  $\forall x \in E, \lambda \in \mathbb{K}, N(\lambda \cdot x) = |\lambda|N(x)$
4.  $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$  (inégalité triangulaire)

Un espace vectoriel muni d'une norme est appelé un espace vectoriel normé

**🔴 Remarque - Norme et produit scalaire**

Nous avons vu ce qu'est un produit scalaire défini sur un espace vectoriel.

Si  $(\cdot | \cdot)$  est un produit scalaire défini sur  $E$ , alors  $N : x \mapsto \sqrt{(x|x)}$  est une norme.

On dit que c'est la norme (euclidienne) associée au produit scalaire.

Réciproquement, si  $N$  est une norme, elle dérive d'un produit scalaire si et seulement si  $(x, y) \mapsto \frac{1}{2}(N(x+y) - N(x) - N(y))$  est un produit scalaire (c'est alors le produit scalaire en question).

**Savoir faire - Renverser l'inégalité triangulaire**

Dans beaucoup d'exercices, il faut utiliser l'inégalité triangulaire pour également minorer  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

Comme  $\|x\| = \|x + y - y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ ,

donc  $\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\|$ , et de même  $\|y - x\| \geq \|y\| - \|x\|$ ,

or  $\|x - y\| = \|y - x\|$ , donc

$$\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$$

Rappelons que l'on a la majoration :  $\|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| = \|x\| + \|y\|$

**Remarque - Notation**

Il arrive souvent de noter la norme  $\|\cdot\|$  au lieu de  $N$ .

**Définition - Distance**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ ev.  $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  est une distance si :

1.  $\forall x, y \in E, d(x, y) \geq 0$
2.  $\forall x, y \in E, d(x, y) = 0 \iff x = y$
3.  $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$
4.  $\forall x, y, z \in E, d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Un espace vectoriel muni d'une distance est appelé espace métrique.

**Exercice**

Montrer que si  $N$  est une norme sur  $E$ , alors  $d : (x, y) \mapsto N(x - y)$  est une distance sur  $E$ .  
Tout espace normé est donc un espace métrique

**Exemple de normes (espaces vectoriels de dimension finie)****Proposition - Exemple de normes de  $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$  ou  $\mathbb{K}^n$** 

Considérons l'espace vectoriel  $\mathbb{K}^n$ .

Alors, les applications suivantes en sont des normes

- $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$
- $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_\infty = \max_i (|x_i|)$
- $\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

Cette dernière norme dérive du produit scalaire  $(x|y) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i$

Il est important de savoir démontrer cela.

**Démonstration**

**Convergence dans  $E$** 

On retrouve la même définition que pour la convergence de suites réelles, mais où la valeur absolue est remplacée par la norme.

**Définition - Convergence d'un espace vectoriel normé**

Soit  $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ .

On dit que  $(x_n)$  converge vers  $x$  dans  $(E, \|\cdot\|)$  si :


$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, \|x_n - x\| \leq \epsilon$$

Comme pour le cas réel : si la suite  $(x_n)$  converge, sa limite est unique, elle est notée  $\lim(x_n)$ . On dit alors simplement que  $(x_n)$  est une suite convergente.

**Exercice**

Montrer l'unicité de la limite

Voici un exemple de convergence pour  $\|\cdot\|_{\infty}$ .

 **Exemple - Convergence de**  $\left( \begin{array}{cc} (1 + \frac{1}{n})^n & n \sin \frac{1}{n} \\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & \arctan n \end{array} \right)$

### Normes équivalentes

#### ⚠ Attention - Résultat qui dépend de la norme

- ⚡ A priori la convergence d'une suite dépend de la norme considérée! C'est un vrai et grave problème, en particulier pour les suites (ou séries) de fonctions que vous verrez en seconde année.
- ⚡ Mais nous verrons plus loin que souvent ce problème se résout : il suffit que  $E$  soit de dimension finie où les normes sont équivalentes.

#### ↗ Heuristique - Une même limite pour deux normes différentes

Pour un même espace vectoriel, nous pouvons avoir plusieurs normes en présence. Est-il possible qu'une même suite de nombres de l'espace vectoriel considéré converge vers des limites différentes, selon la norme considérée?

Pour s'assurer que la limite est identique, il faut que pour deux normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$ , on ait :

$$\left(\forall \epsilon_1, \exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N_1, \|x_n - \ell\|_1 < \epsilon_1\right) \implies \left(\forall \epsilon_2, \exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N_2, \|x_n - \ell\|_2 < \epsilon_2\right)$$

et

$$\left(\forall \epsilon_2, \exists N_2 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N_2, \|x_n - \ell\|_2 < \epsilon_2\right) \implies \left(\forall \epsilon_1, \exists N_1 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \geq N_1, \|x_n - \ell\|_1 < \epsilon_1\right)$$

Pour cela il faut que  $\|x_n - \ell\|_1$  soit petite en même temps que  $\|x_n - \ell\|_2$ , pour tout  $(x_n)$  et  $\ell$ .

Notre habitude pour démontrer une convergence est d'utiliser des majorations et minorations, il faut et il suffit ici que les normes soient comparables (majorer et minorer) avec de constante de proportionnalité :

$$\exists A, B \text{ tels que } \forall X \in E \quad \|X\|_1 \leq A\|X\|_2 \text{ et } \|X\|_2 \leq B\|X\|_1$$

Que l'on peut résumer en une formule

#### Proposition - Normes équivalentes

Soit  $E$  un espace vectoriel normé, muni de deux normes  $N$  et  $N'$ .

On dit que  $N$  et  $N'$  sont équivalentes si il existe  $a$  et  $b \in \mathbb{R}_+^*$  tel que :

$\forall x \in E, \quad aN'(x) \leq N(x) \leq bN'(x)$ . Il s'agit d'une relation d'équivalence.

#### Exercice

Montrer que  $N'$  et  $N$  sont équivalentes si et seulement si :

$$\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}}, (x_n) \rightarrow 0 \text{ pour } N \Leftrightarrow (x_n) \rightarrow 0 \text{ pour } N'.$$

Notons que tout  $\mathbb{K}$  espace vectoriel de dimension  $n$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$ . L'isomorphisme (réciproque) peut aisément transférer la norme...

#### Proposition - Equivalence des normes usuelles

Soit  $E = \mathbb{K}^n$ , un espace vectoriel sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Alors, pour tout  $x \in E, \|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \leq n\|x\|_\infty$ .

#### Démonstration

**Exercice**

Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$

Ces normes sont équivalentes, est-ce un hasard ?

**Proposition - Norme équivalentes dans  $\mathbb{R}^2$**   
Toutes les normes de  $\mathbb{R}^2$  sont équivalentes.

**Démonstration**

◆ **Pour aller plus loin - Espace vectoriel normé de dimension finie (ex :  $\mathbb{K}^n$ )**  
Soit  $E$  est un espace vectoriel normé **de dimension finie**.  
Alors la convergence de toute suite ne dépend pas de la norme considérée.  
(soit elle converge vers  $\ell$  pour tout norme, soit elle diverge pour toute norme).  
En fait : toutes les normes définie sur  $E$  sont équivalentes.

**Avec des boules**

On raisonne parfois en terme de boules :

**Définition - Boules ouvertes / fermées**

Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé. Soit  $x \in E$  et  $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ . On appelle :

- boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $\rho$ , l'ensemble  $B(x, \rho) = \{y \in E \mid \|x - y\| < \rho\}$ .
- boule fermé de centre  $x$  et de rayon  $\rho$ , l'ensemble  $B_f(x, \rho) = \{y \in E \mid \|x - y\| \leq \rho\}$

**Proposition - Suite - en terme de boule**

Dans  $(E, \|\cdot\|)$  espace vectoriel normé,

$(x_n) \rightarrow x$  si et seulement si  $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$  tel que  $\forall n \geq N, x_n \in B_f(x, \epsilon)$

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow x \Leftrightarrow \bigcap_{\epsilon > 0} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} B(x_n, \epsilon) = \{x\}$$

**2.2. Initiation à la topologie sur un espace normé****Ouverts et fermés**

Pour chacun des résultats énoncés (définition et théorème), nous ferons le parallèle avec la situation dans  $\mathbb{R}$ . Dans toute la suite,  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé.

**Définition - Partie ouverte de  $E$** 

Une partie  $\Omega$  de  $E$  est dite ouverte si  $\Omega = \emptyset$  ou si

$$\forall x \in \Omega, \exists \rho > 0 \text{ tel que } B(x, \rho) \subset \Omega$$

**Exemple - Sur  $\mathbb{R}$** **Exemple - Sur  $\mathbb{R}^2$** **Exercice**

Montrer que  $A := ]0, 1[ \times ]0, 1[$  n'est pas une partie ouverte de  $\mathbb{R}^2$

**Proposition - Stabilité d'ouverts**

Les parties  $\emptyset$  et  $E$  sont des ouverts de  $E$ .

Une réunion d'ouverts est un ouvert.

Une intersection finie d'ouverts est un ouvert

**Attention - Ce n'est pas le cas d'une intersection infinie dénombrable d'ouverts**

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} ]\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}[ = \{0\}, \text{ qui n'est pas ouvert}$$

**Démonstration****Pour aller plus loin - Topologie**

L'ensemble des parties ouvertes de  $E$  s'appelle topologie de  $E$



**Définition - Partie fermée de  $E$** 

Une partie  $F$  de  $E$  est dite fermée si  $F = \emptyset$  ou si  $E \setminus F$  est un ouvert de  $E$

☞ **Exemple - Sur  $\mathbb{R}$ . Sur  $E$**

**Exercice**

Montrer que  $B = B_f(a, r)$  est un fermé de  $E$ . On peut s'aider d'un dessin !

