

DEVOIR SURVEILLÉ DE FIN D'ANNÉE

L'épreuve dure 4h et comporte deux problèmes indépendants. Un soin particulier devra être apporté à la présentation des copies. En particulier, les résultats devront être encadrés.

Problème 1

On veut trouver les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, à valeurs réelles telles que

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2(x^2 + y^2)f(x, y) \quad (*)$$

Pour cela, on va faire le changement de variables $u = \frac{y}{x}$ et $v = x^2 + y^2$. Dans les questions 1 à 6, on considère une solution f d'un tel problème.

1. Justifier que l'application qui à (x, y) associe (u, v) est une bijection de $]0, +\infty[\times \mathbb{R}$ sur un ensemble Ω qu'on déterminera. Expliciter la réciproque ϕ de cette bijection.
2. On définit la fonction g sur Ω par $g(u, v) = f(\phi(u, v)) = f(x, y)$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω .
3. Par définition, $\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, $f(x, y) = g(\frac{y}{x}, x^2 + y^2)$. Calculer les dérivées partielles de f en fonction de celles de g et en déduire une équation aux dérivées partielles sur g ne faisant intervenir que les variables u et v .
4. On fixe ici $u \in \mathbb{R}$ et on définit pour v appartenant à un intervalle K à préciser, $\theta(v) = g(u, v)$. Quelle équation vérifie la fonction θ ?
5. Montrer alors qu'il existe $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times \mathbb{R}$, $f(x, y) = h(\frac{y}{x})e^{x^2+y^2}$.
6. Montrer que si f s'annule en un point, alors elle s'annule sur toute une demi-droite. Que dire alors du vecteur gradient en ces points ?
7. Soit $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère la fonction $(x, y) \rightarrow f(x, y) = h(\frac{y}{x})e^{x^2+y^2}$ définie sur le domaine A tel que

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, a), a \in \mathbb{R}\}$$

f vérifie naturellement l'équation $(*)$ sur A . On cherche des conditions sur la fonction h pour que f se prolonge en une solution de classe $\mathcal{C}^1$ de $(*)$ sur un domaine plus grand que A .

- (a) Montrer que f est prolongeable par continuité en $(0, 0)$ ssi h est constante.
- (b) De manière plus générale, déterminer les solutions de classe $\mathcal{C}^1$ de $(*)$ sur $\mathbb{R}^2$.
- (c) Montrer que f est prolongeable par continuité en $(0, a)$ avec $a \neq 0$ ssi h vérifie une condition simple que l'on déterminera.
- (d) Déterminer h pour que la solution correspondante f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, a), a \in \mathbb{R}\}$ vérifie $f(1, t) = e$ pour tout t réel. Montrer que f est alors prolongeable à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ en une fonction continue. Cette fonction est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et vérifie-t-elle $(*)$?

Problème 2

Dans tout le problème l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de son produit scalaire usuel :

$$\text{Pour } X = (x, y) \text{ et } Y = (x', y'), \langle X, Y \rangle = xx' + yy'.$$

On rappelle qu'une partie A de $\mathbb{R}^2$ est convexe si et seulement si

$$\forall (X, Y) \in A^2, \forall t \in [0, 1], (1-t)X + tY \in A$$

(i.e. le segment joignant X à Y est entièrement contenu dans A).

Questions préliminaires

1. Soit $(U, V) \in (\mathbb{R}^2)^2$. Montrer que si (U, V) est une famille libre alors il existe $Z \in \mathbb{R}^2$ tel que $\langle Z, U \rangle = 0$ et $\langle Z, V \rangle = -1$.
2. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. (Re)démontrer que $\{X \in \mathbb{R}^2 / f(X) < 0\}$ est un ouvert.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\det((x-y)I_n + yJ) = (x + (n-1)y)(x-y)^{n-1}$$

Partie I

Soit g une fonction définie sur Ω , ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose g de classe C^1 . On note $\nabla g(X)$ le gradient de g en X .

