

Variables aléatoires (cas Ω fini)

 **Résumé -**

*La seconde grande idée du calcul des probabilités (après le conditionnement) est la notion de variables aléatoires. Il existe plusieurs façons de comprendre ce genre de variables. La manière rigoureuse est celle d'une application réciproque ou d'une classe d'équivalence puisqu'elle conduit à une partition de Ω , dont un système de représentant est $X(\Omega)$. Mais ce n'est pas la manière intuitive du physicien ou du probabiliste qui voit la **variable aléatoire comme un nombre potentiel**. Ce nombre est multiple et prend telle ou telle valeur en fonction des événements de l'univers (on tient compte alors de la probabilité de réalisation). C'est typiquement le résultat chiffré d'une expérience de physique, dont la réalisation une seconde fois montre une certaine variabilité... La question qui se pose, une fois que l'on maîtrise bien cette notion de variables aléatoires est celle de l'addition, multiplication (et autres opérations...) de variables aléatoires. Il faut dans ce cas, toujours commencer par étudier le couple de variables aléatoires dont on veut faire l'addition!*

Sommaire

1. Problèmes	812
2. Variable aléatoire	813
2.1. Quelques définitions	813
2.2. Loi de probabilité	814
2.3. Lois usuelles	817
3. Couples de variables aléatoires	818
4. Indépendance	820
4.1. Indépendance de deux variables aléatoires	820
4.2. Indépendance de plusieurs variables aléatoires	821
4.3. Opération de variables aléatoires (indépendantes)	824
4.4. Suite de variables aléatoires	825
5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie	826
5.1. Espérance	826
5.2. Variance (d'une variable aléatoire)	830
5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)	833
6. Bilan	837

1. Problèmes

? Problème 173 - Variable aléatoire

Une variable peut prendre plusieurs valeurs, potentiellement, chacune avec une probabilité (a priori, ou non) fixé. Cette variable particulière comme par exemple la note à un devoir : au hasard elle est comprise entre 0 et 20 s'appelle une variable aléatoire.

On peut alors associer à chaque valeur, une probabilité, mais plus exactement un événement de l'univers. Donc les variables aléatoires partitionnent l'univers. On peut donc créer une relation d'équivalence \approx : $\omega \approx \omega'$, si pour ces deux issues de l'univers Ω , la variable aléatoire prend la même valeur.

Mais on a vu que dans ce cas là, une autre stratégie consiste à associer à la relation \approx , une fonction f sur Ω , telle que : $\omega \approx \omega' \iff f(\omega) = f(\omega')$.

Quelle définition (mathématique, formelle) de variable aléatoire est la plus naturelle et pratique pour définir un nombre potentiel ?

? Problème 174 - Lois de probabilité fréquemment rencontrées

A une variable aléatoire, on associe une distribution de probabilité.

Quelles sont les distributions les plus courantes ? A quels types d'expériences aléatoires sont-elles associées ?

? Problème 175 - Espérance, variance. . .

Souvent, on ne peut se contenter d'une distribution de probabilité pour exprimer le résultat numérique d'une expérience. Il faut pouvoir résumer cette variable aléatoire ?

Qu'est-ce que l'espérance mathématique d'une variable aléatoire ?

Pourquoi résume-t-elle d'une certaine façon la valeur de l'expérience ?

Quelles sont les autres nombres à ajouter ?

? Problème 176 - Citation de Poincaré

Que pensez-vous de la citation de Henri Poincaré (Calcul des probabilités) :

« Vous me demandez de vous prédire les phénomènes qui vont se produire. Si, par malheur, je connaissais les lois de ces phénomènes, je ne pourrais y arriver que par des calculs inextricables et je devrais renoncer à vous répondre ; mais, comme j'ai la chance de les ignorer, je vais vous répondre tout de suite. Et, ce qu'il y a de plus extraordinaire, c'est que ma réponse sera juste. »

? Problème 177 - Deux variables aléatoires

Si l'expérience aléatoire conduit à la construction de deux (ou plus) variables aléatoires. Comment faire pour les étudier ensemble ?

On peut avoir à les considérer comme une base d'autres résultats possibles (d'autres variables aléatoires).

? Problème 178 - Produit scalaire

Ou bien, la question se pose parfois de mesurer la corrélation entre ces deux variables aléatoires. Sont-elles liées? Par exemple : y a-t-il un lien entre fumer et développer un cancer? Entre ne pas porter un masque et être touché par la Covid?

On crée en probabilité-statistique un objet appelé coefficient de corrélation entre deux variables aléatoires : $\rho(X, Y)$.

Il mesure si X et Y sont proches : $\rho(X, Y) = 1$, indépendants (ou quasiment) : $\rho(X, Y) = 0$ ou sont plutôt opposées : $\rho(X, Y) = -1$.

Cela nous rappelle le produit scalaire (vu en physique et plus tard en maths) $\vec{x} \cdot \vec{y}$ qui mesure d'une certaine façon le lien entre \vec{x} et \vec{y} (modulo leurs normes). Y a-t-il un rapport entre la corrélation et la notion de produit scalaire.

2. Variable aléatoire**2.1. Quelques définitions**

Soit Ω un univers fini lié à une expérience aléatoire.

Définition - Variable aléatoire

On appelle variable aléatoire (v.a.) sur Ω toute application $X : \Omega \rightarrow E$, où E est un ensemble. Dans le cas où $E \subset \mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle. $X(\Omega)$ désigne donc l'ensemble image, c'est-à-dire les valeurs que prend l'application X . Cet ensemble est ici fini (car Ω fini), on dit alors que X est une v.a. discrète finie.

La stabilité linéaires des applications permet d'affirmer :

Proposition - Stabilité linéaire

Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur Ω , $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $X + Y, XY$ et λX sont des variables aléatoires sur Ω .

Proposition - Composition

Soit X une v.a. sur Ω et g une application définie sur $X(\Omega)$, à valeurs dans un ensemble E' , alors $g \circ X$ est une v.a. sur Ω , notée $g(X)$:

$$\begin{aligned} g(X) : \quad \Omega &\rightarrow E' \\ \omega &\mapsto g(X(\omega)) \end{aligned}$$

Démonstration**Définition - variable aléatoire constante ou certaine**

Si X est une application constante sur Ω , on dit que c'est une variable aléatoire constante ou certaine.