Comme le complémentaire d'une réunion est une intersection :

**Proposition - Stabilité de fermés**

Les parties  $\emptyset$  et  $E$  sont des fermés de  $E$ .

Une intersection de fermés est un fermé.

Une réunion finie de fermés est un fermé

**⚠ Pour aller plus loin - Dessin**

En topologie, on peut s'aider facilement d'un dessin.

Mais cela ne fera pas office de démonstration...

**Exercice**

A démontrer

**⚠ Attention - Faux pour une réunion infinie dénombrable de fermés**

☞  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} ]\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[ = ]0, 1[$ , qui n'est pas fermé

**Un premier lien avec les suites****Proposition - Caractérisation des fermés**

$F$  est un fermé de  $E$

ssi pour toute suite  $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$  de  $F$ , convergente, on a  $\lim(x_n) \in F$

**Démonstration****2.3. Topologie relative****☞ Heuristique - Dans  $\mathbb{R}_+^2$** 

L'ensemble  $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y < 1\}$  est-il ouvert ou fermé? Cela semble compliqué.

Dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $(0, 0) \in \mathbb{R}_+$ , mais il n'existe aucune boule centrée en  $(0, 0)$  contenu dans  $S$  (quel que soit la norme).

Et en même temps  $(1, 0) \in \bar{S}$  mais il n'existe aucune boule centrée en  $(1, 0)$  contenu dans  $\bar{S}$ .

Dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $S$  n'est ni ouvert, ni fermé.

Mais ce n'est pas le cas si l'on regarde QUE dans  $\mathbb{R}_+^2$ . En effet, dans ce cas, la boule ouverte (euclidienne) centrée en  $(0, 0)$  de rayon  $r = \frac{1}{10}$  n'a que des éléments dans  $S$ , puisqu'égal-

ment nécessairement dans  $\mathbb{R}_+^2$ .  
 | Donc dans  $\mathbb{R}^2$ ,  $S$  est ouvert.

#### Définition - Ouvert/fermé relatif à une partie

Si  $E$  est l'espace vectoriel normé et  $A$  est une partie de  $E$ , alors

1. on dit que  $U$  est un ouvert relatif à  $A$ , si :  $\forall x \in U, \exists \epsilon > 0$  tel que  $B(x, \epsilon) \cap A \subset U$ .
2. on dit que  $V$  est un fermé relatif à  $A$ , si :  $A \setminus V$  est un ouvert relatif de  $A$ .

#### Exemple - Ouvert relatif non ouvert

#### Proposition - Caractérisations rapides

Soit  $A$  une partie de  $E$ . On a alors les caractéristiques importantes :

- $U$  est un ouvert relatif de  $A$  si et seulement si il existe  $O$  ouvert de  $E$  tel que  $U = O \cap A$ .
- $V$  est un fermé relatif de  $A$  si et seulement si il existe  $F$  fermé de  $E$  tel que  $V = F \cap A$ .

#### Démonstration

## 2.4. Compact

#### Définition - Compact (propriété de Bolzano-Weierstrass)

On dit qu'un ensemble  $K \subset E$  est compact,

si pour toute suite d'éléments de  $K$ , on peut extraire une suite convergente dans  $K$ .

Formellement :  $\forall (x_n) \in K^{\mathbb{N}}, \exists x \in K, \varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \nearrow \nearrow$  tel que  $x_{\varphi(n)} \rightarrow x$ .

On a une caractérisation simple des compacts de  $\mathbb{R}^n$  :

**Proposition - Compact de  $\mathbb{R}^p$**

Les compacts de  $\mathbb{R}^p$  sont exactement les parties fermées et bornées de  $\mathbb{R}^p$

◆ **Pour aller plus loin - Normes équivalentes**  
 Pour démontrer classiquement que toutes les normes sont équivalentes dans  $\mathbb{K}^n$ , on exploite les propriétés d'optimalité sur des compacts

On notera que dans la première partie de la démonstration, on n'a pas exploité que  $E = \mathbb{R}^n$ .

**Démonstration**

On a une propriété *essentielle* comparable au lemme de Cousin :

**Théorème - Caractérisation Borel-Lebesgue**

Soit  $E$  un espace normé. Soit  $K \subset E$ .

$K$  est compact si et seulement si pour toute famille d'ouverts recouvrant  $K$ , on peut en extraire un recouvrement fini.

Formellement :  $\forall (O_i) \in \mathcal{P}(E)^I$  famille d'ouverts de  $E$  telle que  $K \subset \bigcup_{i \in I} O_i$ ,

$\exists J \subset I$ , **fini** tel que  $K \subset \bigcup_{i \in J} O_i$ .

Exercice

A-t-on le lemme de Cousin en toute dimension ?

Si  $K$  est compact, est-ce que pour tout  $\delta : K \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ,

il existe  $N \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, x_2, \dots, x_N \in K$  tel que  $K \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \frac{\delta(x_i)}{2})$  ?

où  $B(x_i, \frac{\delta(x_i)}{2})$  est la boule ouverte de centre  $x_i$  et de rayon  $\frac{\delta(x_i)}{2}$ .

On propose la démonstration du théorème à l'aide d'un exercice (avec beaucoup de raisonnements par l'absurde).

Exercice

1. On considère  $K$  un compact de  $E$ .
  - (a) Montrer que pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$ ,  $x_1, \dots, x_n \in K$  tel que  $K \subset \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \epsilon)$ .  
On dit que  $K$  est précompact.
  - (b) Soit  $(O_i)_{i \in I}$  un recouvrement de  $K$  par des ouverts.  
Montrer qu'il existe  $\alpha > 0$  tel que  $\forall x \in K, \exists i \in I$  tel que  $B(x, \alpha) \subset O_i$ .
  - (c) En déduire le sens direct du théorème.
2. On suppose que  $K$  vérifie la propriété d'extraction finie de recouvrements (dite de Borel-Lebesgue).
  - (a) On considère une suite  $(F_n)$  décroissante, de fermés non vide de  $K$ . Montrer que  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$ .
  - (b) En déduire la réciproque du théorème.

## 2.5. Adhérences et intérieurs

### Remarque - Cas « pathologique » ...

Les fermés ou les ouverts sont deux cas typiques exceptionnels : la frontière est à prendre dans son ensemble (fermés) ou la frontière est à rejeter dans son ensemble (ouverts). La plupart du temps les cas sont plus intermédiaires...

#### Définition - Adhérence

Soit  $A$  une partie de  $E$ .

On note  $\bar{A} = \{x \in E \mid \forall \epsilon > 0, \exists a \in A \mid \|x - a\| < \epsilon\} = \bigcap_{\epsilon > 0} \left( \bigcup_{a \in A} B(a, \epsilon) \right)$ .

Alors  $A \subset \bar{A}$ .  $\bar{A}$  est un fermé.

En fait,  $\bar{A} = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F$ , où  $\mathcal{F}_A$  est l'ensemble de tous les fermés contenant  $A$ .

C'est une borne supérieure :  $\bar{A}$  est le plus petit fermé contenant  $A$ .

En particulier  $A$  est fermé si et seulement si  $\bar{A} = A$ .

#### Démonstration

**Savoir faire - Caractérisation de  $x \in \bar{A}$** 

Soit  $A$  une partie quelconque de  $E$ . Un élément  $x \in \bar{A}$  si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

- i)  $\forall \epsilon > 0, \exists a \in A$  tel que  $\|x - a\| < \epsilon$
- ii)  $\forall \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$
- iv)  $\exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}$  tel que  $\lim(x_n) = x$ .
- iii)  $d(x, A) = 0$

**Exercice**

Montrer que ces assertions sont équivalentes.

Montrer qu'elles signifient bien équivalente à  $x \in \bar{A}$

**Définition - Partie dense**

Une partie  $A$  est dite dense dans  $E$  si  $\bar{A} = E$

**Définition - Intérieur**

Soit  $A$  une partie de  $E$ .

On note  $A^o = \{x \in E \mid \exists \epsilon > 0, \forall a : \|x - a\| < \epsilon \Rightarrow a \in A\}$  Alors  $A^o \subset A$ .  $A^o$  est un ouvert.

En fait,  $A^o = \bigcup_{O \in \mathcal{O}_A} O$ , où  $\mathcal{O}_A$  est l'ensemble des ouverts inclus dans  $A$ .

C'est une borne inférieure :  $A^o$  est le plus grand ouvert contenu dans  $A$ .

En particulier  $A$  est ouvert si et seulement si  $A^o = A$ .

**Savoir faire - Caractérisation de  $x \in A^o$** 

Soit  $A$  une partie quelconque de  $E$ . Un élément  $x \in A^o$  si l'une des assertions suivantes est vérifiée :

- i)  $A$  est un voisinage de  $x$
- ii)  $\exists \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \subset A$

**Démonstration**

## 3. Continuité

### 3.1. Limite

**Définition**

**Définition - Limite (et continuité)**

Soit  $f : E \rightarrow F$ , une application entre deux espaces vectoriels normés.  
On dit que  $f$  admet en  $x_0 \in E$ , une limite égale à  $f(x_0)$  si l'une des propriétés suivantes (équivalentes) est vérifiée :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid \forall x \in E, \|x - x_0\|_E \leq \eta \implies \|f(x) - f(x_0)\|_F \leq \epsilon$$

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \mid f(B(x_0, \eta)) \subset B(f(x_0), \epsilon)$$

$$\forall (x_n) \in E^{\mathbb{N}} \text{ telle que } (x_n) \rightarrow x_0, \quad (f(x_n)) \rightarrow f(x_0)$$

On note alors  $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ .

