

Devoir à la maison n°7 CORRECTION

Exercice

Partie I : Structure

1. Question de cours :

$$\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = 9$$

Remarques !

➤ Pour définir parfaitement une matrice carrée d'ordre 3, il faut et il suffit de donner 9 coefficients

2. $A \times 0 = 0$, donc $0 \in E_1(A)$ et donc $E_1(A)$ est non vide.

Soient M_1, M_2 deux éléments de $E_1(A)$ et λ_1, λ_2 deux nombres réels.

Il s'agit de montrer que $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 \in E_1(A)$.

Or $A \times (\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2) = \lambda_1 A \times M_1 + \lambda_2 A \times M_2 = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$
car $AM_1 = M_1, AM_2 = M_2$ puisque M_1 et $M_2 \in E_1(A)$.

Donc $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ vérifie la propriété caractéristique de $E_1(A)$, donc $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 \in E_1(A)$.

$$\text{Ainsi } E_1(A) \text{ est un sous espace vectoriel de } M_3(\mathbb{R}).$$

On admettra que $E_2(A)$ est également un sous espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$

Piste de recherche...

3. (a) Nous le savons bien, pour montrer une inclusion d'ensemble, il suffit de démontrer que tout élément du premier ensemble se trouve dans le second.

Considérons $M \in E_1(A)$, est-il dans $E_2(A)$?

On a $A^2 \times M = A \times (A \times M) = A \times M = M$ car $M \in E_1(A)$ donc $AM = M$.

Ainsi $M \in E_2(A)$.

Par conséquent

$$E_1(A) \subset E_2(A)$$

- (b) Supposons ici que A est inversible et notons A^{-1} l'inverse de A .

Remarques !

➤ Nous savons déjà que $E_1(A) \subset E_2(A)$, pour montrer (ici) l'égalité de ces deux ensembles, il ne reste plus qu'à montrer l'inclusion réciproque.

Considérons donc $M \in E_2(A)$.

Alors $A^2 M = AM$ et donc en multipliant à gauche cette égalité par A^{-1} , on a :

$$A^{-1} A^2 M = A^{-1} AM \text{ et donc } (A^{-1} A) AM = AM = M \text{ ainsi } M \in E_1(A).$$

Par double inclusion

$$\text{si } A \text{ est inversible alors } E_1(A) = E_2(A).$$

4. (a) Supposons que $A - I$ soit inversible, notons B l'inverse de $A - I$, donc $B \times (A - I) = I$.
Soit $M \in E_1(A)$, alors $AM = M$, donc $AM - M = 0$ ou encore $(A - I) \times M = AM - M = 0$.
En multipliant cette dernière égalité par B , on a $B \times (A - I) \times M = B \times 0 = 0$.
Or $B \times (A - I) = I$, donc $I \times M = M = 0$.
Par conséquent M est nécessairement la matrice nulle et donc $E_1(A) \subset \{0\}$.
Réciproquement, nous avons vu que $0 \in E_1(A)$ (quelle que soit la matrice A).

$$\text{Donc, si } A - I \text{ est inversible alors } E_1(A) = \{0\}.$$

 Piste de recherche...

- (b)  Il saute aux yeux que B est triangulaire supérieure. Etudier son inversibilité (ainsi que celle de $B - I_3$) est donc facile.
 Ensuite, on applique les résultats des questions précédentes.

$$B - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Toute matrice triangulaire supérieure est inversible si et seulement si les coefficients sur sa diagonale sont non nuls.

Ici $B - I$ est triangulaire supérieure, avec sur la diagonale des coefficients non nuls.

Donc $B - I$ est inversible et donc d'après la question précédente, $E_1(B) = \{0\}$.

Par ailleurs, pour les mêmes raisons, B est inversible et d'après 3.(b), $E_1(B) = E_2(B)$.

Par conséquent, pour cet exemple

$$E_1(B) = E_2(B) = \{0\}$$

Partie II : Étude d'un cas particulier

On considère les matrices $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

 Piste de recherche...