◆ Pour aller plus loin - Variable aléatoire sur un espace de probabilité infini

Lorsque la tribu définie sur Ω pour \mathbf{P} est plus compliqué que $\mathcal{P}(\Omega)$; pour créer une variable aléatoire réelle, il faut exiger en fait que pour tout I intervalle de \mathbb{R} , $X^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\}$ est un élément de la tribu.

Cela, afin de pouvoir écrire et calculer : $\mathbf{P}(X^{-1}(I))$, pour tout I raisonnable

Définition - Notations

Soit $X : \Omega \rightarrow E$ une variable aléatoire sur Ω .

Alors, pour $A \subset E$, $X^{-1}(A)$ est un événement (car $X^{-1}(A) \in \mathcal{P}(\Omega)$) noté

$$(X \in A) \text{ ou } \{X \in A\} \quad (= X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}).$$

Dans le cas d'une variable aléatoire réelle, pour $x \in \mathbb{R}$, on note :

$$(X \leq x) = X^{-1}([-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\},$$

$$(X < x) = X^{-1}([-\infty, x[),$$

$$(X = x) = X^{-1}(\{x\})$$

de même pour $(X \geq x)$, $(X > x)$, $(a \leq X \leq b)$...

Heuristique - Deux points de vue sur X^{-1}

De manière générale, ce que l'on a c'est une famille d'événement paramétrée par une variable réelle et pour laquelle on cherche des probabilités de réalisation.

Par exemple, on s'intéresse à l'évolution de la température (moyenne ou sur un point du globe) sur 10 ans.

On note H , la variable qui indique cette évolution. On sait que $H \in \mathbb{R}$ (même si toutes les valeurs réelles ne sont pas réalistes).

Ce que l'on cherche alors est : la probabilité d'une hausse supérieure à 2°

$$\mathbf{P}(H \geq 2)$$

Il faut donc que l'ensemble $H^{-1}([2, +\infty[)$ soit un événement mesurable en probabilité.

Donc ce qui nous intéresse, dans la pratique, c'est plutôt $H^{-1}(I)$, comme élément de Ω et dont on cherche une probabilité.

On fera bien attention à la manière de lire les expressions mathématiques du type $\mathbf{P}(H = 0)$

On a alors deux points de vue

- H est une application et H^{-1} est une application réciproque, en règle générale non bijective, donc une application de l'ensemble des parties de E (ou de \mathbb{R} pour une var) sur l'ensemble des parties de Ω (ou une tribu de Ω). C'est le point de vue choisi dans le cours.
- H^{-1} fait la partition de Ω en classes d'équivalence.

$$\omega \mathcal{R}_H \omega' \iff H(\omega) = H(\omega')$$

De ce point de vue, le théorème suivant sur le système complet d'événements est trivial.

2.2. Loi de probabilité

On se place désormais sur un espace probabilisé fini (Ω, \mathbf{P}) .

Définition - Loi (de probabilité) d'une variable aléatoire

Soit X une v.a. sur Ω . Alors l'application

$$\mathbf{P}_X : \begin{array}{ll} X(\Omega) & \rightarrow [0, 1] \\ x & \mapsto \mathbf{P}(X = x) \end{array}$$

s'appelle la loi (de probabilité) de X .

Remarque - Changement d'espace

En fait X transforme l'espace de probabilité (Ω, \mathbf{P}) en l'espace $(X(\Omega), \mathbf{P}_X)$.

A proprement parlé, il faudrait ajouter les tribus pour parler d'espace de probabilité. Mais ici Ω est fini, donc, cette omission n'est pas grave.

Savoir faire - Définir la loi d'une variable aléatoire

Définir la loi de probabilité d'une v.a. X finie, c'est donc donner $X(\Omega)$ ainsi que les probabilités $\mathbf{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$.

Remarque - Notation

Deux petites remarques :

- On peut noter f_X à la place de \mathbf{P}_X pour éviter toute confusion avec une probabilité conditionnelle.
- On note usuellement $\mathbf{P}(X \in A)$ la probabilité de l'événement $(X \in A)$ et non $\mathbf{P}((X \in A))$ ou $\mathbf{P}(\{X \in A\})$.

Définition - Relation d'équivalence sur les variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même univers Ω .

On dit que X suit la même loi que Y , et on note $X \sim Y$, si $\mathbf{P}_X = \mathbf{P}_Y$.

Il s'agit d'une relation d'équivalence sur les variables aléatoires.

Attention - Les variables X et Y peuvent être différentes!

- ⚡ Pour une pièce bien équilibrée si X indique le nombre de pile pour n lancers et Y le nombre de face.
- ⚡ Alors $X \sim Y$, alors que $Y = n - X$ (et donc $X \neq Y$).

Démonstration**Exercice**

Montrer que si $X \sim Y$, alors pour tout $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(X) \sim f(Y)$.

La réciproque est-elle vraie ?

Proposition - Variable aléatoire et système complet d'événements

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω .

Alors la famille $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, appelé système complet d'événements associé à X . En particulier,

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x) = 1.$$

Démonstration

Proposition - Existence d'une v.a.

Soient E un ensemble fini, $E = \{x_1, \dots, x_n\}$ et p_1, \dots, p_n des réels positifs tels que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Alors, si Ω est un ensemble fini tel que $\text{Card } \Omega \geq n$,

il existe une probabilité \mathbf{P} sur Ω et une v.a. X définie sur Ω vérifiant :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{P}(X = x_i) = p_i$$

Démonstration**Proposition - Loi d'une fonction de X**

Soient X v.a. sur Ω et g une fonction définie sur $X(\Omega)$.

Alors la loi de probabilité de $Y = g(X)$ est donnée par $Y(\Omega) = g(X(\Omega))$ et

$$\forall y \in Y(\Omega), \mathbf{P}(Y = y) = \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} \mathbf{P}(X = x) = \sum_{x | g(x) = y} \mathbf{P}(X = x)$$

Démonstration**Définition - Fonction de répartition**

Soit X une v.a.r sur Ω . L'application

$$\begin{aligned} F_X : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ x &\mapsto \mathbf{P}(X \leq x) \end{aligned}$$

s'appelle la fonction de répartition de X ; si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \sum_{i | x_i \leq x} \mathbf{P}(X = x_i).$$

 **Exemple - Fonction de répartition du max**

Exercice

On lance deux dés à six faces parfaitement équilibrés. Soit X la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus. Donner la loi de X , sa fonction de répartition ainsi que la loi de $Y = |X - 7|$.