Il faudrait montrer l'équivalence entre ces définitions. La première et la seconde sont évidemment semblables, il s'agit juste d'une réécriture en terme de boules (les implications et les inégalités deviennent des inclusions). Nous étudierons l'équivalence avec la troisième définition dans la partie suivante.

**Définition - Continuité en un point**

Soit  $a$  un point adhérent de  $\mathcal{D}_f$ . Si  $f$  admet une limite au point  $a$ , on dit que :

- $f$  est continue en  $a$  si  $a \in A$  et que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .
- $f$  se prolonge par continuité en  $a$  si  $a \notin A$  mais  $a$  est adhérent à  $A$ . on définit alors  $f(a) := \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

**Définition - Continuité sur une partie**

On dit que  $f$  est continue sur une partie  $A$  de  $E$ , si  $f$  est continue en tout  $a \in A$

**Remarque - Indépendance par rapport à la norme**

On rappelle que sur  $E$  et  $F$ , les normes sont équivalentes, donc les définitions de limite, continuité en un point, continuité sur une partie sont indépendantes des normes choisies.

**Exemple - Exemples**Exercice

La fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2}$  est-elle continue sur  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  ?

Caractérisation par coordonnées**Proposition - Caractérisation séquentielle**

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie, normés.  
Supposons que  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$  est base de  $F$ . Soit  $A$  une partie de  $E$ . Soit  $a$  un point adhérent de  $A$

Soit  $f$  une application de  $A$  dans  $F$ . Soit  $b = \sum_{i=1}^p b_i e_i \in F$ .

On suppose que  $f = \sum_{i=1}^p f_i e_i$ .

Alors :  $f$  admet  $b$  comme limite au point  $a$ ,

si et seulement si,  $\forall i \in \mathbb{N}$ ,  $f_i$  admet  $b_i$  comme limite au point  $a$ .

**Démonstration**

On ne s'intéressera maintenant qu'aux situations où  $F = \mathbb{R}$ .


**Continuité et topologie**

La continuité est la meilleure façon de transformer des fermés en fermés, des ouverts en ouverts. ... : d'étudier les topologies d'ensembles.


**Proposition - Image réciproque**

Soit  $f : E \rightarrow F$ , continue, alors :

- si  $B \subset F$  est ouvert, alors  $f^{-1}(B)$  est un ouvert.
- si  $B \subset F$  est fermé, alors  $f^{-1}(B)$  est un fermé.

** Application - Sous-espace vectoriel de dimension finie**** Attention - Image directe?**

 Ce résultat est vraie pour les images réciproque, mais pas les images directes.

 On a par ailleurs une équivalence :  $f$  est continue, si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert (resp. fermé) de  $F$  est un ouvert (resp. fermé) de  $E$ .

**Démonstration****Exercice**

Soit  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mid \frac{x+y}{x^2+y^2} > 1\}$ .  $B$  est-il ouvert ?

Soit  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \mid \frac{x+y}{x^2+y^2} \geq 1\}$ .  $C$  est-il ouvert ?  $C$  est-il fermé ?

**Remarque - Contournement du problème**

Pour éviter le problème en  $(0, 0)$ , on peut aussi considérer les équivalences :

$$\frac{x+y}{x^2+y^2} > 1 \iff x+y > x^2+y^2 \& (x, y) \neq (0, 0) \iff \psi(x, y) := x^2+y^2-x-y > 0 \& (x, y) \neq (0, 0)$$

**3.2. Critère de continuité (ou non) à l'aide de suites****Proposition - Caractérisation séquentielle**

Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie, normés.

Soit  $A$  une partie de  $E$ . Soit  $a$  un point adhérent de  $A$

Soit  $f$  une application de  $A$  dans  $F$ . Soit  $b \in F$ .

Alors :  $f$  admet  $b$  comme limite au point  $a$ ,

si et seulement si,  $\forall (x_n) \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow b$ .

**Démonstration****Savoir faire - Un bon critère de non continuité**

Si une fonction est telle que  $f(u_n)$  et  $f(v_n)$  admettent deux limites différentes alors que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  ont même limite, c'est qu'elle n'est pas continue.

Ainsi avec  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ , on a :

— avec  $(u_n) = (\frac{1}{n}, 0)$  qui converge vers  $(0, 0)$ ,  $f(u_n) = 0$  qui converge vers 0.

— avec  $(v_n) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$  qui converge vers  $(0, 0)$ ,  $f(v_n) = \frac{\frac{1}{n^2}}{2 \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$  qui converge vers  $\frac{1}{2}$ .

Donc  $f$  ne peut pas être continue en 0.

Une autre méthode qui marche souvent est d'étudier le terme dominant en rendant unidimensionnel les variables, c'est-à-dire en considérant  $y = \lambda x$ .

Alors  $f(x, y) = f_\lambda(x)$ , on étudie alors les limites possibles de  $f_\lambda(x)$ , pour  $x$  tendant vers 0, selon  $\lambda$ .

Si les limites dépendent de  $\lambda$ , alors  $f$  ne peut pas être continue.

Ici :  $f_\lambda(x) = f(x, \lambda x) = \frac{\lambda x^2}{(1+\lambda^2)x^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$ , limite qui dépend de  $\lambda$ .

Donc  $f(0, 0)$  n'a pas de valeur unique...

**Remarque - Autre utilisation :  $u_{n+1} = f(u_n)$** 

Si  $(u_n)$  est une suite vectorielle définie par récurrence par  $u_{n+1} = f(u_n)$ ,

et si  $(u_n)$  converge et que  $f$  est continue,

alors la limite  $\ell$  de  $(u_n)$  vérifie  $\ell = f(\ell)$ , même si  $f$  dépend de plusieurs variables.



### 3.3. Exemple d'applications continues

#### Proposition - Application lipschitzienne

Soit  $f : A \subset E \rightarrow F$  une application  $k$ -lipschitzienne.

Alors  $f$  est continue

Puisque  $\|\cdot\|$  est 1-lipschitzienne :

#### ✂ Savoir faire - Continuité de $\|\cdot\|$

L'application  $E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\|$  est continue sur  $E$ .

Soit  $x_0 \in A$ , alors  $\forall x \in A, \|f(x) - f(x_0)\| \leq k\|x - x_0\|$ .

Soit  $\epsilon > 0$ , alors avec  $\delta = \frac{\epsilon}{k}$ , on a :

$\forall x \in A, \|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| \leq k\delta = \epsilon$ .

Ceci étant vrai pour tout  $x_0$ ,  $f$  est continue sur  $A$  en entier

#### Proposition - Applications composées

Soient  $E, F, G$  trois espaces vectoriels de dimension finie et normés.

Soient  $f : A \subset E \rightarrow F, g : B \subset F \rightarrow G$  continues et telles que  $f(A) \subset B$ .

Alors :  $g \circ f : A \subset E \rightarrow G$  est continue.

#### Démonstration

#### Proposition - (et définition) Polynômes de plusieurs variables

On appelle fonctions polynomiales de  $n$  variables, les applications de la forme :

$$f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^p a_k x_1^{\alpha_{1,k}} \times x_2^{\alpha_{2,k}} \dots \times x_n^{\alpha_{n,k}},$$

où  $a_k \in \mathbb{K}$  et  $\alpha_{i,j} \in \mathbb{N}$ .

Il s'agit de combinaison linéaire de puissances des  $x_i$ .

*Cette définition étend celle des fonctions polynomiales à une seule variable.*

Les fonctions polynomiales de  $n$  variables sont continues sur  $\mathbb{K}^n$

#### ✂ Exemple - Déterminant

#### Exercice

Montrer que  $f : (x, y, z) \mapsto (\ln(xy^2), \frac{x+y}{z}, x^2y + y^2z + z^2x)$  est continue sur une partie  $A$  de  $\mathbb{R}^3$  à préciser

**✍ Savoir faire - Montrer qu'une application est continue**

Lorsqu'il faut montrer qu'une fonction de plusieurs variables est continue il faut :

1. bien étudier l'ensemble de définition
2. montrer par composition de fonctions continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et de fonctions polynomiales que  $f$  est continue sur une grande partie de l'ensemble de définition
3. terminer par l'étude aux points frontières.

En règle générale, il faut chercher les ordres maximaux et les comparer (cf. exercice suivant)

✍ **Exemple** -  $f : (x, y) \mapsto \frac{\ln(1 + xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

### 3.4. Continuité sur un compact

**Proposition - Image d'un compact par une fonction continue**

Si  $f$  est continue de  $E$  sur  $F$  et  $K$  est un compact de  $E$ ,  
alors  $f(K)$  est un compact de  $F$ .

**Démonstration**

Comme  $f(K)$  est fermé et borné :

**Proposition - Optimalité**

Si  $f$  est continue sur un compact de  $E$ ,  
Alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes

**Démonstration**

### 3.5. Représentation graphique

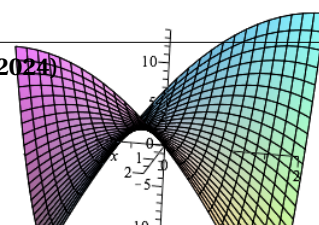
Il faut entendre ici surface au sens large : courbe, surface, volume, hypersphère...