-  Il faut trouver l'inverse de P . On applique donc directement l'algorithme qui calcule P^{-1} et qui précise, au passage, par la même occasion (sans rien de plus) si P est bien inversible

On applique l'algorithme de Gauss-Jordan. Considérons

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & | & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow[L_3 \leftarrow -L_2]{L_2 \leftarrow -L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par suite d'opérations élémentaires, nous avons transformé P en I_3 donc P est inversible.

Par suite des mêmes opérations élémentaires, nous avons transformé I_3 en P^{-1} , donc

$$P \text{ est inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Faisons le calcul :

$$C \times P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad P^{-1} \times CP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ainsi } D = P^{-1}CP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ est bien une matrice diagonale}$$

 Piste de recherche...

-  Nous allons raisonner directement par équivalence, mais nous pourrions faire plus sûrement un raisonnement par double implication

Notons que $N = P^{-1}M$, donc $PN = PP^{-1}M = M$

$$M \in E_1(C) \iff C \times M = M \iff C \times PN = PN \iff P^{-1} \times CPN = P^{-1}PN$$

Il y a bien équivalence, car P^{-1} est inversible. Donc

$$M \in E_1(C) \iff (P^{-1}CP) \times N = N \iff D \times N = N \iff N \in E_1(D)$$

Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En notant $N = P^{-1}M$, on a l'équivalence :

$$M \in E_1(C) \iff N \in E_1(D)$$

Remarques !

- 🌀 Ici l'exercice exploite une méthode de changement de point de vue.
- 🌀 On reste dans une même classe d'équivalence (relation de similitude), car le passage de $E_1(M)$ à $E_2(N)$ est simple si M et N sont semblables.
- 🌀 Puis, on choisit dans la classe d'équivalence, un représentant pour lequel le calcul de E_1 est plus aisé.
- 🌀 Comme souvent, ce représentant est une matrice diagonale.
- 🌀 On a donc besoin de « diagonaliser » la matrice C en matrice D ...

Piste de recherche...

- 🌀 Là, il s'agit de calculer à la main (on « bourine », pas d'astuce)

Considérons une matrice N de la forme la plus générale : $N = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$.

$$N \in E_1(D) \iff D \times N = N$$

$$\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 2x_3 & 2y_3 & 2z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$$

Cela est équivalent à $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ et $2x_3 = x_3$, donc $x_3 = 0$ et de même $y_3 = z_3 = 0$.

Nous n'avons raisonné qu'en équivalences, pour obtenir finalement aucune condition particulière sur les coefficients de la deuxième ligne de N , les autres coefficients étant nuls.

Finalement nous avons montré :

$$N \in E_1(D) \text{ si et seulement si il existe trois réels } a, b \text{ et } c \text{ tels que } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Piste de recherche...

- 🌀 Pour trouver une base, il faut d'abord trouver une famille génératrice (on montrera ensuite la liberté).
- 🌀 Pour cela il faut décrire les éléments de $E_1(D)$ comme combinaison linéaire de matrices de référence. On raisonne par équivalence et cherchons une description adéquate

D'après les questions précédentes nous pouvons affirmer :

$$M \in E_1(C) \iff P^{-1}M \in E_1(D) \iff \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } P^{-1}M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ tels que } M = P \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par équivalence :

$$E_1(C) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Ces trois matrices forment clairement une famille libre, nous avons donc une base et

$$\dim(E_1(C)) = 3$$

Piste de recherche...