2.3. Lois usuelles

(Ω, \mathbf{P}) désigne un espace probabilisé fini.


Loi uniforme**Définition - Loi uniforme**

On dit qu'une v.a. X suit une loi uniforme sur $X(\Omega)$ si

$$\forall x \in X(\Omega), \mathbf{P}(X = x) = \frac{1}{\text{Card}(X(\Omega))}.$$

Dans le cas particulier où $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}_n$ et on a

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{n}.$$

 Remarque - Modèle pour la loi uniforme \mathcal{U}_n

On choisit un objet au hasard parmi n objets numérotés de 1 à n . X désigne le numéro de l'objet tiré. (ex : lancer d'un dé non truqué)

Loi de Bernoulli**Définition - Loi de Bernoulli**

Soit $p \in [0, 1]$. On dit qu'une v.a.r. X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $\mathbf{P}(X = 1) = p$, et donc $\mathbf{P}(X = 0) = 1 - p$.

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Remarque - Modèle pour la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$

Lors d'une expérience aléatoire effectuée une seule fois et ayant deux issues possibles, on note X la v.a. qui vaut 1 si l'on a l'une des issues (succès) et 0 si l'on a l'autre (échec).

(ex : on lance une pièce de monnaie, le succès désignant le fait d'obtenir "pile")

X est alors la fonction indicatrice de l'événement A "avoir un succès", usuellement notée $\mathbb{1}_A$, définie, pour tout $\omega \in \Omega$ par $\mathbb{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$, $\mathbb{1}_A(\omega) = 0$ si $\omega \notin A$ et on a

$$\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbf{P}(A)).$$

Savoir faire - Exploitation d'indicatrice (1)

Très souvent, on associe à l'événement $A \subset \Omega$, la variable aléatoire

$$X = \mathbb{1}_A : \omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}.$$

Dans ce cas $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ avec $p = \mathbf{P}(A)$

Loi binomiale**Définition - Loi binomiale**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. On dit qu'une v.a.r. suit une loi binomiale de paramètres n et p si $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Remarque - Modèle pour la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$

On considère une urne avec deux catégories de boules : des blanches en proportion p et des non blanches en proportion $q = 1 - p$. On tire n boules avec remise de cette urne. X désigne la v.a. égale au nombre de boules blanches obtenues dans ce tirage.

Plus généralement, c'est la loi de la variable aléatoire X égale au nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes, la probabilité d'un succès étant p .

3. Couples de variables aléatoires

Soit (Ω, \mathbf{P}) un espace probabilisé fini. On a déjà rencontré cette situation dans le cas du lancer de dés.

Définition - Couple de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω , à valeurs respectivement dans les ensembles E et F . L'application

$$\begin{aligned} Z : \Omega &\rightarrow E \times F \\ \omega &\mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

est appelée couple de variables aléatoires, c'est donc une v.a. à valeurs dans $E \times F$. On note $Z = (X, Y)$.

On a $Z(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

Si X et Y sont des v.a.r. on parle de couple de v.a.r.

Définition - Loi conjointe, lois marginales

On appelle loi conjointe de X et Y la loi du couple $Z = (X, Y)$, c'est-à-dire l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(X,Y)} : \quad Z(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ (x, y) &\mapsto \mathbf{P}\left((X, Y) = (x, y)\right) = \mathbf{P}\left((X = x) \cap (Y = y)\right) \end{aligned}$$

On appelle lois marginales du couple (X, Y) les deux lois de probabilité, respectivement de X et Y .

On a $\mathbf{P}_X : x \mapsto \sum_{y \in Y(\Omega)} \mathbf{P}\left((X, Y) = (x, y)\right) = \mathbf{P}(X = x)$ (et de même pour P_Y).

⚠ Attention - Lien entre les deux lois

⚡ A partir de la loi conjointe d'un couple de v.a. on peut déterminer les lois marginales. La réciproque est fautive.

Définition - Loi conditionnelle

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires.

Pour $x \in X(\Omega)$ fixé tel que $\mathbf{P}(X = x) \neq 0$, on appelle loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ la loi de Y pour la probabilité $\mathbf{P}_{(X=x)}$, c'est-à-dire l'application :

$$\begin{aligned} Y(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ y &\mapsto \mathbf{P}(Y = y | X = x) \end{aligned}$$

De même on peut définir, pour $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(Y = y) \neq 0$, la loi conditionnelle de X sachant $(Y = y)$.

Exercice

On lance trois fois de suite une pièce équilibrée. Soient X_1 la v.a. qui vaut 1 si le premier jet donne "pile" et 0 sinon, et X_2 la v.a. égale au nombre de "face" obtenu.

Déterminer la loi conjointe ainsi que les lois marginales du couple (X_1, X_2) .

Déterminer la loi conditionnelle de X_1 sachant $(X_2 = 1)$.

Exercice

Un sac contient 4 boules numérotées de 1 à 4. On tire deux boules avec remise et on note X_1 et X_2 les numéros obtenus. On pose $X = X_1$ et $Y = \max(X_1, X_2)$.

Déterminer la loi conjointe ainsi que les lois marginales du couple (X_1, X_2) .

Déterminer la loi conjointe ainsi que les lois marginales du couple (X, Y) .

Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $(X = 2)$

Proposition - Caractérisation de loi de couple de v.a.

Soient E et F deux ensembles.

$$\left\{ \left((x_i, y_j), p_{ij} \right) \in (E \times F) \times \mathbb{R} \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s \right\}$$

représente la loi de probabilité d'un couple de v.a. si et seulement si

$$\forall (i, j) \in [1, r] \times [1, s], p_{ij} \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s p_{ij} = 1.$$

Démonstration

Les définitions précédentes peuvent se généraliser à des n -uplets de v.a.

Définition - Vecteur aléatoire

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E_1, \dots, E_n des ensembles et X_1, \dots, X_n n v.a. sur Ω . La variable aléatoire à valeurs dans $E_1 \times \dots \times E_n$

$$\begin{aligned} X: \Omega &\rightarrow E \times \dots \times E_n \\ \omega &\mapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \end{aligned}$$

est appelée n -uplet de variables aléatoires. On note $X = (X_1, \dots, X_n)$.

On a $X(\Omega) \subset X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$.