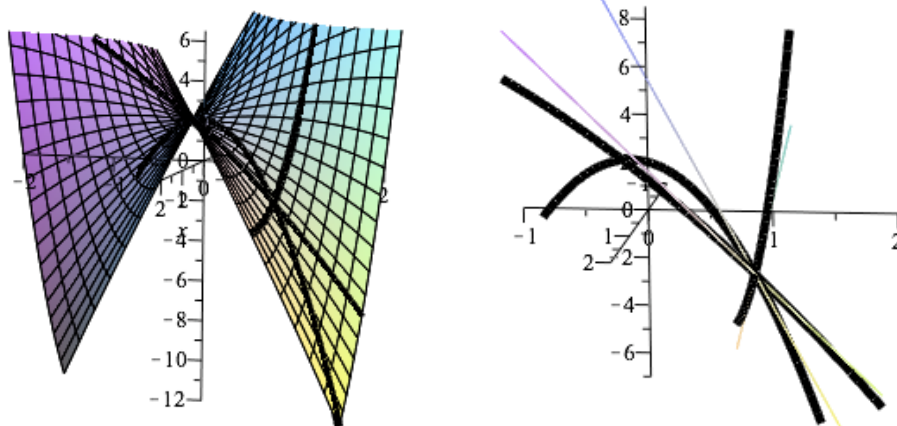
**Représentation des fonctions de plusieurs variables. « Dimension »  $p$**

🔍 Analyse - Représentation de fonctions de deux variables

🍃 Exemple - Sur la nappe  $S$  d'équation  $z = x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 4xy + 2$

✳ Représentation - Représentations graphiques de la nappe  $z = x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 4xy + 2$





LIGNES DE REPRÉSENTATION DE  $\varphi_{\vec{u}}$  ET DÉRIVÉES PARTIELLES

**Ligne de niveau. « Dimension »  $p - 1$**

**Remarque - Courbe des équipotentiels**

On peut s'intéresser au ligne de niveau :  $\{(x_1, \dots, x_p) \mid f(x_1, \dots, x_p) = C^{ste}\}$ . Il s'agit de l'ensemble décrit par les variables pour lesquels la fonction ne change de valeur.

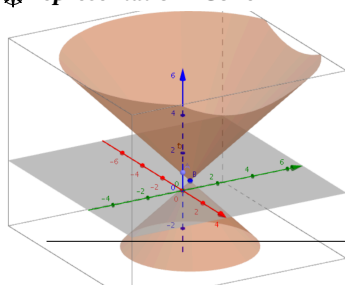
Si la fonction est une grandeur physique, par exemple un potentiel, il s'agit des points d'équipotentialité. Quitte à étudier  $g : (x_1, \dots, x_p) \mapsto f(x_1, \dots, x_p) - C^{ste}$ , on peut même faire l'étude sur des équipotentiels nuls.

**Définition - Ligne de niveau zéro**  
 Soit  $f$  une application définie sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ . On appelle ligne de niveau zéro la courbe d'équation  $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ . Il s'agit en fait de l'ensemble  $\{(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mid f(x_1, \dots, x_p) = 0\}$ .

**Exemple - Cône**

**Exemple - Cercle**

**Représentation - Cône**



**Représentation - Cercle**

**Bilan des représentation**

Finalement, il y a à croiser différents objets selon les dimension : courbe, surface, volume par rapport au mode de (re)présentation : explicite ( $y = f(x), z = f(x, y) \dots$ ), implicite (par une équation type ligne de niveau) et paramétrique ( $(x(t), y(t))$ , vu au chapitre précédent).

Ce qui donne

**Proposition - « Surface »**  
On a les objets géométriques suivants, selon les types suivants :

	Courbe (dans $\mathbb{R}^2$ )	Surface (dans $\mathbb{R}^3$ )
Explicite	$M(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tq $y = h(x)$ où $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ soit $\mathcal{C}^0$	$M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tq $z = g(x, y)$ où $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ soit $\mathcal{C}^0$
Implicite	$M(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tq $g(x, y) = 0$ où $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ soit $\mathcal{C}^0$	$M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tq $f(x, y, z) = 0$ où $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ soit $\mathcal{C}^0$
Paramétrique	$M(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ où $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	$M(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \mathbb{R}^3$ où $x, y, z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Evidemment, il possible d'envisager une généralisation de ces définitions.

**STOP** **Remarque - Comment coder une courbe (un chemin ou un arc) dans  $\mathbb{R}^3$  ?**

Cela peut être une intersection de variétés (deux surfaces de  $\mathbb{R}^3$ ), ou de manière plus pratique sous forme de arc paramétré :  $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ .

**◆ Pour aller plus loin - Variété**  
Cet ensemble n'est en règle générale pas un espace vectoriel, mais localement il est comparable à un sous-espace vectoriel de dimension  $p - 1$ .  
(On parle de variété de dimension  $p - 1$ ).

**4. Calcul différentiel**

**4.1. Développement limité. Différentiabilité**

**↗ Heuristique - Comment définir alors une dérivée de  $f$  ?**

Si notre motivation est de généraliser la démarche de dérivation d'une fonction à une variable : le signe de  $f'$  indique les variations de  $f$ , alors il faut se demander ce que signifie que la fonction est croissante ?

Dans  $\mathbb{R}^2$ , cela n'a plus aucun sens.

Il ne faut donc pas s'attacher à cette approche des choses : dérivée = variations, mais plutôt à l'autre approche beaucoup plus essentielle : dérivée =  $DL_1$ .

**◆ Pour aller plus loin - Petit guide de calcul différentiel**

Dans le petit et magnifique livre de F. Rouvière : petit guide de calcul différentiel, on voit décliner des milliers de fois une seule idée : « A  $\epsilon$  près, une fonction quelconque se ramène à une fonction linéaire »

A lire absolument!

**Définition - Différentielle**

Soient  $a \in U$  ouvert de  $E$  et  $f : U \rightarrow F$ .

On dit que  $f$  est différentiable en  $a$  si il existe une application linéaire  $L_a : E \rightarrow F$  tel que

$$\forall h \text{ tel que } a + h \in U, f(a + h) = f(a) + L_a(h) + o(\|h\|)$$

**STOP** **Remarque - Sens du  $o(\|h\|)$**

On rappelle que  $o(\|h\|)$  signifie une fonction  $\eta$  (ici  $\eta : h \mapsto f(a + h) - f(a) - L_a(h)$ ) tel que  $\frac{\|\eta(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ .

On peut aussi considérer la fonction  $\epsilon$  telle que  $\eta(h) = \|h\| \times \epsilon(h)$  avec  $\epsilon(h) \rightarrow 0_F$ .

**Proposition - Unicité de la différentielle**

Si  $f : U \subset E \rightarrow F$  est différentiable en  $a$ , alors la différentielle est unique. On note alors  $df(a)(h)$ , le vecteur  $L_a(h)$ .

**⚠ Attention - Nature des objets**

⚡ Que sont  $\partial f$ ,  $\partial f(a)$  et  $\partial f(a)(h)$  ?

⚡ Dans l'ordre inverse :  $\partial f(a)(h)$  un vecteur de l'espace (affine)  $F$ .

⚡  $\partial f(a)$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$ .

⚡  $\partial f$  : une application de  $E$  dans  $\mathcal{L}(E, F)$ .

**🔗 Application - Fonction  $f$  linéaire. Exemple de la trace**

🍃 **Exemple - Fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$**

🍃 **Exemple -  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto xy^2 + 3 \ln x + \frac{x}{y}$ .**

Il reste à faire la démonstration de l'unicité.

**Démonstration****4.2. Dérivées partielles**

On se concentre uniquement ici sur des fonctions de  $\mathbb{R}^p$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  ( $E = \mathbb{R}^p$ ,  $F = \mathbb{R}$ )

🛑 **Remarque - Fonctions de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$**

Pour des fonctions  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ , on peut décomposer  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ .

où pour tout  $i \in \mathbb{N}_n$ ,  $f_i : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ . Selon ce que l'on a déjà vu en sciences physiques :

**Définition - Dérivée partielle (d'ordre 1)**


Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $\vec{a} \in U$ .

Notons  $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ , la base canonique orthonormée de  $\mathbb{R}^p$ .

On appelle dérivées partielles de  $f$  la famille :  $(\partial_1 f(\vec{a}), \partial_2 f(\vec{a}), \dots, \partial_p f(\vec{a}))$  :

$$\forall i \in \mathbb{N}_p, \quad \partial_i f(\vec{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{e}_i) - f(\vec{a})}{h}$$

Pour tout  $i \in \mathbb{N}_p$ , on peut noter également ce nombre  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$

 **Exemple** -  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + (y - z)x + y^z$

 **Truc & Astuce pour le calcul - Calculer les dérivées partielles**

La dérivée partielle selon le vecteur de base  $\vec{e}_i$  s'obtient en calculant la dérivée de  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto f(\vec{a} + t\vec{e}_i)$ .

Cela consiste donc souvent, lorsque les variables associés aux  $(\vec{e}_j)$  sont clairement définissables, à dériver la fonction  $f$  en **tenant pour constante** toutes les variables  $x_j$  associés aux vecteurs  $\vec{e}_j \neq \vec{e}_i$ .