- 🌀 Nous allons appliquer le même raisonnement que lors des trois questions précédentes. Tout cela est finalement assez classique.

$$M \in E_2(C) \iff C^2 M = CM \iff P^{-1}C(PP^{-1})CPN = P^{-1}CPN \text{ (en notant } N = P^{-1}M)$$

$$M \in E_2(C) \iff D^2 N = DN \iff N \in E_2(D)$$

$$\text{Or avec } N = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}, \text{ on a } D^2 N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 4x_3 & 4y_3 & 4z_3 \end{pmatrix} \text{ et } DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 2x_3 & 2y_3 & 2z_3 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$N \in E_2(D) \iff \exists x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \text{ tels que } N = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$M \in E_2(C) \iff \exists x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \text{ tels que } M = P \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & y_1 + y_2 & z_1 + z_2 \\ x_1 + x_2 & y_1 + y_2 & z_1 + z_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

Par équivalence :

$$\begin{aligned} E_1(C) &= \left\{ \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ a+d & b+e & c+f \\ a & b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Ces trois matrices forment clairement une famille libre, nous avons donc une base et

$$\dim(E_2(C)) = 6 \text{ et } E_1(C) \neq E_2(C).$$

Problème

On rappelle que $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs.

Partie A

1. Le calcul donne

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)I_2$$

En divisant, si possible par $ad-bc \neq 0$, on a A^{-1} : Réciproquement, si $ad-bc = 0$, on a trouvé une matrice non nulle $A' = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$ telle que $AA' = O_2$.

Or si A était inversible, on aurait : $O_2 = A^{-1} \times O_2 = A^{-1}AA' = A'$, donc A' serait nulle, ce qui est faux.

Donc si $ad-bc = 0$, A n'est pas inversible.

$$\det(A) = ad-bc \neq 0 \text{ si et seulement si } A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

2. On applique le résultat de la question précédente :

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_2^{-1} = -\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad ; \quad A_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Par expression de A^{-1} , on a

$$\det(A^{-1}) = \det \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-c}{ad-bc} \\ \frac{-b}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \frac{ad-bc}{(ad-bc)^2}$$

Donc

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

4. Soit $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, i.e. $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^4$.

Remarques !

L'enjeu dans cette question, n'est pas seulement que A soit inversible dans le corps $\mathbb{Q}$, mais bien dans l'anneau $\mathbb{Z}$.

Si on tient compte seulement de $\det(A) \neq 0$, on trouve une matrice inverse de A dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$. Il faut que les coefficients de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ soient également dans $\mathbb{Z}$. C'est l'enjeu de cette question, et cela explique pourquoi on obtient un résultat sur $\det A$ plus exigeant.

Procédons par double implication.

Supposons que A admet une matrice inverse A^{-1} et que A^{-1} est, un élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

Alors comme $\det(A) = ad-bc$, et que $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, on a $\det(A) \in \mathbb{Z}$.

De même comme $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, alors $\det(A^{-1}) \in \mathbb{Z}$.

Ceci n'est possible que si $\det(A) \in \{-1, 1\}$; en effet, sinon : $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \notin \mathbb{Z}$.

Donc $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Supposons que $\det(A) \in \{-1, 1\}$.

Alors, puisque $\det(A) \neq 0$, A est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrons qu'en fait $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

$$\text{On a vu que } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc comme } \det(A) \in \{-1, 1\}, \frac{1}{\det(A)} = \det(A) \text{ et donc } A^{-1} = \det(A) \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

C'est une multiplication d'entiers donc $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

Donc si $\det(A) \in \{-1, 1\}$ alors A admet une matrice inverse A^{-1} , élément de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$

Par double implication :

$$A \text{ admet une matrice inverse } A^{-1}, \text{ élément de } \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}) \text{ si et seulement si } \det(A) \in \{-1, 1\}.$$

On a alors (dans ce cas particulier $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$) :

$$A^{-1} = \det(A) \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

 Piste de recherche...

 Il faut d'abord montrer que $AB \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, puis que $\det(AB) = 1$.

Notons $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$,

$$AB = \begin{pmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{pmatrix}, \text{ c'est une matrice de } \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$$

chaque élément est bien un nombre entier (somme et produit de nombres entiers).