Si les X_j sont des v.a.r. on parle de n -uplet de v.a.r. ou de vecteur aléatoire à valeur dans \mathbb{R}^n .

La loi conjointe de X_1, \dots, X_n est la loi du n -uplet $X = (X_1, \dots, X_n)$. Les lois marginales du n -uplet $X = (X_1, \dots, X_n)$ sont les n lois de probabilité des v.a. X_1, \dots, X_n , elles peuvent se déduire de la loi conjointe.

4. Indépendance

4.1. Indépendance de deux variables aléatoires

Définition - Indépendance de deux v.a.

Deux variables aléatoires discrètes X et Y sur l'espace probabilisable (Ω, \mathbf{P}) sont dites indépendantes si, pour tout couple (x, y) de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$, les événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants, c'est-à-dire si

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbf{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\}) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y).$$

On notera (en MPSI3) : $X \perp\!\!\!\perp Y$ pour indiquer que X et Y sont indépendantes

C'est une relation symétrique, elle n'est ni réflexive, ni transitive.

Proposition - Caractérisation d'indépendance

Deux v.a. X et Y sur (Ω, \mathbf{P}) sont indépendantes si et seulement si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.

Démonstration

Théorème - de Coalition

Soient X et Y deux variables aléatoires sur (Ω, \mathbf{P}) , indépendantes.
Alors, pour toutes fonctions f et g , les v.a. (si elles sont bien définies) $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Démonstration**4.2. Indépendance de plusieurs variables aléatoires****Définition - Indépendance mutuelle**

Soient n variables aléatoires X_1, \dots, X_n définies sur (Ω, P) .
On dit que X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes (ou indépendantes) si pour tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times X_2(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$, on a

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{X_i = x_i\}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i = x_i)$$

c'est-à-dire si les événements $\left((X_i = x_i) \right)_{1 \leq i \leq n}$ sont mutuellement indépendants.

Proposition - Caractérisation de l'indépendance mutuelle

Soient n variables aléatoires X_1, \dots, X_n définies sur (Ω, P) .
 X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes si et seulement si pour tout $(A_1, \dots, A_n) \subset X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

Démonstration

Proposition - Indépendance mutuelle implique l'indépendance deux à deux

n variables aléatoires X_1, \dots, X_n sur (Ω, \mathbf{P}) mutuellement indépendantes sont indépendantes deux à deux.

Démonstration**Théorème - Coalitions (n variables)**

Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{P}) mutuellement indépendantes. Alors :

- pour toutes fonctions g_1, \dots, g_n , les v.a. (si elles sont bien définies) $g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)$ sont mutuellement indépendantes;
- pour toutes fonctions φ et ψ , les deux variables aléatoires (si elles sont définies) $\varphi(X_1, X_2, \dots, X_p)$ et $\psi(X_{p+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes;
- plus généralement si Y_1, \dots, Y_k sont k variables aléatoires telles que Y_i soit fonction des X_j pour $j \in J_i$, avec les ensembles J_i deux à deux disjoints, alors Y_1, \dots, Y_k sont mutuellement indépendantes.

On ne fait pas la première démonstration, il suffit d'apiter le cas de deux variables.

On ne fait pas non plus la dernière démonstration, très pénible dans les notations.

Démonstration

✎ Exemple - Une pièce qui n'en finit pas d'être tirée

4.3. Opération de variables aléatoires (indépendantes)

Si E est un ensemble muni d'une loi (E : espace vectoriel, par exemple), on peut faire agir la même loi sur des variables aléatoires X_i à valeurs dans E .

Théorème - Stabilité de la loi binomiale pour la somme

Soit (Ω, \mathbf{P}) un espace de probabilité fini.

- Si X et Y sont deux v.a.r. indépendantes sur (Ω, P) telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$, alors

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p).$$

- Si X_1, \dots, X_n sont des v.a.r. mutuellement indépendantes sur (Ω, P) telles que pour tout i , $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n_i, p)$, alors

$$\sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^n n_i, p\right).$$

La loi de Bernoulli étant un cas particulier de la loi binomiale ($n = 1$), on a

Corollaire - Addition de Bernoulli

Si X_1, \dots, X_n sont des v.a.r. mutuellement indépendantes sur (Ω, \mathbf{P}) , toutes de loi $\mathcal{B}(p)$, alors

$$\sum_{i=1}^n X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

⚠ Attention - Le même coefficient p

- ⚡ On soulignera qu'il faut que ce soit la même probabilité p en paramètre
- ⚡ aux lois additionnées

Démonstration

🔧 Savoir faire - Modélisation

Une suite finie $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ de variables aléatoires indépendantes fournit un moyen de modéliser une succession de n épreuves dont les résultats sont indépendants, en particulier les répétitions indépendantes d'une même épreuve se modélisent par la donnée de n v.a. indépendantes **équidistribuées** (c'est-à-dire de même loi).

Une suite de n lancers de pile ou face aux résultats indépendants se modélise par la donnée de n v.a. indépendantes X_1, \dots, X_n de loi $\mathcal{B}(p)$, X_i étant le résultat du i -ième lancer.

Exercice

Soit (X_1, \dots, X_n) un n -uplet de v.a.r. indépendantes de même loi $\mathcal{B}(100, \frac{1}{5})$.

On note N la variable aléatoire égale à $\text{Card} \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid X_k = 99\}$. Déterminer la loi de N .

Exercice

Une urne contient n boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à n .

On prélève deux boules successivement et on note X_1 (resp. X_2) la v.a. égale au numéro de la première (resp. deuxième) boule tirée. On pose $Z = \max(X_1, X_2)$.

Déterminer la loi conjointe du couple (X_1, X_2) , les lois marginales, ainsi que la loi de Z dans les deux cas suivants :

- le tirage se fait avec remise ;
- le tirage se fait sans remise.

💡 Truc & Astuce pour le calcul - Etude du $\max(X_i)$, où les X_i sont indépendantes

On note $Z = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. En deux temps :

1. On constate que $Z \leq k \iff \forall i \leq n, X_i \leq k$.

$$\text{Par indépendance : } \mathbf{P}(Z \leq k) = \prod_{i=1}^n \mathbf{P}(X_i \leq k)$$

2. Revenir au cas $Z = k$:

$$[Z \leq k] = [Z = k] \cup [Z \leq k - 1], \text{ événements incompatibles,}$$

$$\text{Donc } \mathbf{P}(Z \leq k) = \mathbf{P}(Z = k) + \mathbf{P}(Z \leq k - 1),$$

$$\text{et } \mathbf{P}(Z = k) = \mathbf{P}(Z \leq k) - \mathbf{P}(Z \leq k - 1)$$

Exercice

Retrouver la loi de Z dans l'exercice précédent, en exploitant le savoir-faire

🔍 Pour aller plus loin - Comment redémontrer la formule de Vandermonde

Deux stratégies :

- par combinatoire.