 **Exemple - Calcul des dérivées partielles de  $f : (x, y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$  en  $(1, 2)$ .**

Exercice

Calculer les dérivées partielles de la fonction  $f$  précédentes par rapport à la seconde et la troisième variable en  $\vec{a}$ .

 **Remarque - Si  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable**

Si  $(e_1, \dots, e_p)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ ,

$$\text{Alors } \partial f(a)(he_i) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \times h_i.$$

Donc si  $f$  est différentiable, alors  $f$  admet des dérivées partielles.

Il semble donc qu'il y ait bien une implication et une relation entre les deux notions.

**⚠ Attention - Nature des objets**

Supposons que  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ .

Alors  $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$  est un nombre ( $a$  est un vecteur) et donc  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$  est une application de  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ .

**4.3. Application de classe  $\mathcal{C}^1$** **Définition**

Nous cherchons un critère réciproque : l'existence des dérivées partielles implique-t-elle la différentiabilité ?

Un critère suffisant à ce que « tout se passe bien » est le fait que l'application soit de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ . Un exemple illustrera ce qui peut (mal) se passer lorsque la fonction n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Définition - Fonction de classe  $\mathcal{C}^1$** 

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ .

On dit que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  ou continûment différentiable sur  $U$  (ouvert),

si toutes les fonctions dérivées partielles  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  existent et sont continues de  $U$  dans  $\mathbb{R}$ .

Nous admettons déjà le résultat suivant (les explications suivront, ainsi que le critère de composition)

**Proposition - Exemples de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$** 

- Les fonctions polynomiales (à  $p$  variables) sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^p$ .
- Toute combinaison linéaire de fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  donc  $\mathcal{C}^1(U)$ , l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$  est un espace vectoriel

**Cas pathologiques**

La dérivabilité n'implique pas la continuité !

**⚠ Attention - Fonction dérivable mais non continûment**

La condition de continuité des dérivées de  $f$  est nécessaire comme le montre le contre-exemple suivant :

Soit  $f : (x, y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$  prolongé en  $f(0, 0) = 0$ .

Ici, les dérivées partielles en  $\vec{0} = (0, 0)$  donnent :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y^2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

$$\text{de même } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

Et plus généralement, pour tout  $\vec{u} = (a, b)$ ,

$$\varphi_{\vec{u}}(h) = \frac{1}{h}(f(\vec{0} + h\vec{u}) - f(\vec{0})) = \frac{h^3 ab^2}{h(h^2(a^2 + b^2))} = \frac{ab^2}{a^2 + b^2} \neq 0$$

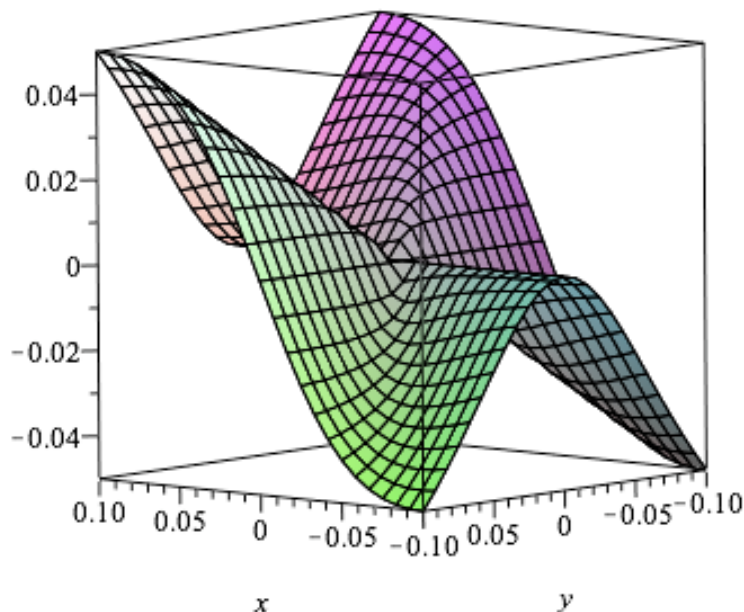
Donc on n'a pas  $D_{\vec{u}}(f)(0, 0) = a \frac{\partial f}{\partial x_1}(0, 0) + b \frac{\partial f}{\partial x_2}(0, 0)$ .

Ici les dérivées partielles ne sont pas continues en  $(0, 0)$ .

La représentation graphique montre que la fonction  $f$  n'est pas « totalement lisse » mais semble comme froissée.



**Remarque - Représentation d'une fonction dérivable mais pas continûment**



### Développement limité (retour)

#### Théorème - Développement limité

Soit  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^p$ .

Alors :

1.  $f$  est continue sur  $U$ .
2.  $f$  admet en tout point  $\vec{a}$  de  $U$  de  $\mathbb{R}^p$  un développement limité :

$$f(\vec{a} + \vec{u}) = f(\vec{a}) + \sum_{i=1}^p u_i \times \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) + \|u\| \times \epsilon(u)$$

où le vecteur  $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$  et  $\epsilon : U \rightarrow \mathbb{R}$ , tel que  $\epsilon(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} 0$ .

#### Démonstration

#### ◆ Pour aller plus loin - Démonstration

Considérons  $\vec{u}$ , un vecteur quelconque de norme petite.

On utilise un télescopage :

$$\vec{a} + \vec{u} = (\vec{a} + u_1 \vec{e}_1) + [(\vec{a} + u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2) - (\vec{a} + u_1 \vec{e}_1)] + \dots + [(\vec{a} + \vec{u}) - (\vec{a} + u_1 \vec{e}_1 + \dots + u_{n-1} \vec{e}_{n-1})]$$

Formellement :

$$\vec{a} + \vec{u} = (\vec{a} + u_1 \vec{e}_1) + \sum_{j=2}^p \left( (\vec{a} + \sum_{h=1}^j \vec{u}) - (\vec{a} + \sum_{h=1}^{j-1} \vec{u}) \right)$$

Et donc en  $f$ , on appliquant des développements limités d'ordre 1 :

$$f(\vec{a} + \vec{u}) - f(\vec{a}) = f(\vec{a} + u_1 \vec{e}_1) - f(\vec{a}) +$$

$$\sum_{j=2}^p \left( f(\vec{a} + \sum_{h=1}^j \vec{u}) - f(\vec{a} + \sum_{h=1}^{j-1} \vec{u}) \right) \\ = u_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) + u_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a} + u_1 \vec{e}_1) + \dots \\ + u_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{a} + \sum_{h=1}^{j-1} u_h \vec{e}_h) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(\vec{a} + \vec{u} - u_n \vec{e}_n)$$

Puis par continuité des dérivées partielles et en faisant tendre  $\|u\|_\infty$  vers 0, on retrouve le résultat annoncé

**Remarque - Notation physique**

Nous rencontrons parfois en physique l'équation (sans travail extérieur) :

$$dU = TdS - pdV.$$

Que signifie-t-elle ?

1. Que l'énergie libre ne dépend que de deux variables : l'entropie  $S$  et le volume occupé  $V$ .

*(localement, l'énergie peut dépendre d'autres couples de variable thermodynamique, mais nous ne sommes pas assurés que ces autres couples ne puissent pas donner plusieurs valeurs de  $U$ ... (surtout si ce sont des variables intensives)).*

Donc  $U = U(S, V)$

2. On a les dérivées exactes (et définition) :  $\frac{\partial U}{\partial S}(S, V) = T_{(S, V)}$  et  $\frac{\partial U}{\partial V}(S, V) = -p_{(S, V)}$

3. Puis la formule d'approximation de premier ordre :

$$\Delta U = U(S_0 + \delta S, V_0 + \delta V) - U(S_0, V_0) \approx \frac{\partial U}{\partial S}(S, V)\delta S + \frac{\partial U}{\partial V}(S, V)\delta V = T_{(S_0, V_0)}\delta S - p_{(S_0, V_0)}\delta V$$

**Gradient**

**Remarque - Pourquoi  $df(\vec{a}) : u \mapsto \dots$  est-ce bien une application linéaire ?**

En fait on a par définition :  $df(\vec{a}) : \vec{u} = (u_1, \dots, u_p) \mapsto \sum_{j=1}^p u_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(\vec{a})$ .

Il s'agit du produit scalaire canonique de  $\vec{u}$  par le vecteur  $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ .

C'est pourquoi on note plutôt  $df(\vec{a}) \cdot \vec{u}$  que  $df(\vec{a})(\vec{u})$ .

Cela explique aussi la linéarité de la différentielle. Mais nous avons plus largement intérêt à étudier ce dernier vecteur.

C'est ce qu'on appelle le gradient de  $f$  en  $\vec{a}$ .

D'après le théorème de représentation de Riesz en dimension finie :

**Définition - Gradient**

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ .

On appelle gradient de  $f$ , l'application vectorielle :

$$\nabla f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p, \vec{a} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

On a alors, pour tout  $\vec{u} \in \mathbb{R}^p$ ,  $df(\vec{a}) \cdot \vec{u} = \langle \nabla f(\vec{a}); \vec{u} \rangle$ .

Et aussi (approximation au 1<sup>er</sup> ordre) :  $f(\vec{a} + h\vec{u}) = f(\vec{a}) + h\langle \nabla f(\vec{a}); \vec{u} \rangle + o(h)$

#### 4.4. Règle de la chaîne

##### Dérivation d'une composition

Il s'agit ici d'étudier l'impact de la composition dans le calcul différentiel.

Voici le cas classique d'un arc à valeur sur une (hyper)-surface ( $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}^p$  puis  $\mathbb{R}^p$  sur  $\mathbb{R}$ ).