En outre

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (aa' + cb')(bc' + dd') - (ac' + cd')(ba' + db') = aa'dd' + bb'cc' - ab'c'd - a'bcd' \\ &= (ad - bc)(a'd' - b'c') = \det(A) \times \det(B) = 1 \times 1 = 1 \end{aligned}$$

car $A, B \in SL_2(\mathbb{Z})$. Ainsi

$\text{si } A \text{ et } B \in SL_2(\mathbb{Z}), \text{ alors } A \times B \in SL_2(\mathbb{Z}).$

6. $\det(A_4) = 5 - bc$, donc $A_4 \in SL_2(\mathbb{Z})$ ssi $\det(A) = 1$ ssi $bc = 4$.

Par ailleurs b et c sont entiers, les seuls possibilités sont :

$(b, c) \in \{(2, 2), (4, 1), (1, 4), (-2, -2), (-4, -1), (-1, -4)\}$

Partie B

1. Inverse de A .

 Piste de recherche...

 Nous allons commencer par exprimer A^{-1} en fonction de A . Puis montrer que $A^{-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$

$A^p = I_2$, donc $A \times A^{p-1} = I_2$ et donc A est inversible et $A^{-1} = A^{p-1}$.

Comme nous l'avons vu en A.6., le produit de deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, appartient à $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

Puis par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.

$\text{Ainsi } A^{-1} = A^{p-1} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}). \text{ et d'après la question A. 4, } \det(A) \in \{-1, 1\}$

 Piste de recherche...

 On procède par double inégalité (en fait, il y a une symétrie à bien exploiter)

$$(A^{-1})^p = (A^{p-1})^p = A^{p(p-1)} = (A^p)^{p-1} = I_2^{p-1} = I_2.$$

$A^{-1} \in \mathcal{C}_2(\mathbb{C}), \text{ et donc } h(A^{-1}) \leq p$

En outre, ce résultat est vraie, pour toute matrice A .

Donc si $h(A^{-1}) = q$, alors $h((A^{-1})^{-1}) \leq q$.

Or $(A^{-1})^{-1} = A$, donc $p \leq q = h(A^{-1})$.

Par double inégalité :

$h(A^{-1}) = p = h(A)$

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $P : z \mapsto \det(A - zI_2)$.

(a) On calcule, tout simplement :

$$T(z) = \det \begin{pmatrix} a-z & c \\ b & d-z \end{pmatrix} = (a-z)(d-z) - bc = z^2 - (a+d)z + (ad-bc)$$

$T(z) = z^2 - \text{tr}(A)z + \det(A)$

(b) De même :

$$\begin{aligned} A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I_2 &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ac + cd \\ ab + bd & bc + d^2 \end{pmatrix} - (a+d) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} + (ad-bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc - (a+d)a + ad - bc & ac + cd - (a+d)c \\ ab + bd - (a+d)b & bc + d^2 - (a+d)d + ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$T(A) = O_2$

- (c) Le polynôme est unitaire, il s'écrit $T(z) = (z - \lambda_1)(z - \lambda_2)$.
Les formules de Viète (relation coefficients-racines) :

$$\boxed{\operatorname{tr}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 \text{ et } \det(A) = \lambda_1 \lambda_2}$$

- (d) $\operatorname{tr}(A) = a + d$, donc $\operatorname{tr}(A)$ est un nombre entier.
En outre, $|\operatorname{tr}(A)| = |\lambda_1 + \lambda_2| \leq |\lambda_1| + |\lambda_2| \leq 1 + 1 = 2$.
Donc nécessairement :

$$\boxed{\operatorname{tr}(A) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}}.$$

3. Le calcul donne $C^2 = I_2$ et $D^3 = -I_2$, donc $D^6 = (-I_2)^2 = I_2$. Donc

$$\boxed{C, D \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z}), \text{ avec } h(C) = 2 \text{ et } h(D) = 6.}$$

Pour trouver ces ordres, on constate *par le calcul*, qu'il n'y a pas de solutions plus petites.

🔍 Remarques !