On décompose un ensemble de $m + n$ éléments en deux sous ensembles : un de n et l'autre de m éléments.

Et on calcule de deux façons différentes le nombre de sous-ensembles à k éléments.

- avec les polynômes.

On développe, avec la formule du binôme de Newton, de deux façons différentes $(1 + x)^n \times (1 + x)^m$, puis on identifie le coefficient devant x^k .

4.4. Suite de variables aléatoires

Définition - Indépendance pour une suite de v.a.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur (Ω, \mathbf{P}) .

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes.

5. Moments d'une variable aléatoire réelle finie

(Ω, \mathbf{P}) désigne un espace probabilisé fini.

5.1. Espérance**Définition - Espérance. Loi centrée**

Soit X une v.a. réelle, $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$.

On appelle **espérance** de X le réel noté $\mathbf{E}(X)$ défini par :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^n x_k \mathbf{P}(X = x_k) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbf{P}(X = x)$$

X est dite **centrée** si $\mathbf{E}(X) = 0$.

Proposition - Espérance des lois usuelles

Soit (Ω, \mathbf{P}) un espace de probabilité fini

- si X est constante égale à a alors $\mathbf{E}(X) = a$;
- si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors $\mathbf{E}(X) = p$;
- si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ alors $\mathbf{E}(X) = np$.

Démonstration**◆ Pour aller plus loin - \int_x**

Selon la nature de $X(\omega)$, le calcul de l'espérance sera une somme (potentiellement infinie) si $X(\Omega)$ est dénombrable ou une intégrale si $X(\Omega)$ à la puissance du continu.

Pour ce dernier cas (hors-programme des CPGE), on associe à la variable aléatoire une densité f_X de probabilité telle que $\mathbf{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

On a alors $\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(t) dt$ (généralisée à tous les moments).

L'intégrale selon STIELJES peut aider à unifier tous ces cas; on pourrait la noter \int_x

✂ Savoir faire - Exploitation d'indicatrice (2)

Si $A \subset \Omega$ est un événement, alors $\mathbb{1}_A \hookrightarrow \mathcal{B}(\mathbf{P}(A))$ et donc $\mathbf{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbf{P}(A)$.

On exploitera cette relation associée à des propriétés essentielles de l'espérance (linéarité...)

Proposition - Formulation équivalente

Soit X une v.a.r. On a

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbf{P}(\{\omega\}).$$

On peut aussi noter que $X = \sum_{i=1}^p x_i \mathbb{1}_{\{X=x_i\}}$.

Démonstration

Théorème - Formule de transfert

Soient X une v.a. définie sur Ω , à valeurs dans un ensemble E et $g : X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors l'espérance de la v.a.r. $Z = g(X)$ est donnée par la formule :

$$\mathbf{E}(Z) = \sum_{k=1}^n g(x_k) \mathbf{P}(X = x_k) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) \mathbf{P}(X = x)$$

C'est-à-dire que l'on n'a pas besoin de connaître la loi de Z pour calculer son espérance, la loi de X suffit.

Démonstration

Corollaire - Application : pseudo-linéarité

Soient X une v.a.r., a et b deux réels. Alors $\mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}(X) + b$.

En particulier $X - \mathbf{E}(X)$ est une v.a. centrée (appelée v.a. centrée associée à X).

Démonstration

Corollaire - Espérance de couple

Soient (X, Y) un couple de v.a. définies sur Ω et $g : (X, Y)(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors l'espérance de la v.a.r. $g(X, Y)$ est donnée par la formule :

$$\mathbf{E}(g(X, Y)) = \sum_{(x, y) \in (X, Y)(\Omega)} g(x, y) \mathbf{P}((X, Y) = (x, y))$$

Démonstration

On peut généraliser la formule à une v.a. du type $g(X_1, \dots, X_n)$.

Proposition - Propriétés

Si X et Y sont deux v.a.r. (plus généralement si X_1, \dots, X_n sont n v.a.r) définies sur un même espace probabilisé fini (Ω, \mathbf{P}) . Alors :

- i) $\mathbf{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda \mathbf{E}(X) + \mu \mathbf{E}(Y)$ (linéarité de l'espérance)
- ii) si $X \geq 0$ p.s. alors $\mathbf{E}(X) \geq 0$ (positivité de l'espérance)
- iii) si $X \geq 0$ p.s. et $\mathbf{E}(X) = 0$ alors $X = 0$ p.s.
- iv) si $X \leq Y$ p.s. alors $\mathbf{E}(X) \leq \mathbf{E}(Y)$ (croissance de l'espérance)
- v) si X, Y sont indépendantes, $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$
- vi) $\mathbf{E}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \mathbf{E}(X_1) + \mathbf{E}(X_2) + \dots + \mathbf{E}(X_n)$
- vii) si X_1, \dots, X_n sont indépendantes, $\mathbf{E}(X_1 X_2 \dots X_n) = \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(X_2) \dots \mathbf{E}(X_n)$

 **Pour aller plus loin - Lien avec l'intégration**

Les formules suivantes rappellent en grande partie des résultats équivalents sur le calcul d'intégrale de fonctions positives.

Pour l'intégration : si $f \geq 0$ alors $\int_1 f \geq 0$.

L'équivalence pour la nullité était assurée à condition que f soit continue (et positive).

Dans le cadre des var, la continuité n'a pas de sens, alors il est nécessaire de considérer des **var nulle presque sûrement**

Démonstration

Remarque - Espérance d'une loi binomiale

On peut ainsi retrouver facilement l'espérance d'une v.a. binomiale : c'est une somme de n Bernoulli.

Exercice

Faites le calcul

Proposition - Inégalité de Markov

Toute v.a.r. positive sur Ω fini vérifie l'inégalité :

$$\forall a > 0, \mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{a}$$

Savoir faire - Exploitation d'indicatrice (3)

Il y a un événement naturel à étudier ici $A = [X \geq a]$, puis on exploite la propriété de l'espérance de la variable $\mathbb{1}_A$.