🔍 **Analyse - Composition** :  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$

##### **Proposition - Règle de la chaîne**

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert  $U$ . Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  ouvert de  $\mathbb{R}$ , avec  $\varphi(I) \subset U$ .

Alors  $g : f \circ \varphi$  est une fonction numérique de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et

$$\forall t \in I \quad g'(t) = \sum_{j=1}^p x'_j(t) \times \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(\vec{t}))$$

L'application physique suivante explique le nom donné à cette règle :

🔪 **Exemple - Fondamental!**

💡 **Truc & Astuce pour le calcul - Comment dériver des fonctions composées?**

Si vous devez dériver la suite de composition  $f \circ \varphi$  :

$$t \xrightarrow{\varphi} (x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{f} f \circ \varphi(t)$$

- $t$  a une influence sur tout  $x_k = \varphi_k(t)$  égale à  $\varphi'_k(t) = \frac{dx_k}{dt}$
  - Puis, tout  $x_k$  a une influence sur tout  $f$  égale à  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$
- Puis on regarde tous les chemins possibles!! (somme)

$$\frac{d(f \circ \varphi)}{dt} = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(t)) \times \frac{dx_j}{dt}(t)$$

C'est la formule générale, mais penser à l'appliquer directement.

#### ◆ Pour aller plus loin - Règle de la chaîne - multiple

Et si  $g$  est à plusieurs valeurs? Si  $\varphi$  s'exprime elle-même sous la forme :  $\varphi : (t_1, \dots, t_m) \mapsto (x_1(t_1, \dots, t_m), \dots, x_p(t_1, \dots, t_m))$ .

On applique exactement la même règle pour chacune des dérivations par rapport à  $t_h$ .

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert  $U$ . Soit  $\varphi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^p$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $O$  ouvert de  $\mathbb{R}^m$ , avec  $\varphi(O) \subset U$ .

Alors  $g : f \circ \varphi$  est une fonction numérique de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $O$  et

$$\forall \vec{t} = (t_1, \dots, t_m) \in O, \forall k \in \mathbb{N}_m,$$

$$\frac{\partial g}{\partial t_k}(\vec{t}) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(\varphi(\vec{t})) \times \frac{\partial x_j}{\partial t_k}(\vec{t})$$

#### ⚠ Attention - Autour de la formule de la chaîne

- ⚡ Même si en physique on a tendance à oublier le point (vecteur) pour lequel on effectue le calcul de la différentielle, il ne faut pas l'oublier ici!!
- ⚡ Noter également qu'il est préférable (au moins mnémotechniquement) d'écrire d'abord les dérivées de  $f$  (à gauche), puis celles des  $x_k$  à droite.
- ⚡ Cela correspond bien à l'écriture de la dérivation. C'est aussi avec cette écriture qu'on peut faire des vraies/fausses simplifications rapides par  $\partial x_j \dots$

#### Exercice

Exprimer la dérivée de  $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$  en fonction de  $r$  et de  $\theta$  si l'on admet le paramétrage :  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$

#### Règle de la chaîne et sciences physiques

Nous nous appuyons sur le document *Rapprochements didactiques entre trois disciplines scientifiques dans la continuité [bac-3, bac+3]*.

#### STOP Remarque - Relation numérique. Différence entre la fonction mathématique et la loi physique.

En mathématiques, la fonction est une application d'un ensemble dans un autre. En informatique, la notion de fonction est équivalente.

En science physique, on s'intéresse aux grandeurs physiques et non aux fonctions. Celle-là sont reliées entre elles par des lois modélisant des phénomènes. Par exemple, la notation  $G(g_1, g_2, \dots, g_N)$  traduit le fait que la grandeur  $G$  dépend des autres grandeurs physiques  $g_1, \dots, g_N$ .

Mais, mathématiquement, ce choix s'interprète par l'existence d'une fonction  $G$  de plusieurs variables  $G : (g_1, g_2, \dots, g_N) \mapsto G(g_1, g_2, \dots, g_N)$ .

Une difficulté majeure (voire LA difficulté majeure) réside dans le fait que le physicien note avec la même lettre  $G$  toutes les fonctions quoique différentes, servant à exprimer la même grandeur  $G$  en fonction de jeux de variables différentes.

#### 🔪 Exemple - Thermodynamique

#### STOP Remarque - Notation de dérivation

La même notation, de Leibniz, sert pour exprimer en mathématiques la dérivation de fonction de plusieurs variables et en physique la dérivation d'une grandeur. Dans les deux cas, une confusion (maladresse) peut poindre...

- En mathématiques, écrire  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  est assez maladroit car  $x$  apparaît ici deux fois mais dans deux sens distinctes : une fois comme variable

muette pour indiquer par rapport à quelle variable on calcule la dérivée, l'autre fois comme valeur de la variable.

On a préféré ainsi dans le cours la notation  $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ , intéressante lorsqu'on se place en un point précis, mais ce n'est pas toujours le cas... On pourrait aussi noter, sans ambiguïté en mathématiques :  $\partial_1 f(x, y)$

- En physique, lorsque les grandeurs de référence sont toujours les mêmes cela ne pose pas trop de problème. C'est le cas en électromagnétisme : les variables sont  $x, y, z, t$ . Quoiqu'un premier doute peut apparaître lorsqu'on écrit  $\frac{\partial E}{\partial r}$ . Que le contexte associe à  $r$  les coordonnées cylindrique ou sphérique change le résultat.

C'est encore plus dramatique en thermodynamique. Reprenons l'exemple précédent, que signifie  $\frac{\partial S}{\partial T}$ . Est-ce la dérivée de la variable

$S(T, V)$  ou  $S(T, P)$ ? Pour répondre à cette question, en physique on note  $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$  et  $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$ , ce qu'on aurait noté mathématiquement  $\frac{\partial f}{\partial T}$  et  $\frac{\partial g}{\partial T}$  respectivement (avec les conventions de l'exemple précédent)

### Exemple - Formule de la chaîne physicienne

## 5. Visualisation et optimisation

### 5.1. Tangente à une courbe, à une surface

Commençons par la tangente à une surface : il s'agit d'un plan.

Pour la courbe, nous ferons une analogie et retrouverons les résultats déjà connus...

#### Plan de l'espace

Pour les courbe de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^3$ , localement une courbe ressemble à un segment de droite. Comme pour ces cas simples, localement, une surface ressemble (de près donc) à une surface plane.

Voyons comme décrire une surface plane.

#### Heuristique - Décrire un plan de $\mathbb{R}^3$

Comment peut-on décrire un plan dans  $\mathbb{R}^3$  (espace affine)?

1. et en donnant un point du plan .
2. en décrivant sa pente, c'est-à-dire le plan parallèle qui passe par  $O$ , ou encore le plan de l'espace vectoriel parallèle.

◆ **Pour aller plus loin - Nature de  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$**

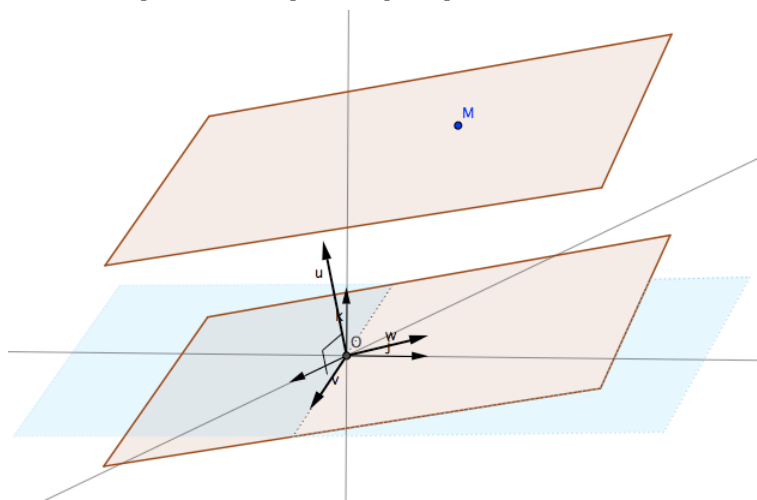
Si  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ , alors  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  est également une fonction de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}^n$ , puisque  $\frac{\partial f}{\partial x_i} : \vec{a} \mapsto \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\vec{a}), \frac{\partial f_2}{\partial x_i}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(\vec{a})\right)$ .

On peut donc tenter de dériver également ces fonctions-là.

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ .

Si pour tout  $i \in \mathbb{N}_p$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  est dérivable, on dit que  $f$  admet des dérivées partielles d'ordre 2 notées  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  (pour la dérivée  $\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i}$ )

- celui-ci est donné soit par une équation explicite :  $ax + by + cz = 0$ .  
Ou de manière équivalente, mais plus géométrique, par un vecteur orthogonal au plan en question (ici  $\vec{u} = (a, b, c)$ ).  
Cela correspond à l'écriture *implicite du plan*.
- ou enfin, par la donnée de deux vecteurs formant une famille génératrice du plan (ici  $\vec{v}, \vec{w}$ ).  
Cela correspond à l'écriture *paramétrique du plan*.