- 🔍 En fait, il y a un groupe $G(C) = \{C^k, k \in \mathbb{N}\}$ (ou $k \in \mathbb{Z}$) et l'on montre que si $C^k = I_2$, alors $h(C) | k$.
🔍 Donc par exemple, sachant que $D^6 = I_2$, alors $h(D) = 2$, $h(D) = 3$ ou $h(D) = 6 \dots$

En outre $CD = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, de trace $\operatorname{tr}(CD) = 2 \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

A ce stade, on ne peut rien affirmer.

Mais si $CD \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, alors $(CD)^p = I_2$ et donc $((CD)^2)^p = (CD)^{2p} = I_2^2 = I_2$, donc $(CD)^2 \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$.

Or $CD^2 = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, de trace $\operatorname{tr}(CD) = 14 \notin \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

Donc nécessairement, le produit CD n'appartient pas à $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$

4. Retour sur le polynôme T . Puisque $\operatorname{tr}(A) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $\det(A) \in \{-1, 1\}$, on a 10 possibilités :

$$\begin{array}{llll} T_1 = X^2 + 2X - 1, & T_2 = X^2 + 2X + 1, & T_3 = X^2 + X - 1, & T_4 = X^2 + X + 1 \\ T_5 = X^2 - 1, & T_6 = X^2 + 1, & T_7 = X^2 - X - 1, & T_8 = X^2 - X + 1 \\ T_9 = X^2 - 2X - 1, & T_{10} = X^2 - 2X + 1 & & \end{array}$$

Pour chacun, on peut calculer les racines :

$T =$	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}
$\lambda_1, \lambda_2 \in$	$\{-1 + i\sqrt{2},$ $-1 - i\sqrt{2}\}$	$\{-1\}$	$\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2},$ $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\}$	$\{j, j^2\}$	$\{1, -1\}$	$\{i, -i\}$	$\{\frac{1-\sqrt{5}}{2},$ $\frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$	$\{-j, -j^2\}$	$\{1 + i\sqrt{2},$ $1 - i\sqrt{2}\}$	$\{1\}$

où l'on note $j = e^{i\frac{2}{3}\pi}$ et donc $j^2 = e^{i\frac{4}{3}\pi} = e^{-i\frac{2}{3}\pi} = \bar{j}$.

Les polynômes T_1, T_3, T_7 et T_9 ont des racines de module différent de 1.

5. Diagonalisation de A .

- (a) A_z n'est pas inversible $\Leftrightarrow \det(A_z) = 0 \Leftrightarrow T(z) = 0$

Donc A_z n'est pas inversible $\Leftrightarrow z \in \{\lambda_1, \lambda_2\}$.

- (b) Puisque A_{λ_1} et A_{λ_2} ne sont pas inversibles,

Ker A_{λ_1} et Ker A_{λ_2} ne sont pas réduit au singleton 0 de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

🔍 Piste de recherche...

🔍 Nous commençons par trouver une relation en puissance. Le résultat attendu en découlera

Soient $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } A_{\lambda_1}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \text{Ker } A_{\lambda_1}$ et $P = (X_1 | X_2)$

Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_k : \ll A^k X_1 = \lambda_1^k X_1 \gg$.

— Pour $k = 0 : A^0 X_1 = I_2 X_1 = X_1 = \lambda_1^0 X_1$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

— Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie.

Alors $A^{k+1} X_1 = A \times A^k X_1 = A \times (\lambda_1^k X_1)$ d'après $\mathcal{P}_k$.

puis $A^{k+1} X_1 = \lambda_1^k A X_1 = \lambda_1^k \times \lambda_1 X_1 = \lambda_1^{k+1} X_1$. Donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

La récurrence est démontrée et $\forall k \in \mathbb{N}$, $A^k X_1 = \lambda_1^k X_1$.

En $k = p$, on a donc $A^p X_1 = \lambda_1^p X_1$. Or $A^p = I_2$, et donc $X_1 = \lambda_1^p X_1$.

Or X_1 est une colonne non nulle donc nécessairement

$$\boxed{\lambda_1^p = 1}$$

C'est une racine p -ième de l'unité donc

$$\boxed{|\lambda_1| = 1}$$

De même :

$$\boxed{\lambda_2^p = 1 \text{ et } \lambda_2 \text{ est de module } 1.}$$

Les polynômes P_1, P_3, P_7 et P_9 sont donc à exclure.