Démonstration

Exercice

Soit X , une variable aléatoire à valeurs entières.
 Montrer que $\mathbf{P}(X = 0) \geq 1 - \mathbf{E}(X)$

◆ Pour aller plus loin - Minoration de la probabilité d'absence (ou majoration de présence)
 On trouve pour $X(\Omega) \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = 0) \geq 1 - \mathbf{E}(X)$,
 une minoration de la probabilité d'absence

🔧 Savoir faire - Composition avec exp (pour avoir une va positive). Méthode de Chernoff
 Il arrive fréquemment qu'on compose avec exp la variable X . On parle de comparaison avec des vecteurs sous-gaussiens.
 On a alors $\mathbf{P}(X \geq x) = \mathbf{P}(e^X \geq e^x) \leq \frac{\mathbf{E}(e^X)}{e^x}$.

Exercice

On suppose que $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, avec $p_2 = \mathbf{P}(X = 2) = \mathbf{P}(X = -2)$ et $p_1 = \mathbf{P}(X = 1) = \mathbf{P}(X = -1)$.
 Majorer $\mathbf{P}(X \geq \epsilon)$.

5.2. Variance (d'une variable aléatoire)

Définition - Moment d'ordre r
 Soit X une v.a.r. sur (Ω, \mathbf{P}) fini. On appelle **moment d'ordre r** ($r \in \mathbb{N}$) de X le réel $m_r(X) = \mathbf{E}(X^r)$ et **moment centré d'ordre r** de X le réel $\mu_r(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))^r]$.

🔧 Savoir faire - Formulation calculatoire (transfert) - moment
 Si X est centrée : $\mu_r(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^r \mathbf{P}(X = x)$.

Définition - Variance et écart-type
 Soit X une v.a.r. sur (Ω, \mathbf{P}) fini. On appelle **variance** de X , notée $\mathbf{Var}(X)$, le moment centré d'ordre 2 de X : $\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))^2]$.
 $\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{Var}(X)}$ est appelé **écart-type** de X .
 Si $\sigma(X) = 1$ on dit que X est **réduite**.

🛑 Remarque - Positivité de la variance
 On notera que $Y = (X - \mathbf{E}(X))^2 \geq 0$, donc $\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}(Y) \geq 0$.

🔧 Savoir faire - Formulation calculatoire (transfert) - variance
 On a donc $\mathbf{Var}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbf{E}(X))^2 \mathbf{P}(X = x)$.

Proposition - Propriétés

Soit (Ω, \mathbf{P}) un espace de probabilité fini. Alors

- i) $\text{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$ formule de Huygens
- ii) $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$
- iii) $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$
- iv) si $\sigma(X) > 0$, $X^* = \frac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite, on l'appelle **v.a. centrée réduite associée** à X
- v) $\text{Var}(X) = 0 \Leftrightarrow X$ est constante presque sûrement

 **Exemple - Variance de la loi uniforme sur $[[1, n]]$.**

Démonstration

Proposition - Variance des lois usuelles

- si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ alors $\mathbf{Var}(X) = p(1 - p)$;
- si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ alors $\mathbf{Var}(X) = np(1 - p)$.

Démonstration**Remarque - A propos de la loi hypergéométrique**

Il est bon de connaître et reconnaître la loi définie dans l'exercice suivante. C'est la loi hypergéométrique.

Il s'agit d'une sorte de répétition de loi de Bernoulli, avec dépendance cette fois-ci.

Notons enfin que dans l'exercice, on considère une succession de tirage sans remise. Le résultat est identique (même loi) si l'on considère plutôt un tirage d'une poignée de n boules.

Exercice

Une urne contient N boules, de deux catégories : des blanches en proportion p et des non blanches en proportion $q = 1 - p$ ($Np \in \mathbb{N}$ désigne donc le nombre de boules blanches et $Nq \in \mathbb{N}$ celui de non blanches).

On tire successivement n boules de cette urne **sans remise** et on note X la v.a. égale au nombre de boules blanches obtenues.

Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance (on pourra, pour cette dernière, commencer par calculer $\mathbf{E}(X(X - 1))$).

Théorème - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une v.a.r. sur (Ω, \mathbf{P}) fini. Alors :

$$\forall \epsilon > 0, \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbf{Var}(X)}{\epsilon^2}$$

Démonstration

◆ Pour aller plus loin - Majoration de la probabilité d'absence (ou minoration de présence)

On trouve pour $X(\Omega) \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X = 0) \leq \frac{\mathbf{Var}(X)}{\mathbf{E}(X)^2}$,
une majoration de la probabilité d'absence

Exercice

Soit X , une variable aléatoire à valeurs entières.

Montrer que $\mathbf{P}(X = 0) \leq \frac{\mathbf{Var}(X)}{\mathbf{E}(X)^2}$

5.3. Covariance (de deux variables aléatoires)**Définition - Covariance**

Soient X, Y deux v.a.r sur (Ω, \mathbf{P}) fini. On appelle **covariance** de X et Y le réel :

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))\right)$$

 **Exemple - Application**
Proposition - Propriétés de la covariance

Soient X, X', Y, Y' des v.a.r sur (Ω, \mathbf{P}) fini et $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$. On a

- i) $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$
- ii) $\mathbf{Cov}(aX + b, cY + d) = ac\mathbf{Cov}(X, Y)$
- iii) $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{Cov}(Y, X)$
- iv) $\mathbf{Cov}(X, X) = \mathbf{Var}(X)$
- v) $\mathbf{Cov}(X + X', Y) = \mathbf{Cov}(X, Y) + \mathbf{Cov}(X', Y)$ et $\mathbf{Cov}(\lambda X, Y) = \lambda\mathbf{Cov}(X, Y)$
 $\mathbf{Cov}(X, Y + Y') = \mathbf{Cov}(X, Y) + \mathbf{Cov}(X, Y')$ et $\mathbf{Cov}(X, \lambda Y) = \lambda\mathbf{Cov}(X, Y)$

Démonstration

Remarque - Cov comme un produit scalaire

La dernière propriété est répétée pour souligner le caractère de la bilinéarité de **Cov** sur l'espace (Ω, \mathbf{P}) .

Est-ce un produit scalaire?

On a également : $\mathbf{Cov}(X, X) = \mathbf{Var}(X) \geq 0$.