#### Proposition - Surface plane

L'écriture **explicite** d'un plan de  $\mathbb{R}^3$  est de la forme :  $z = ax + by + c$   
(ou dans certains cas particuliers  $x = x_0$  (plan perpendiculaire à  $(Ox)$ ),  
ou bien  $y = y_0$  (plan perpendiculaire à  $(Oy)$ ),  
ou bien  $y = ax + c$  (plan perpendiculaire à la droite  $y = ax + c$  de  $(Oxy)$ ))

L'écriture **implicite** d'un plan de  $\mathbb{R}^3$  est de la forme :  $ax + by + cz + d = 0$   
plan orthogonal à  $\vec{u} = (a, b, c)$  passant par  $(0, 0, -\frac{d}{c})$

L'écriture **paramétrique** d'un plan de  $\mathbb{R}^3$  est de la forme :

$$\begin{cases} x(u, v) = a_1 u + b_1 v + c_1 \\ y(u, v) = a_2 u + b_2 v + c_2 \\ z(u, v) = a_3 u + b_3 v + c_3 \end{cases}$$

plan dirigé par  $\vec{e} = (a_1, a_2, a_3)$  et  $\vec{f} = (b_1, b_2, b_3)$  et passant par  $(c_1, c_2, c_3)$ .

#### Démonstration

#### Remarque - Point de vue et nature de la définition

On voit que selon le point de vue adopté pour définir un plan, la définition de ce plan change de nature :

- si l'on considère le plan comme un ensemble engendré par deux vecteurs (et un point) alors on aboutit à une définition paramétrique,
- si l'on considère le plan comme un ensemble orthogonal à un vecteur (et passant par un point) alors on aboutit à une définition implicite.

### Plan tangent à une surface

#### Heuristique - Regarder au voisinage d'un point

Pour pouvoir regarder une surface au voisinage de point  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , il faut que l'on puisse maîtriser l'ensemble des  $M(x, y, z)$ , voisin de  $M_0$  et qui se trouve sur la surface  $\Sigma$ .

Il faut donc que le vecteur  $\lim_{M(\in\Sigma) \rightarrow M_0} \frac{\overrightarrow{M_0M}}{\|M_0M\|}$  ait un sens.

Or  $f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) = 0$  (cas implicite)

$$\text{donc } \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \times (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \times (y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \times (z - z_0) = 0$$

$$\text{donc } \langle \nabla f(x, y, z), \overrightarrow{M_0M} \rangle = 0.$$

Il est donc nécessaire, dans le cas des surfaces implicites, que  $\nabla f(x, y, z)$  soit non nul pour pouvoir définir, alors, un plan tangent.

*Le cas paramètre est hors programme* La surface va ressembler à un plan, localement, si le point au voisinage duquel nous faisons l'étude est régulier :

#### Définition - Point régulier

Un point  $M(x, y, z)$  d'une surface  $\Sigma$  est dit **régulier** si :

- dans le cas d'une surface définie explicitement  $z = g(x, y)$  :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) \text{ et } \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \text{ sont finis,}$$

- dans le cas d'une surface définie implicitement  $f(x, y, z) = 0$  :

$$\nabla f(x, y, z) \neq 0.$$

- dans le cas d'une surface définie paramétriquement  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  :

$$\left( \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right) \text{ forment une famille libre,}$$

Un point non régulier est dit critique, nous le verrons plus tard.

Et selon ces cas :

#### Proposition - Plan tangent

Considérons une surface  $\Sigma$  et  $M(x_0, y_0, z_0)$  un point régulier de cette surface.

Alors :  $\Sigma$  admet en  $M$  un plan tangent (affine) :

- dans la cas où  $\Sigma$  a pour équation explicite  $z = g(x, y)$ , ce plan tangent a pour équation :

$$z - z_0 = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \times (x - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \times (y - y_0)$$

$$\text{ou } z - z_0 = \langle \nabla g(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle.$$

- dans la cas où  $\Sigma$  a pour équation implicite  $f(x, y, z) = 0$ , ce plan tangent a pour équation :

$$\langle \nabla f(x_0, y_0, z_0), \overrightarrow{M_0M} \rangle = 0$$

$$\text{ou } \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \times (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \times (y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \times (z - z_0) = 0$$

- dans le cas où  $\Sigma$  est définie paramétriquement par  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , le plan tangent à cette surface en  $M_0(x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$  a pour équation :

$$M_0 + \text{vect} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right).$$

#### Exercice

Montrer que  $M(1, 1, 1)$  est un point régulier de la surface  $\Sigma$  d'équation  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ .

Donner une équation du plan tangent à  $\Sigma$  en  $M$

**Droite tangente à une courbe****Remarque - Droite tangente à une courbe**

Par analogie, on adapte ces définitions (points réguliers) et propriétés (droites tangentes à une courbe) au cas d'une courbe du plan.

L'exercice suivant nous donne une application.

**Exercice**

On considère l'ellipse  $\mathcal{E}$  d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Soit  $M(x_0, y_0)$  un point de  $\mathcal{E}$ , donner l'équation de la droite tangente en  $M$ .

**Courbes implicites**

On admet :

**Théorème - Paramétrage**

Considérons une courbe  $\mathcal{C}$  et  $M(x_0, y_0)$  un point régulier de cette courbe.

On suppose que  $\mathcal{C}$  a pour équation implicite  $f(x, y) = 0$ .

Alors : si  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ , il existe un paramétrage de classe  $\mathcal{C}^1$  de la courbe  $\mathcal{C}$ .

Autrement écrit : il existe  $\epsilon > 0$ ,  $x, y : ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow \mathbb{R}$  tels que

- $x(0) = x_0$  et  $y(0) = y_0$ .
- La courbe paramétrée  $(x(t), y(t))$  a la même représentation localement que  $\mathcal{C}$

**🔍 Analyse - Fonctions implicites****📌 Application - Thermodynamique**



### 5.2. Interprétation physique du gradient

↗ **Heuristique - Interprétation géométrique du gradient**

Soit  $\vec{a} \in U$ . Dans la direction donnée par  $\vec{u}$ , la variation donnée par  $f$  est

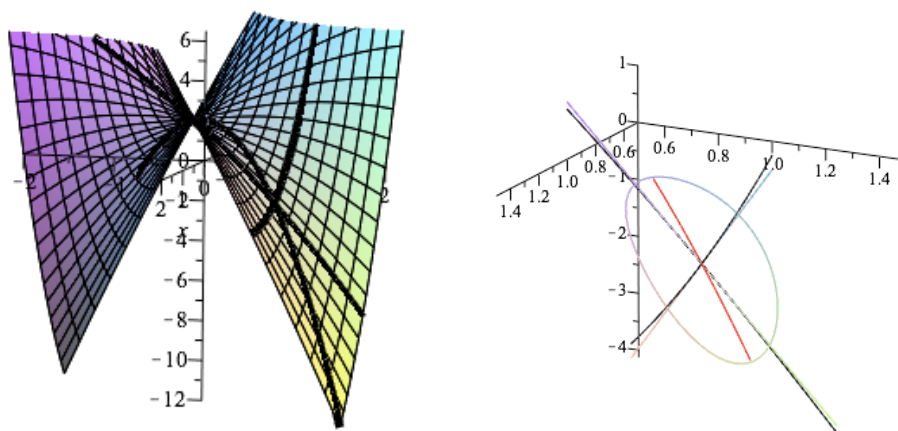
$$f(\vec{a} + h\vec{u}) - f(\vec{a}) = h\langle \nabla f(\vec{a}); \vec{u} \rangle$$

Nous savons que le produit scalaire est maximale lorsque les deux vecteurs multipliés sont colinéaires (optimisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz).

Donc pour  $h$  donné, la variation  $f(\vec{a} + h\vec{u}) - f(\vec{a})$  est extrême si  $u$  est colinéaire à  $\nabla f(\vec{a})$ .

Par conséquent,  $\nabla f(\vec{a})$  indique la plus forte pente (variation) de  $f$  en  $a$ .

🍂 **Exemple - Retour sur la fonction  $f(x, y) \rightarrow x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 4xy + 2$**



REPRÉSENTATION DU GRADIENT EN ROUGE,  
DIRECTION DE L'ACCROISSEMENT MAXIMALE DE  $f$

On peut dire encore mieux :

**Proposition - Gradient**  
 Soit  $\vec{a}$  un point régulier de  $f$ .  
 Supposons que  $f(\vec{a}) = C$ .  
 Alors :  $\nabla f(\vec{a})$  est orthogonal à la ligne de niveau  $f(\vec{x}) = C$ ,  
 dans le sens des lignes de valeurs croissantes.

### 5.3. Optimum libre

Point critique

### ↗ Heuristique - Etude des extremum

Dans le cadre des fonctions de  $\mathbb{R}^p$  dans  $\mathbb{R}$ , il est légitime de chercher des extremums, puisque l'ensemble d'arrivée est  $\mathbb{R}$  muni d'une relation d'ordre.

Nous allons essayer de répondre à cette question. Souvenons que pour les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , la nullité de la dérivée en  $x_0$  est un critère nécessaire pour affirmer que  $f(x_0)$  est un maximum (ou minimum) local de  $f$ .

Attention ce n'est pas une condition suffisante : penser à  $x \mapsto x^3$  dont la dérivée s'annule en 0...

### Définition - Extremum

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $\vec{a} \in U$

On dit que  $f$  admet un maximum (resp. minimum) global sur  $U$  en  $\vec{a}$

ssi  $\forall \vec{x} \in U, f(\vec{a}) \geq f(\vec{x})$  (resp.  $f(\vec{a}) \leq f(\vec{x})$ )

On dit que  $f$  admet un maximum (resp. minimum) local en  $\vec{a}$

ssi  $\exists \epsilon > 0$  tel que  $\forall \vec{x} \in U \cap B_\epsilon(\vec{a}), f(\vec{a}) \geq f(\vec{x})$  (resp.  $f(\vec{a}) \leq f(\vec{x})$ ).