On dira que g est convexe sur Ω si elle vérifie :

$$\forall (X, Y) \in \Omega^2, \forall \lambda \in [0, 1], g((1-\lambda)X + \lambda Y) \leq (1-\lambda)g(X) + \lambda g(Y).$$

1. (a) Soit h_1 et h_2 deux fonctions convexes sur $\mathbb{R}$. On pose dans cette question $g(x_1, x_2) = h_1(x_1) + h_2(x_2)$. Montrer que g est convexe sur $\mathbb{R}^2$.
(b) Soient g_1 et g_2 deux fonctions convexes sur l'ouvert convexe Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. Montrer que $g_1 + g_2$ est aussi convexe sur Ω .
2. On se donne $(X, Y) \in \Omega^2$.
(a) Ω étant un ouvert convexe, montrer qu'il existe I intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, contenant $[0, 1]$ tel que $\forall t \in I, (1-t)X + tY \in \Omega$. On pose alors pour $t \in I, G(t) = g((1-t)X + tY)$.
(b) Montrer que G est dérivable sur I et que

$$\forall t \in I, G'(t) = \langle (Y - X), \nabla g((1-t)X + tY) \rangle.$$

3. On suppose g convexe.

- (a) Soit $(X, Y) \in \Omega^2$ et G la fonction définie précédemment. Comparer, en utilisant la convexité de g , $G(1) - G(0)$ et $\frac{G(\lambda) - G(0)}{\lambda}$ pour $\lambda \in]0, 1]$ et en déduire que $G(1) - G(0) \geq G'(0)$.
(b) En déduire que
$$\forall (X, Y) \in \Omega^2, g(Y) \geq g(X) + \langle (Y - X), \nabla g(X) \rangle.$$

(c) Montrer que $X \in \Omega$ réalise un minimum global de g (c'est-à-dire $\forall Y \in \Omega, g(Y) \geq g(X)$) **si et seulement si** $\nabla g(X) = (0, 0)$.

4. Exemple : soit $\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 > x_1\}$ et $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2 \ln(x_2 - x_1)$.

- (a) Montrer que Ω est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$ et que g est une fonction convexe sur Ω .
(b) Montrer que g est de classe C^1 sur Ω et qu'elle admet un minimum global sur Ω qu'on calculera.

Partie II

On considère maintenant deux fonctions f et g de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$; on suppose que la fonction g est convexe et qu'il existe en outre des points de $\mathbb{R}^2$ pour lesquels g prend des valeurs **strictement négatives**.

On pose $E = \{X \in \mathbb{R}^2 / g(X) \leq 0\}$. On dira que $X \in E$ rend f minimale sur E si $\forall Y \in E, f(Y) \geq f(X)$.

1. Montrer que E est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$ et que $\Omega = \{X \in \mathbb{R}^2 / g(X) < 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2. On suppose que X rend f minimale sur E et que $g(X) < 0$. Montrer que $\nabla f(X) = (0, 0)$.
3. On suppose maintenant que X rend f minimale sur E et que $g(X) = 0$.

- (a) i. Soit $Y \in \mathbb{R}^2$. On veut montrer, par l'absurde, qu'il est impossible d'avoir simultanément $\langle Y, \nabla f(X) \rangle < 0$ et $\langle Y, \nabla g(X) \rangle < 0$. On suppose donc $\langle Y, \nabla f(X) \rangle < 0$ et $\langle Y, \nabla g(X) \rangle < 0$ et on définit, pour $t \in \mathbb{R}$, $F(t) = f(X + tY)$ et $G(t) = g(X + tY)$.

Déterminer le signe de $F'(0)$ et de $G'(0)$. En déduire qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $X + t_0Y \in E$ et $f(X + t_0Y) < f(X)$. Conclure.

- ii. Déduire de ce qui précède que :

$$\forall Y \in \mathbb{R}^2, \langle Y, \nabla g(X) \rangle < 0 \Rightarrow \langle Y, \nabla f(X) \rangle \geq 0.$$

- (b) En utilisant le résultat de la question I 3b, montrer que $\nabla g(X) \neq (0, 0)$.
- (c) Soit $Y \in \mathbb{R}^2$ tel que $\langle Y, \nabla g(X) \rangle = 0$. On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = Y - \frac{1}{n} \nabla g(X)$.
En appliquant 3(a)ii, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\langle Y_n, \nabla f(X) \rangle \geq 0$ puis que $\langle Y, \nabla f(X) \rangle \geq 0$.
- (d) En utilisant la question préliminaire, montrer que $\nabla f(X)$ et $\nabla g(X)$ sont liés.

4. Déduire des questions précédentes que si X rend f minimale sur E alors

- soit $g(X) < 0$ et $\nabla f(X) = (0, 0)$,
- soit $g(X) = 0$ et $\exists \lambda \in [0, +\infty[, \nabla f(X) + \lambda \nabla g(X) = (0, 0)$.

5. Pour $n = 3$, on prend $f(x, y) = \det \left(((x - y)I_3 + yJ) \right)$ (cf préliminaires) et $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$.

- (a) Justifier qu'il existe $X_0 \in E$ rendant f minimale sur E .
- (b) Vérifier toutes les hypothèses nécessaires pour utiliser II.4 puis déterminer tous les X_0 possibles.