En revanche, on n'a pas : $\mathbf{Cov}(X, X) = 0 \Rightarrow X = 0$. Seulement $X = c$ (une constante) p.s.

On peut alors changer l'égalité pour obtenir un produit scalaire : $X \doteq Y$, pour exprimer $\mathbf{Var}(X - Y) = 0$.

C'est bien une relation d'équivalence. On préfère noter $X = Y + c$ p.s. (lire presque sûrement),

la valeur de c est alors $\mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(Y)$.

C'est équivalent à : $\{\omega \mid X(\omega) - \mathbf{E}(X) \neq Y(\omega) - \mathbf{E}(Y)\} = [(X - Y) \neq \mathbf{E}(X - Y)]$ a une probabilité nulle.

Si les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes :

Pour aller plus loin - $\mathbf{Cov}(X) = 0 \implies X = 0$
 ps.
 On retrouve le même problème que pour l'intégrale

Théorème - Lien variance-covariance
 Pour des v.a.r. définies sur (Ω, \mathbf{P}) fini, on a

$$\mathbf{Var}(X + Y) = \mathbf{Var}(X) + \mathbf{Var}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X, Y)$$

$$\mathbf{Var}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbf{Var}(X_1) + \dots + \mathbf{Var}(X_n) + 2 \sum_{i < j} \mathbf{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i, j} \mathbf{Cov}(X_i, X_j)$$

Démonstration

Théorème - Cas d'indépendance

Si X et Y sont deux v.a. **indépendantes** (plus généralement si X_1, \dots, X_n sont n v.a. **deux à deux indépendantes**) définies sur un même espace probabilisé fini. Alors :

- i) $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$ (on dit que X et Y sont **non corrélées**)
- ii) $\mathbf{Var}(X + Y) = \mathbf{Var}(X) + \mathbf{Var}(Y)$
- iii) $\mathbf{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \mathbf{Var}(X_1) + \mathbf{Var}(X_2) + \dots + \mathbf{Var}(X_n)$

D'une certaine façon, deux variables aléatoires non corrélées sont orthogonales pour le pseudo-produit scalaire \mathbf{Cov} d'où la notation :

Définition - Variables non corrélées (notation)

Si X et Y sont deux variables aléatoires, non corrélées (i.e. $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$), on note $X \perp Y$.

On a donc $X \perp\!\!\!\perp Y \implies X \perp Y$

Démonstration**Remarque - Variance d'une binomiale**

On peut ainsi retrouver facilement la variance d'une v.a. binomiale.

Comme lors d'un exercice précédent, $\mathbf{Var}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbf{Var}(X_i) = np(1-p)$.

Ce coup-ci l'indépendance est très importante.

La variance d'une hypergéométrique (addition de Bernoulli non indépendantes) est plus compliquée.

Attention - La réciproque est fautive.

⚡ Cela signifie que deux var peuvent avoir une covariance nulle (ou plus loin un coefficient de corrélation linéaire), sans être indépendantes.

Exercice

Soit X et Y deux variables aléatoires qui suivent une loi de Bernoulli et telles que la loi conjointe est donnée par le tableau :

$Y \setminus X$	0	1
0	a	b
1	c	d

- Calculer la $\mathbf{Cov}(X, Y)$.
- Montrer que (X, Y) sont indépendantes ssi la matrice est de rang 1.
En déduire que si (X, Y) sont indépendantes, il existe $\lambda, \mu > 0$ tel que $b = \lambda d$, $c = \lambda d$ et $a = \lambda \mu d$.
Calculer $\mathbf{Cov}(X, Y)$
- Montrer que dans ce cas $\mathbf{Cov}(X, Y) = 0$ si et seulement si X et Y sont indépendantes.

Analyse - Inégalité de Cauchy-Schwarz

Définition - Coefficient de corrélation linéaire
 Soient X et Y deux v.a. d'écart type non nul. On appelle **coefficient de corrélation linéaire** de X et Y le réel

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathbf{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Proposition - Propriétés
 $|\rho(aX + b, cY + d)| = |\rho(X, Y)|$.
 On a toujours $|\rho(X, Y)| \leq 1$, c'est-à-dire $|\mathbf{Cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$, et $|\rho(X, Y)| = 1$ si et seulement si il existe a et b réels tels que $Y = aX + b$ presque sûrement, c'est-à-dire tels que $\mathbf{P}(Y = aX + b) = 1$.

Démonstration

✂ Savoir faire - Tableau récapitulatif

On considère p un réel de l'intervalle $]0, 1[$ et on pose $q = 1 - p$.

nom	$X(\Omega)$	loi	espérance	variance
v.a constante (certaine)	$\{a\}$	$P(X = a) = 1$	a	0
loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$ \mathcal{U}_n	$\{1, 2, \dots, n\}$	$P(X = k) = \frac{1}{n}$	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n^2-1}{12}$
loi de Bernoulli de paramètre p \mathcal{B}_p ou $\mathcal{B}(1, p)$	$\{0, 1\}$	$P(X = 0) = q$ $P(X = 1) = p$	p	pq
loi binomiale de paramètres n, p $\mathcal{B}(n, p)$	$\{0, 1, 2, \dots, n\}$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	npq