Un maximum (resp. minimum) global est un maximum (resp. minimum) local.

### STOP Remarque - Extrema

On parle d'extremum pour parler de minimum ou de maximum.

Le pluriel est plutôt extrema, maxima, minima, mais on tolère extremums, maximums, minimums.

### Définition - Points critiques

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ .

On dit que  $\vec{a}$  est un point critique de  $f$  si  $\nabla f(\vec{a}) = \vec{0}$

### STOP Remarque - Les dérivées partielles en $\vec{a}$

Comme pour tout  $i, \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = D_i f(\vec{a}) = \langle \overrightarrow{\text{grad}}(f)(\vec{a}); \vec{e}_i \rangle = \langle \vec{0}, \vec{e}_i \rangle = 0$ , on en déduit que si  $\vec{a}$  est un point critique de  $f$ , alors toutes les dérivées partielles de  $f$  sont nulles en  $\vec{a}$ .

La réciproque est vraie.

### Proposition - Point critique et optimalité

Soit  $f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $U$ .

Supposons que  $f$  possède un extremum local en  $\vec{a}$ .

Alors :  $\vec{a}$  est un point critique de  $f$

### ⚠ Attention - La condition n'est que nécessaire

⚡ Penser un point-col (comme sur la figure 1 de ce chapitre), qui admet au point col un point critique (maximal selon  $x$  et minimal selon  $y$ ), mais pas d'extremum

### Démonstration

### Méthode de recherche d'optimalité

#### Remarque - Ouvert, fermé et compact

Remarquons bien que la proposition présentée ici concerne **un ouvert**  $U$ . Par contre souvenons-nous que toute application sur une partie fermée et bornée (compact) de  $\mathbb{R}^p$  admet une borne supérieure et une borne inférieure, et que celles-ci sont atteintes par la fonction continue.

#### Savoir faire - Recherche d'extremum

Considérons  $f$  dont on recherche un extremum.

1. On montre l'existence de cet extremum en appliquant le théorème de continuité sur un compact  $K$  de  $E$ , donc un fermé borné si  $E = \mathbb{R}^n$ .

2. (a) On considère ensuite son intérieur. C'est un ouvert et on recherche les points critiques.

Localement, on regarde s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

On étudie donc  $f(\vec{x}) - f(\vec{a})$ .

Directement ou bien avec l'aide d'un DL d'ordre 2 (si possible) :

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \underbrace{0}_{\text{point critique}} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a})(x-a_i)(x-a_j) + o(\|\vec{x} - \vec{a}\|^2)$$

qu'on étudie...

- (b) On recherche les points sur la frontière.

Souvent ce sera un ensemble où chaque  $x_i$  est bloqué sauf un.

#### Remarque - Système d'équations, non linéaires

Il arrive souvent que le système soit associé à des équations non linéaires.

La méthode du pivot de Gauss est alors vouée à l'échec.

Dans ce cas, on n'a pas mieux que la substitution. Seulement ici, vous êtes tolérés à l'employer...

#### Exercice

Etudier les extremums globaux de  $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2x - 4y$  sur  $U = [0, 3] \times [1, 5]$ .

## 5.4. Optima liés

### Analyse - Problématique

On a le théorème suivant, dont on donnera une démonstration l'année prochaine.

On notera qu'il s'agit d'un critère nécessaire et non suffisant :

**Théorème - Extrema lié. Optimisation sous contrainte**


Soient  $f$  et  $g_1, \dots, g_r$  sont des fonctions numériques définies et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur l'ouvert  $U$  de  $E$ ,

Notons  $X$  l'ensemble des zéros de  $g_1, g_2, \dots, g_r$ .

Si  $\vec{x} \in X$ , avec  $\forall i \in \mathbb{N}_r, dg_i(\vec{x}) \neq 0$  et si  $f|_{g_1, \dots, g_r}$  admet un extremum en  $\vec{x}$ , alors  $\nabla f(\vec{x}) \in \text{vect}(\nabla g_1(\vec{x}), \dots, \nabla g_r(\vec{x}))$ .

 **Remarque - Si  $r = 1$**

Cela signifie simplement que  $\nabla f(x)$  et  $\nabla g(x)$  sont colinéaires.

 **Application - Maximum d'entropie**  $H : (x, y) \mapsto -x \ln x - y \ln y - z \ln z$  sous les contraintes  $x + y + z = 1$  et  $x E_1 + y E_2 + z E_3 = E$

 **Savoir faire - Multiplicateurs de Lagrange**

Soit à optimiser  $f$  sous les contraintes  $g_1, \dots, g_r$  sur le domaine  $U$ , ouvert de  $\mathbb{R}^p$ .

On considère  $H : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_p, \lambda_1, \dots, \lambda_r) \mapsto f(x_1, \dots, x_p) - \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_p) + \dots + \lambda_r g_r(x_1, \dots, x_p)$ .

Alors si  $\vec{x}$  est un optimum sous contrainte (« optimum lié »), nécessairement  $\vec{x}$  est (la première partie d')un point critique de  $H$ .

## Application - Distribution de Boltzmann

## 6. Bilan

### Synthèse

- ↪ Avec la notion de norme, on généralise les valeurs absolues sur les espaces vectoriels.  
Sur les espaces de dimension finie (comme  $\mathbb{R}^2$ ), toutes les normes étant équivalentes, nous n'avons aucune difficulté à définir les limites de suite et de fonctions.  
On profite de ce petit passage sur des questions de topologie pour définir à l'aide de boule (généralisation sur  $E$  d'intervalles de  $\mathbb{R}$ ), les ouvertes, fermés, l'adhérence et l'intérieur d'un ensemble.
- ↪ Puis, nous nous concentrons sur les fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}^p$  sur  $\mathbb{R}$ . Démontrer la continuité n'est pas une chose facile, il faut voir si le calcul qui définit  $f$  est continue (souvent polynomial) sinon, on n'a pas de moyen d'étudier cette continuité.  
En revanche à l'aide de suite, on peut démontrer la non-continuité de certaines fonctions.
- ↪ On cherche alors à dériver/différencier ces fonctions, ce qui donne une formule de type développement limité. Malheureusement, la dérivation n'assure pas la continuité.  
Quand les fonctions étudiées sont obtenues par composition, il est nécessaire d'exploiter la formule de la chaîne, sorte de généralisation de la formule de dérivation d'une composée de fonctions.
- ↪ Représenter de telles fonctions n'est pas facile. On voit, qu'en science, on alterne entre trois modes de représentations de fonctions (sous forme de surface) : explicite -  $z = f(x, y)$ , implicite -  $f(x, y, z) = 0$  ou paramétré -  $(x, y) = (x(t, u), y(t, u))$ .  
Pour bien comprendre ce que l'on fait, il est important de bien faire la différence entre ces représentations.  
C'est en particulier le cas, lorsqu'on cherche un plan tangent ou à optimiser un certain problème.  
D'ailleurs pour résoudre ce problème d'optimisation, on a deux stratégies selon que l'on soit sans ou avec contrainte(s).

### Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- 229. Savoir-faire - Renverser l'inégalité triangulaire
- 230. Savoir-faire - Caractérisation de  $x \in \overline{A}$
- 231. Savoir-faire - Caractérisation de  $x \in A^0$
- 232. Savoir-faire - Un bon critère de non continuité
- 233. Savoir-faire - Continuité de  $\| \cdot \|$ .
- 234. Savoir-faire - Montrer qu'une application est continue

235. Truc & Astuce pour le calcul - Calculer les dérivées partielles  
 236. Truc & Astuce pour le calcul - Comment dériver des fonctions composées  
 237. Savoir-faire - Recherche d'extremum  
 238. Savoir-faire - Multiplicateur de Lagrange

### Notations

Notations	Définitions	Propriétés	Remarques
$\bar{d}f(a)(\cdot)$	Différentielle de $f$ en $a$ , élément de $\mathcal{L}(E, F)$	Fonction linéaire, égale à $\epsilon(h)$ près à $f(a+h) - f(a)$	
$\partial f$	(Fonction) différentielle de $f$ de $E \rightarrow \mathcal{L}(E, F)$	(voir ligne précédente)	Ne pas oublier des arguments...
$\frac{\partial f}{\partial x_k}$	(Fonction) dérivée partielle de $f$ selon la $k^{\text{e}}$ variable (dans la base canonique, ortho-normée)	$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x} + h e_k) - f(\bar{x})}{h}$	Il existe d'autres notations : $D_k f \dots$
$\nabla f$	Gradient de $f$ (c'est une fonction à valeurs vectorielles)	Vecteur dont la coordonnée $k$ est $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x})$	$DL_1 : df(\bar{x})(\vec{h}) = \langle \nabla f(\bar{x}); \vec{h} \rangle + \ h\  \times \epsilon(h)$ avec $\epsilon(h) \rightarrow 0$

### Retour sur les problèmes

164. La notion de norme généralise la valeur absolue.  
 165. Les normes équivalentes sont la solutions au problème. Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.  
 166. On exploite la définition de la limite (dans tout le voisinage), pour définir la continuité.  
 167.  $\sqrt{4,001} \approx 2 + 0,001 \times \frac{\partial \sqrt{\cdot}}{\partial x}(4) = 2 + 0,00025 = 2,00025$   
 168. Non. Contre-exemple vu dans le cours.  
 169. Cours