(d) Le calcul (produit matriciel par blocs) donne :

$$AP = (AX_1 | AX_2) = (\lambda_1 X_1 | \lambda_2 X_2) = (X_1 | X_2) \times \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$\boxed{A \times P = P \times D \text{ où } D \text{ est définie au-dessus}}$$

(e) Supposons $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Soient $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ tels que $a_1 X_1 + a_2 X_2 = 0$ (matrice colonne).

Alors en multipliant par $A : a_1 A X_1 + a_2 A X_2 = \lambda_1 a_1 X_1 + \lambda_2 a_2 X_2 = 0$.

Donc $(\lambda_2 - \lambda_1) a_1 X_1 = -\lambda_2 a_2 X_2 + \lambda_2 a_2 X_2 = 0$.

Or $\lambda_1 \neq \lambda_2$, X_1 non nul, donc $a_1 = 0$. De même $a_2 = 0$.

Par conséquent, la famille (X_1, X_2) est libre et donc

$$\boxed{P = (X_1 | X_2), \text{ de rang } 2 \text{ est inversible}}$$

6. Ordre de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$.

(a) — Ou bien A est associée aux polynômes T_4, T_5, T_6 et T_8 ,

auquel cas, A possède deux racines distinctes

et donc il existe P inversible et D diagonale telle que $AP = PD$, d'après 5.(d) et 5.(e).

— Ou bien A est associée aux polynômes T_{10} ou T_2 .

auquel cas d'après 2.(b), comme $P(A) = 0$, on a : $A^2 = 2A - I_2$ ou $A^2 = -2A - I_2$, resp.

on montre alors par récurrence : $A^k = kA - (k-1)I_2$ ou $A^k = (-1)^{k+1}(kA + (k-1)I_2)$

(en effet : $A^{k+1} = kA^2 - (k-1)A = k(2A - I_2) - (k-1)A = (k+1)A - kI_2$

ou $A^{k+1} = (-1)^{k+1}(kA^2 + (k-1)A) = \dots = -(-1)^k((k+1)A + kI_2)$ resp.).

Puis comme il existe p tel que $A^p = I_2$, on a donc $pA - (p-1)I_2 = I_2$.

ou $A^p = (-1)^{p+1}(pA + (p-1)I_2) = I_2$ resp.

pour ces deux cas (T_2 et T_{10}), A et I_2 sont colinéaires.

Dans tous les cas

$$\boxed{\text{si } A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z}), \text{ alors il existe } P \text{ inversible et } D \text{ diagonale telle que } A = P \times D \times P^{-1}.}$$

(b) Par récurrence (par la suite, ce sera un résultat du cours, que l'on exprimera directement) :

$$\boxed{A^n = P \times D^n \times P^{-1} = P \times \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \times P^{-1}}$$

(c) Ainsi, à tout élément de $\mathcal{C}_2(\mathbb{Z})$, on associe un des 6 polynômes précédents.

Pour chacun de ces polynômes, il y a (au plus) deux racines, de module 1 qui sont également des racines de l'unité.

T_2 a des racines d'ordre 2 : $\lambda_i^2 = 1$ T_4 a des racines d'ordre 3 : $\lambda_i^3 = 1$

T_5 a des racines d'ordre 2 : $\lambda_i^2 = 1$ T_6 a des racines d'ordre 4 : $\lambda_i^4 = 1$

T_8 a des racines d'ordre 6 : $\lambda_i^2 = 1$ T_{10} a des racines d'ordre 1 : $\lambda_i = 1$

Toute matrice associée à T_j a un ordre égal à celui de ces racines.

Le plus petit multiple commun à chacun de ces ordres est 12.

Donc

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{C}_2(\mathbb{Z}), A^{12} = I_2, \text{ c'est l'ordre le plus petit possible}}$$