6. Bilan

Synthèse

- ↪ Une variable aléatoire, issue d'une expérience, prend différentes valeurs numériques en fonction de l'état de l'univers. Il s'agit donc d'une fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. La connaissance de l'univers est d'ailleurs souvent réduite à l'image donnée par différents $X_i(\Omega)$. Réciproquement, on peut partitionner Ω en fonction de $X^{-1}(k)$, où $k \in X(\Omega)$.
- ↪ On associe alors à toute variable, une loi : la suite des valeurs $\mathbf{P}(X = x)$ où $x \in X(\Omega)$. Et comme X est à valeur numérique, on lui associe aussi une espérance $\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbf{P}(X = x)$ qui résume, en une valeur toutes les valeurs prises par X . Ce résumé est évidemment pas bon, on lui associe alors $\mathbf{Var}(X)$ qui évolue cette erreur.
- ↪ Certaines variables aléatoires sont très fréquentes, on apprend donc à les reconnaître : la variable peut suivre une loi uniforme, ou bien une loi de Bernoulli (comme la variable indicatrice) ou encore une loi binomiale qui compte le nombre de succès lorsqu'on répète n fois et indépendamment une même expérience élémentaire dont la probabilité de succès est p . D'autres lois sont classiques pour des univers dénombrables ou ayant la puissance du continu.
- ↪ Plusieurs variables aléatoires peuvent être qualifiées d'indépendantes si les événements générés par ces variables sont indépendants. Pour mesurer cela, il faut donc s'intéresser aux événements $(X_1 = x_1) \cap (X_2 = x_2) \dots$ que l'on étudie à partir de la variable aléatoire du couple (X_1, X_2) (ou n -uplet) : c'est l'événement $[(X_1, X_2) = (x_1, x_2)]$. Si ces variables ne sont pas indépendantes, on peut mesurer la corrélation entre ces variables aléatoires.
- ↪ Enfin, deux inégalités sont importantes pour contrôler des événements aléatoires, connaissant la variable aléatoire.
L'inégalité de Markov : si $X \geq 0$, $\mathbf{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{a}$ donne une minoration sur la propriété d'absence d'une variable entière.
L'inégalité de Bienaymé-Tchébychev $\mathbf{P}(|X - a| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbf{Var}(X)}{\epsilon^2}$ donne une majoration sur la propriété d'absence d'une variable entière.

Savoir-faire et Truc & Astuce du chapitre

- Savoir-faire - Définir la loi d'une variable aléatoire
- Savoir-faire - Exploitation d'indicatrice (1)
- Savoir-faire - Modélisation
- Truc & Astuce pour le calcul - Etude du $\max(X_i)$ où les X_i sont indépendantes
- Savoir-faire - Exploitation d'indicatrice (2)
- Savoir-faire - Exploitation d'indicatrice (3)
- Savoir-faire - Composition avec exp (pour avoir une va positive). Méthode de Chernoff
- Savoir-faire - Formulation calculatoire (transfert) - Moment
- Savoir-faire - Formulation calculatoire (transfert) - Variance
- Savoir-faire - Tableau récapitulatif

Notations

Notations	Définitions	Propriétés	Remarques
$[X = a], [X \leq a]$	Respectivement les événements $X^{-1}(\{a\})$ et $X^{-1}([-\infty, a])$	$\{\omega \mid X(\omega) = a\} \dots$	On raisonne ici par image de fonctions $X : \Omega \rightarrow R$ ou par classe d'équivalence.
$\mathbb{1}_A$	Variable aléatoire indicatrice de l'événement A	$\mathbb{1}_A(x) = 1$ ssi $x \in A$	$\mathbf{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbf{P}(A)$. On s'en sert pour partitionner Ω .
$X \hookrightarrow \mathcal{U}([1, n])$ (ou \mathcal{U}_n)	X (v.a.) suit la loi uniforme sur $[1, n]$	$X(\Omega) = [1, n], \mathbf{P}(X = k) = \frac{1}{n}$	$\mathbf{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ et $\mathbf{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12}$.
$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$	X (v.a.) suit la loi de Bernoulli de paramètre p	$X(\Omega) = \{0, 1\}, \mathbf{P}(X = 1) = p$	$\mathbf{E}(X) = p$ et $\mathbf{Var}(X) = p(1-p)$.
$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$	X (v.a.) suit la loi binomiale de paramètres n et p Nombre de succès lors d'une répétition de n expériences aléatoires indépendantes	$X(\Omega) = [0, n], \mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ avec probabilité de succès pour chacune égale à p	$\mathbf{E}(X) = np$ et $\mathbf{Var}(X) = np(1-p)$.
$X \perp\!\!\!\perp Y$	Les variables X et Y sont indépendantes	$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbf{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y)$	Notation propre à la MPSI3
$X = Y$ p.s.	Les variables X et Y sont égales presque sûrement	$\mathbf{P}\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \neq Y(\omega)\} = 0$	
$\mathbf{E}(X)$	Espérance de X	$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbf{P}(X = x) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbf{P}(\{\omega\})$	Meilleur résumé en un nombre d'une variable aléatoire(...).
$\mathbf{Var}(X)$	Variance de X	$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}((X - \mathbf{E}(X))^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} (x - \mathbf{E}(X))^2 \mathbf{P}(X = x)$	$\mathbf{Var}(X) \geq 0$.
$\sigma(X)$	Ecart-type de X	$\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{Var}(X)}$	Meilleur résumé de la dispersion (autour de sa valeur moyenne) d'une variable aléatoire(...).
$\text{Cov}(X, Y)$	Covariance de X et Y .	$\text{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$ (on exploite la loi du couple)	$\text{Cov}(X, X) = \mathbf{Var}(X)$ et $\text{Cov}(X, Y) \leq \sqrt{\mathbf{Var}(X)}\sqrt{\mathbf{Var}(Y)}$.
$\rho(X, Y)$	Corrélation de X et Y .	$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$	Entre -1 (cas $X = -Y$) et 1 (cas $X = Y$), elle mesure le commun entre X et Y .
$X \perp Y$	Les v.a. X et Y sont non corrélées	$\text{Cov}(X, Y) = 0$	$X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow X \perp Y$

Retour sur les problèmes

149. Comment répondre mathématiquement à la question : qu'est-ce qui est le plus naturelle? Quelle que soit la réponse intime que se donne le lecteur, le plus important est qu'il soit capable de comprendre l'autre point de vue (fonction image/classe d'équivalence).
150. Cours. Sur un univers fini : lois uniformes, loi de Bernoulli (0 ou 1), loi binomiale, loi hypergéométrique...
151. L'espérance est le bon résumé d'une variable aléatoire, car le nombre m qui annule $\mathbf{E}(X - m)$ est $\mathbf{E}(X)$. Mais cela donne une définition auto-référente. A éviter absolument!
152. Moins on en connaît sur un phénomène, plus on peut exploiter le calcul de probabilités. Il est parfois plus simple.
Une autre confirmation de ce point de vue est la méthode de Monte-Carlo proposée par Van Neumann pour calculer l'intégrale d'une fonction compliquée. Pour calculer $\int_a^b f(t)dt$, on tire au hasard des nombres x_i entre a et b , et on fait la moyenne des $f(x_i)$...
153. On étudie la loi du couple. Finalement, c'est comme si Ω était partitionner en une partition plus fine contenant celle induit par la variable X et celle induite par Y ...
154. Voir le cours. On retrouve sauf le fait que le produit scalaire soit défini. Sauf à faire évoluer = en = p.s.